

Traitement numérique non local de phénomènes physiques par l'équation d'Helmholtz : les effets d'échelle et le glissement renfort-matrice

Alain Sellier (1)



Alain Millard (2)



L'équation d'Helmholtz est une équation différentielle ordinaire du second ordre en espace;

$$U - \nabla(D\nabla U) = S$$

De nombreux problèmes physiques admettent des approximations permettant de se ramener à la résolution de ce type d'équation.

Dans le cas des ouvrages de génie civil en béton armé, au moins 3 phénomènes peuvent être approchés par des équations d'Helmholtz :

- **Limiteurs de localisation** (méthode dite du «second gradient »)
- **Effets d'échelle probabilistes** (méthode originale WL2 publiée par les auteurs)
- **Glissements entre les armatures et le béton** (dépôt de PI l'université Paul Sabatier)

 Lmdc

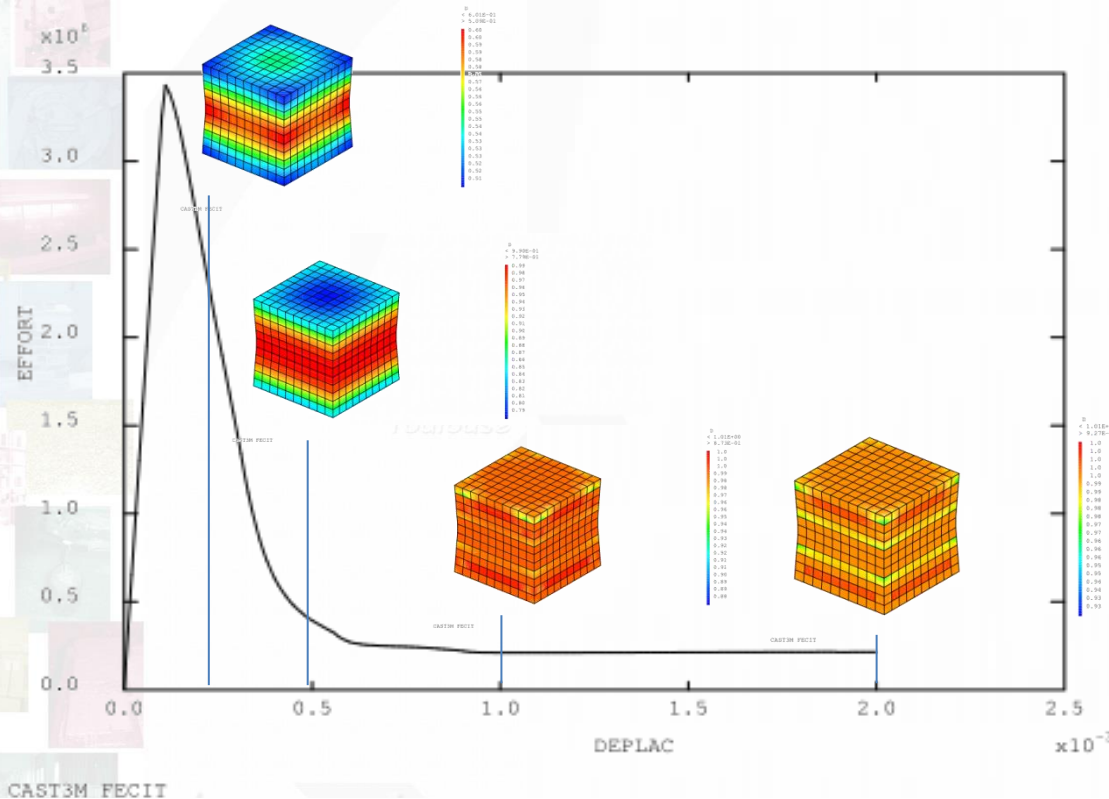
Applications de la formulation d'Helmholtz

1. Limiteur de localisation
2. Effet d'échelle probabiliste
3. Modélisation simplifiée pour la liaison acier béton
4. Etude de cas : combinaison des Formulations de liaison acier béton et d'effet d'échelle probabiliste pour le calcul d'un tirant en béton armé

Applications de la formulation d'Helmholtz

1. **Limiteur de localisation**
2. Effet d'échelle probabiliste
3. Modélisation simplifiée pour la liaison acier béton
4. Etude de cas : combinaison des Formulations de liaison acier béton et d'effet d'échelle probabiliste pour le calcul d'un tirant en béton armé

$$\langle \tilde{\epsilon} \rangle = \frac{1}{(l_c \sqrt{2\pi})^3} \int \tilde{\epsilon} \psi dx \iff \langle \tilde{\epsilon} \rangle - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \langle \tilde{\epsilon} \rangle = \tilde{\epsilon}$$



PASAPAS

- ...
- Istep=1**
Résolution locale du modèle non linéaire
calcul de $\tilde{\epsilon}$ local
- ...
- Résolution de l'équation d'Helmholtz**
- ...
- Istep=2**
Nouvelle résolution du modèle en utilisant $\langle \tilde{\epsilon} \rangle$
-

Lignes de commande permettant de lancer le calcul en non local avec Helmholtz

```
MOD1 = MODE VOLTOT MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MAZARS
```

```
'NON_LOCAL' 'HELM' 'V_MOYENNE' ('MOTS' 'EPTI') ;
```

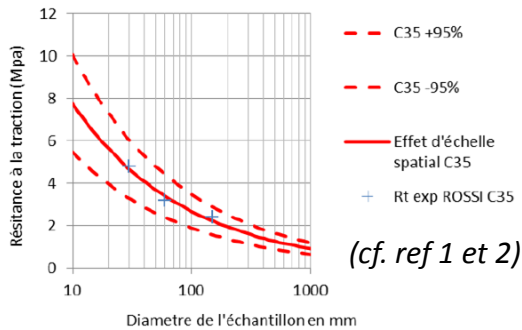
```
mat1 = MATE mod1 YOUN youngn NU nun KTR0 y0 ATRA at BTRA bt ACOM ac BCOM bc BETA bet LCAR 0.06 ;
```



Applications de la formulation d'Helmholtz

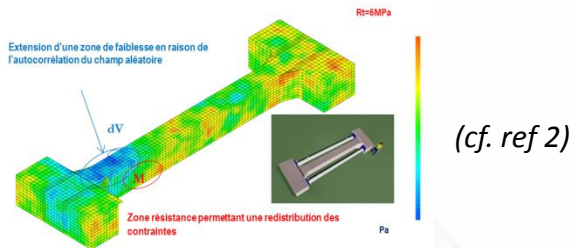
1. Limiteur de localisation
2. Effet d'échelle probabiliste
3. Modélisation simplifiée pour la liaison acier béton
4. Etude de cas : combinaison des Formulations de liaison acier béton et d'effet d'échelle probabiliste pour le calcul d'un tirant en béton armé

- Pour un état de contrainte homogène la localisation a lieu au maillon faible
- La résistance du maillon faible diminue avec l'augmentation du volume chargé
- Le maillon faible peut être modélisé de plusieurs manières
 - Déterministe en utilisant la **loi de Weibull** qui nécessite une intégration explicite de l'état de contrainte cf. opérateur **'WEIBULL'**



Pb : Calcul explicite du volume chargé par l'intégrale de Weibull, localisation difficile en chargement homogène, difficulté à actualiser l'intégrale de Weibull lors d'un calcul non linéaire...

- Probabiliste en utilisant une succession de **champs aléatoires** à longueur de corrélation et variance compatible avec l'effet d'échelle cf. **'ALEA' 'BANDES_TOURNANTES'**



Pb : grand nombre de tirages aléatoires nécessaire, choix de la longueur d'autocorrélation et des caractéristiques aléatoires du champs difficile, mais localisation facilitée...

(1) Barre, F. et al. Control of Cracking in Reinforced Concrete Structures. Control of Cracking in Reinforced Concrete Structures (2016). doi:10.1002/9781119347088 (ouvrage de recommandations suite au PN CEOS.fr)

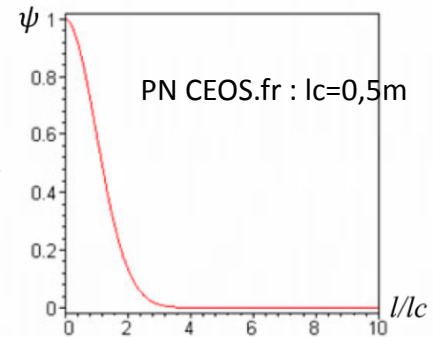
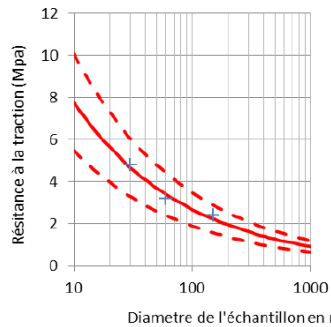
(2) Sellier, A. & Millard, A. Dépendance spatio temporelle de la résistance des matériaux, origines des phénomènes et modélisation. 21ème congrès Français de Mécanique, Bordeaux 26-30 aout 2013 1-6 (AFM, 2013).

- L'intégrale de Weibull est modifiée pour devenir une intégrale non locale
- Les effets d'échelle sont considérés analytiquement jusqu'à un volume chargé maximal V_{max}

$$\frac{R_t(M)}{R_t/V_{ref}} = \left(\frac{V_{ref}}{V_{eq}(M)} \right)^{1/m}$$

$$\ln(1 - Pf_{V/A}) = \int_V \frac{\ln(1 - Pf_e)}{V_e} \psi(l/lc) dV = \ln(1 - Pf_e) \frac{V_{eq/A}}{V_e}$$

Effet d'échelle de Weibull



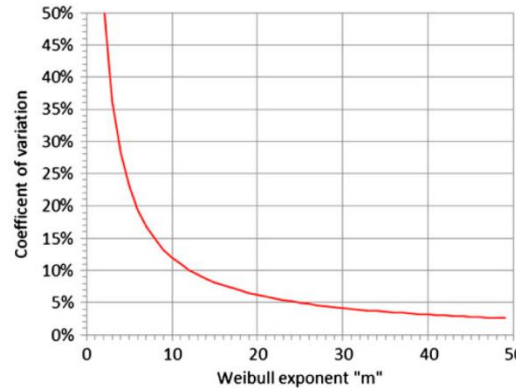
$$V_{max}(M) = \int_{V \rightarrow \infty} \psi(l/lc) dV = (lc\sqrt{2\pi})^N$$

Volume maximal $V_{eq}(M)$ considéré par la méthode WL2

Pondération non locale proposée dans le PN CEOS.fr pour tenir compte du contrôle qualité

(3) . Sellier, A. & Millard, A. *Weakest Link and Localization WL 2 : a method to conciliate probabilistic and energetic scale effects in numerical models*. Eur. J. Environ. Civ. Eng. 18, 1177–1191 (2014).

$$\frac{R_t(M)}{R_t/V_{ref}} = \left(\frac{V_{ref}}{V_{eq}(M)} \right)^{1/m}$$



Relation entre l'exposant de Weibull « m » et le coefficient de variation de la résistance d'après (ref 3)

$$V_{eq}(M) = \alpha \left(\frac{\sigma_{max}}{R_t/V_{ref}} \right)^{-m}$$

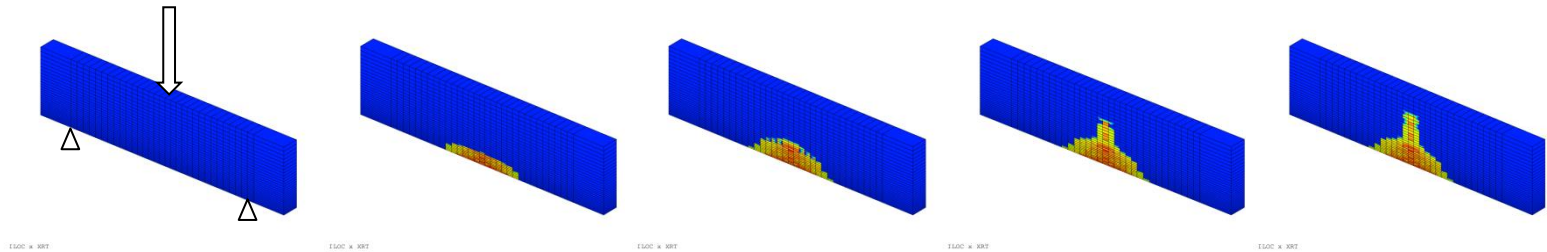
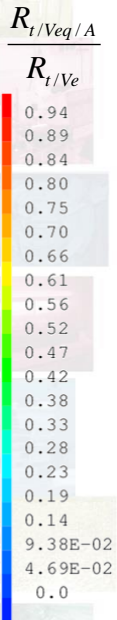
avec $\alpha = \int_V \left(\frac{\sigma}{R_t/V_{ref}} \right)^m \psi(l/l_c) dV$

D'après (ref 2), un développement limité en série de Taylor d'ordre 2 en espace permet de ramener l'estimation du volume équivalent à une équation d'Helmholtz :

$$\alpha - \left(\frac{l_c^2}{2} \right) \Delta \alpha = V_{max} \cdot \left(\frac{\sigma}{R_t/V_{ref}} \right)^m$$

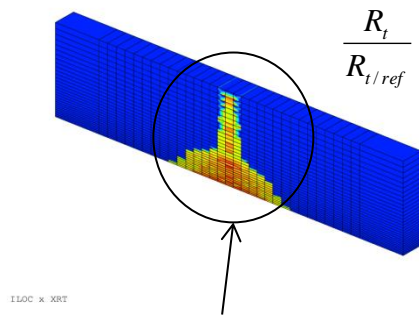
Le calcul de l'intégrale de Weibull est par conséquent remplacée pour WL2 par une équation d'Helmholtz résolue numériquement par le système linéaire déduit : $K\alpha=S$

Exemple : Auto détermination de la résistance à la traction la plus probable lors d'un calcul PASAPAS de poutres en flexion 3 point, non encochées, issues des travaux de Syroka Korol (ref 4)

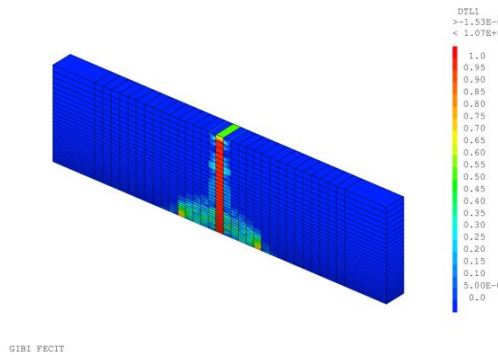


Autodétermination, lors d'un calcul d'endommagement, du champ de résistance à la traction le plus vraisemblable en zone de localisation potentielle, la résistance intrinsèque la plus vraisemblable dépend, à chaque pas, du chargement (via V_{eq})

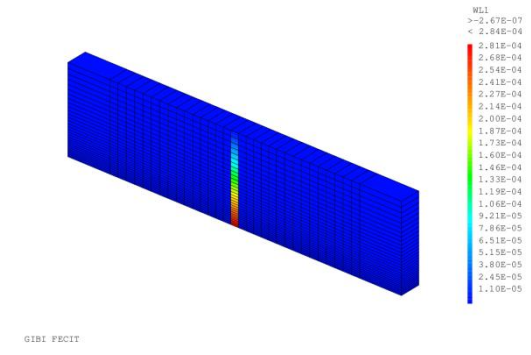
Résistance la plus vraisemblable en fin de simulation



Endommagement traction



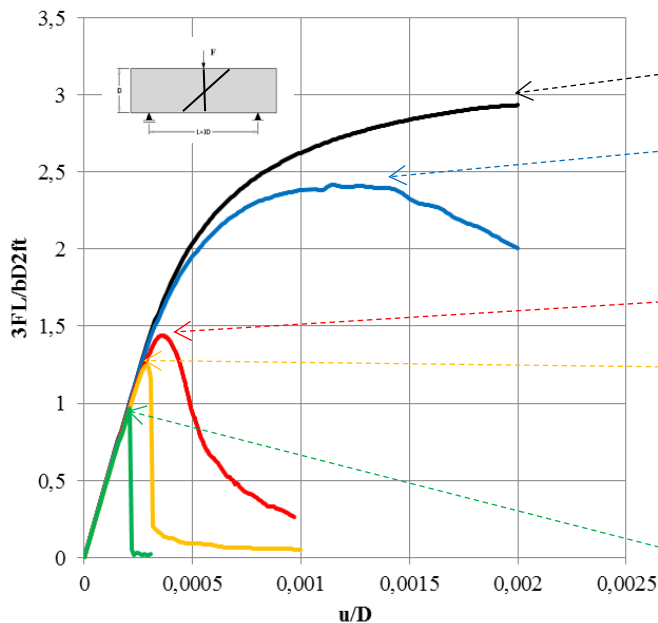
Ouverture de fissure localisée



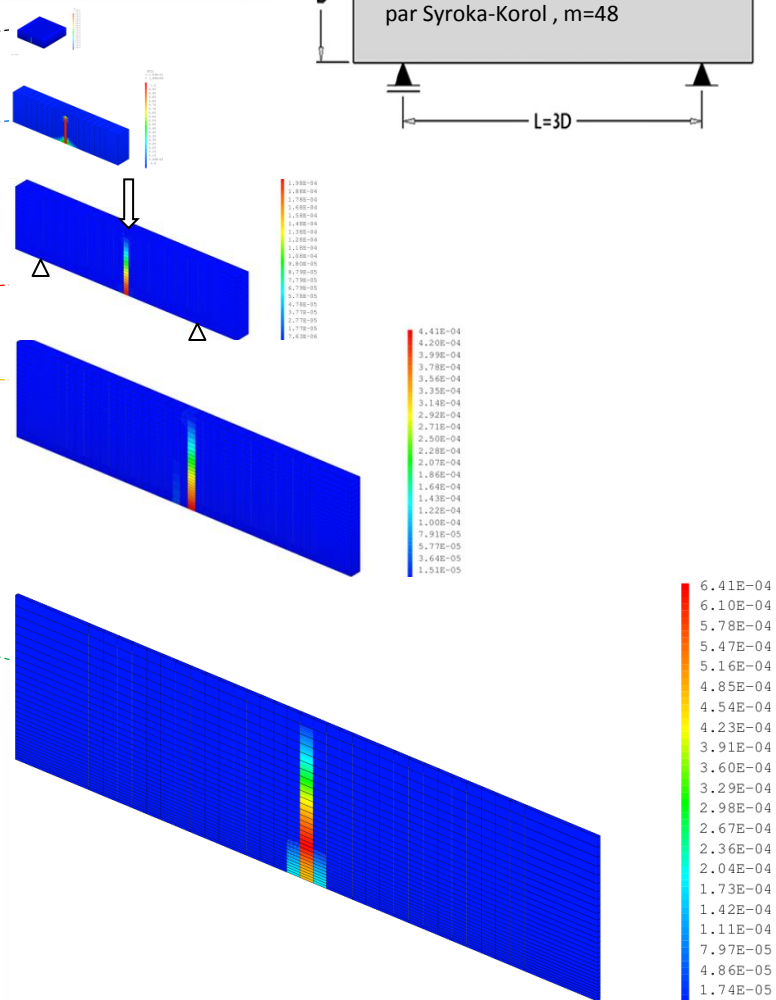
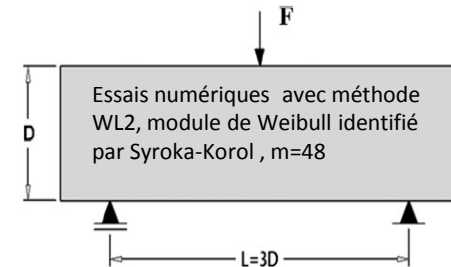
- Estimation de la résistance à utiliser dans les lois d'endommagement par WL2
- Contrôle de l'énergie dissipée par une méthode de Hillerborg anisotrope, cf. ref 5
- Prédiction des ouvertures de fissures, cf. ref 5

Lmdc

Aptitude de la méthode à considérer simultanément les effets d'échelle déterministes et probabilistes : test par simulation de poutres non entaillées



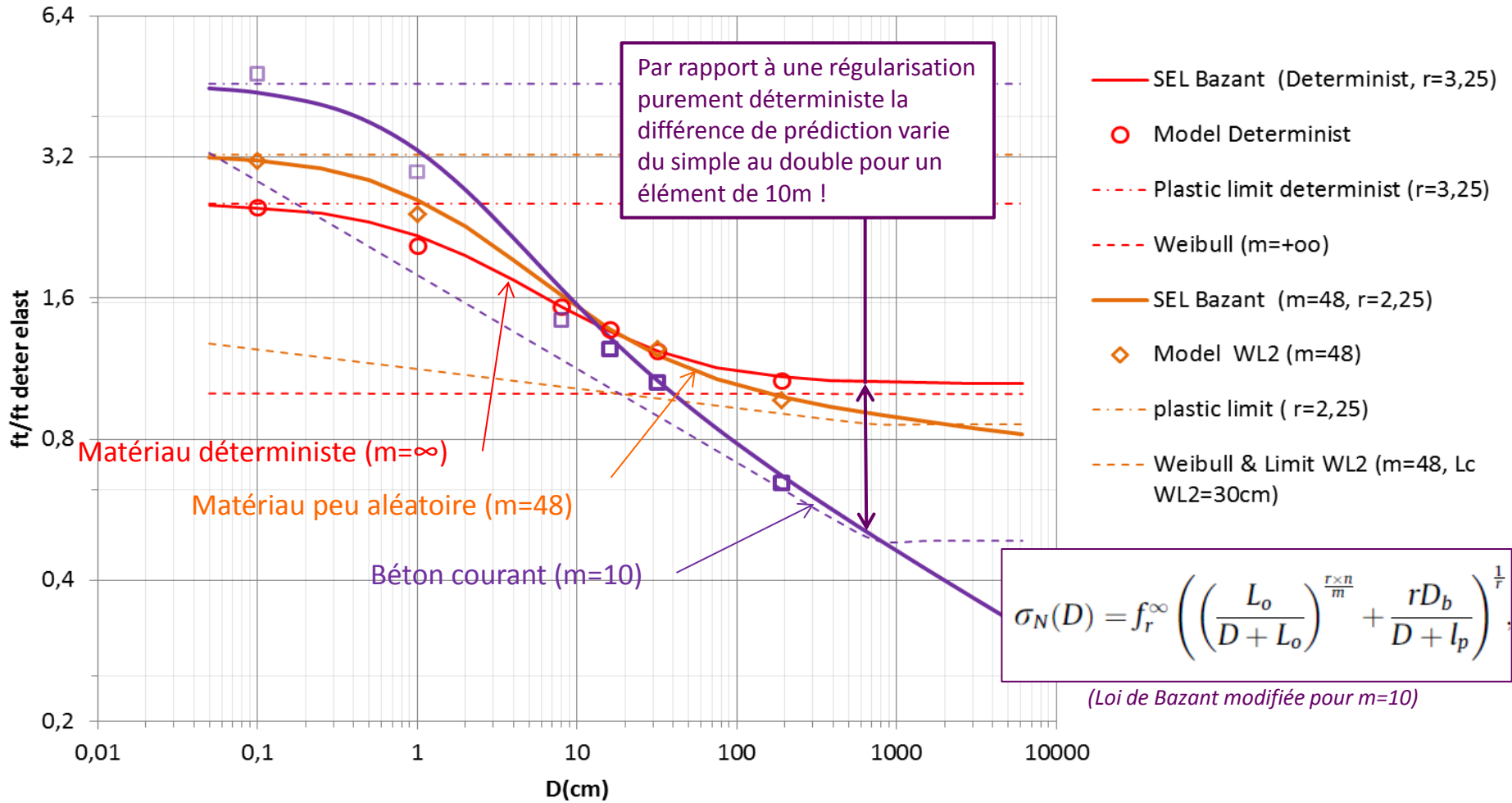
- $D=1\text{mm } 3FL/2bD^2ft$
- $D=1\text{cm } 3FL/2bD^2ft$
- $D=8\text{cm } V_{ref}=1,65\text{e-}5 \text{ } l_c=30\text{cm}$
- $D=32\text{cm } 3FL/2bD^2ft$
- $D=192\text{cm } 3FL/2bD^2ft$



En l'absence d'effet d'échelle toutes les courbes devraient être superposées

La méthode prédit une forte dépendance de la résistance normée à la taille de la structure.

Réalisme de cet effet d'échelle ?



Applications de la formulation d'Helmholtz

1. Limiteur de localisation
2. Effet d'échelle probabiliste
3. **Modélisation simplifiée pour la liaison acier béton**
4. Etude de cas : combinaison des Formulations de liaison acier béton et d'effet d'échelle probabiliste pour le calcul d'un tirant en béton armé

Calage d'une interface élasto-plastique en vue d'effectuer un calcul de référence avec maillage de l'acier, de l'interface 3D et du béton endommageable

Table 2: Mechanical properties of concrete

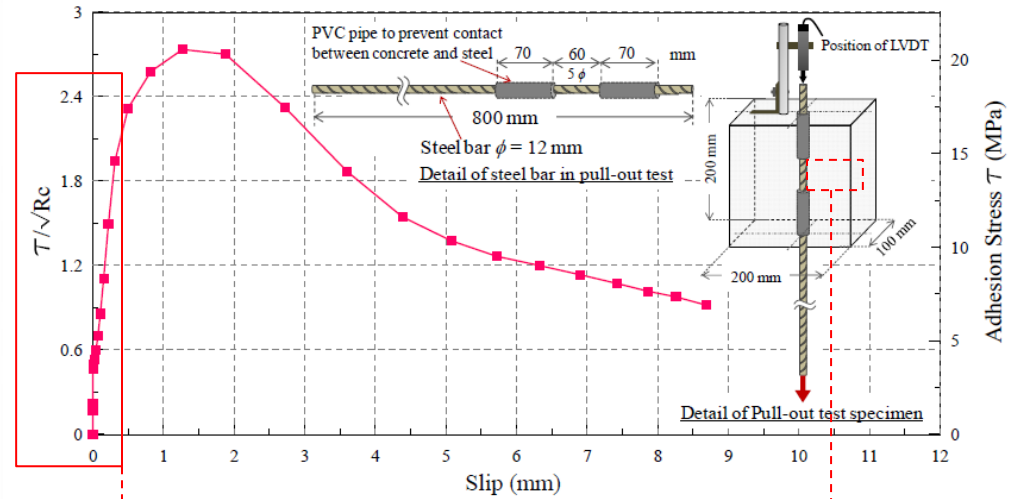
Compressive strength*	$R_c =$	56.57 MPa
Tensile strength* (Brazilian test)	$R_t =$	3.95 MPa
Modulus of elasticity*	$E =$	38 500.00 MPa

* Measured average value of experimental results at 126 days of concrete casting

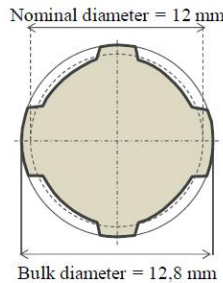
Table 3: Mechanical properties of steel bar

Fe E 500 HLE (<i>Haute Limite Elastique</i> – High Strength Steel)	
Nominal diameter of HA steel bar	$\phi = 12.00$ mm
Yield strength*	$f_y = 566.0$ MPa
Modulus of elasticity*	$E = 185.9$ GPa

* Measured average value of tensile test result of steel reinforcement bar

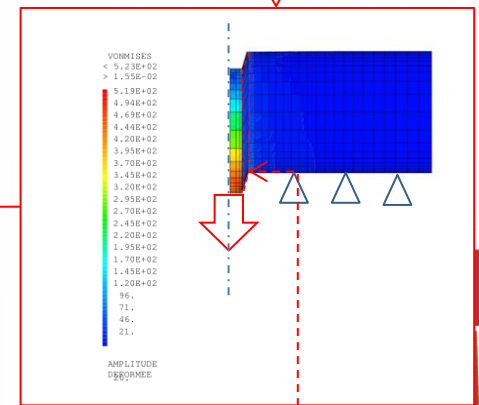
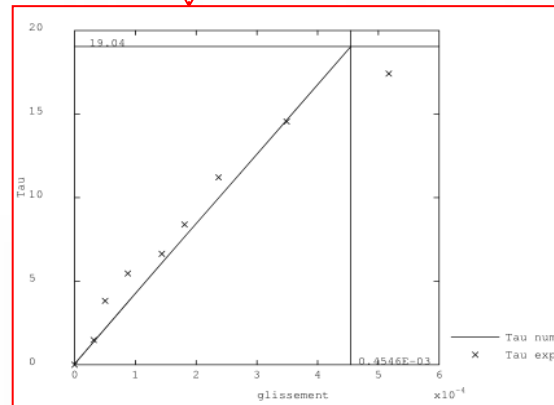


(a)



(b)

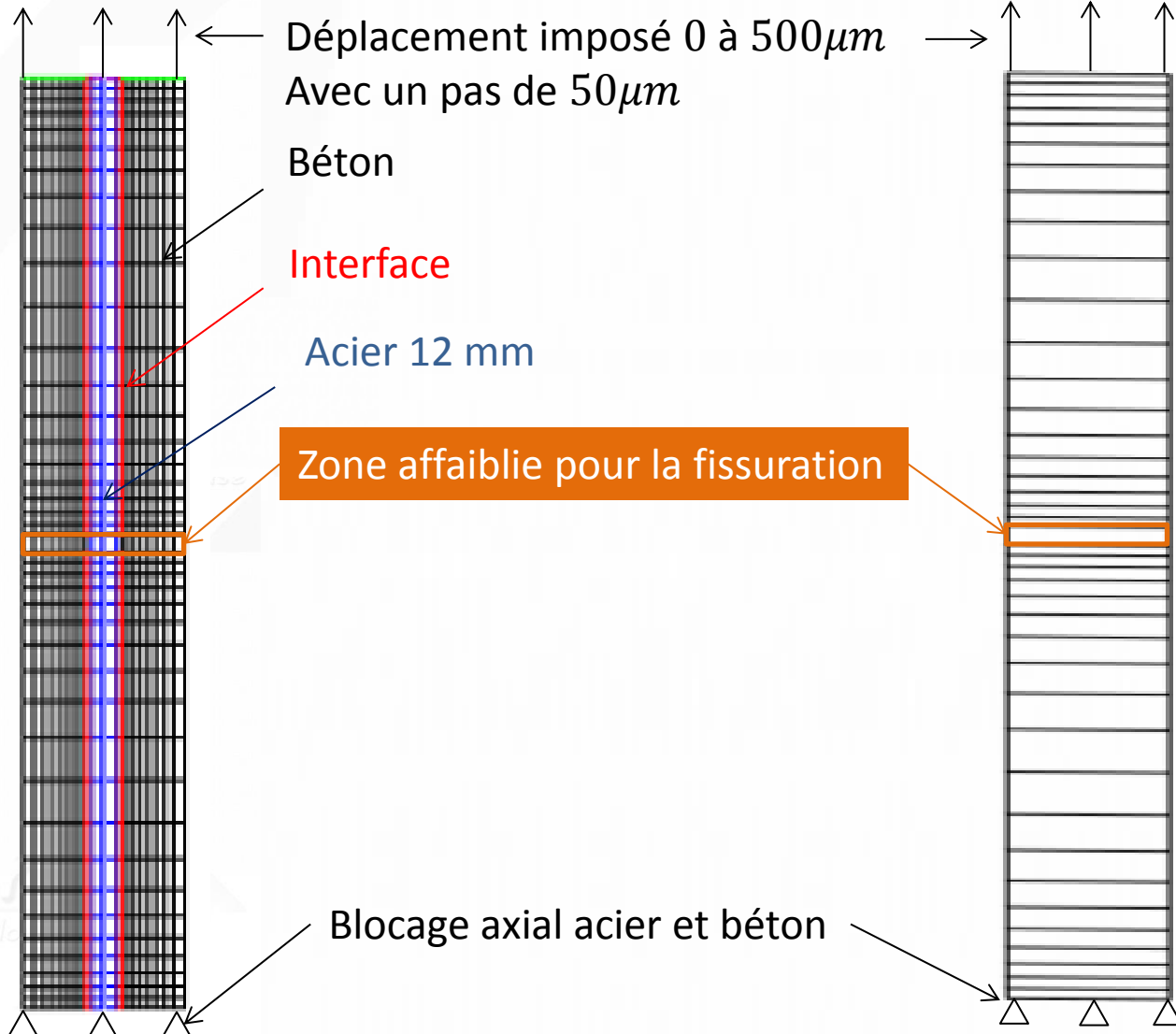
(Extrait de la thèse de Nuraziz Handika, *Multi-fissuration des structures en béton : analyse par corrélation d'images et modélisation*, LMDC Toulouse, 2017)



Interface 3D Elasto-plastique

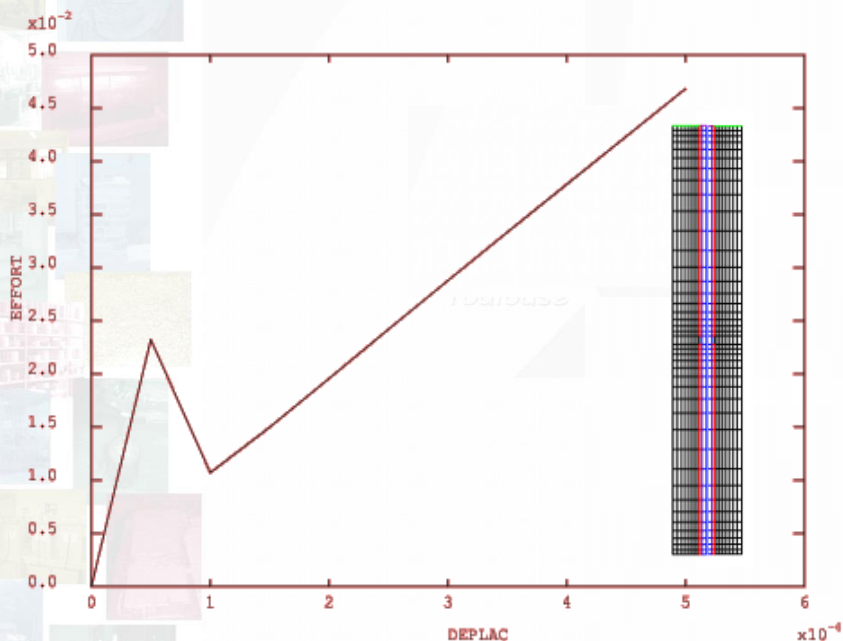
Béton armé avec une armature et une interface maillées

Béton armé homogénéisé (adhérence parfaite)

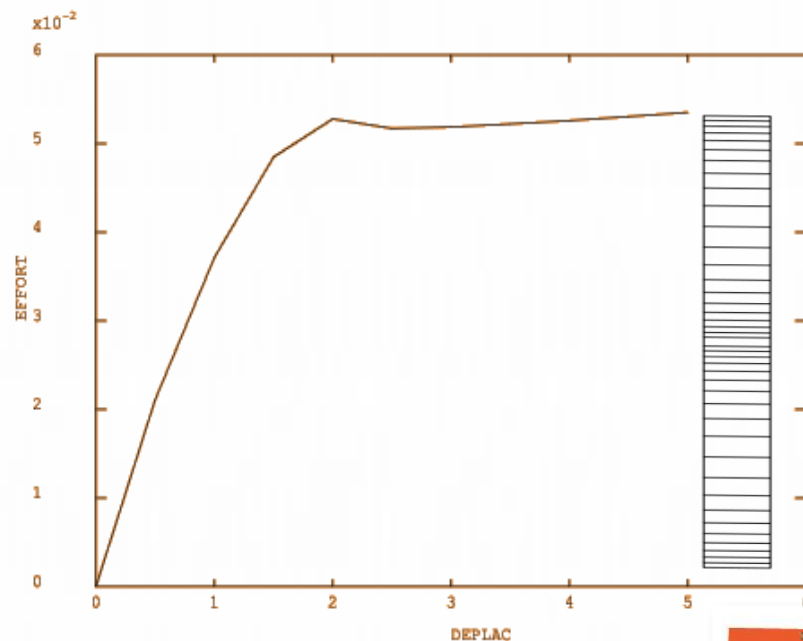


Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

Solution Armatures et interfaces maillées



Solution homogénéisée adhérence parfaite



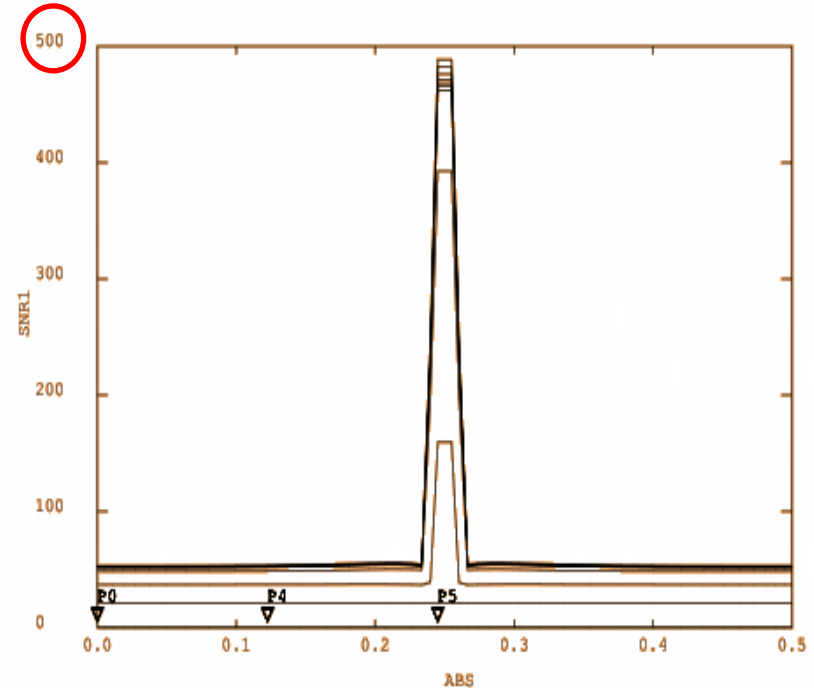
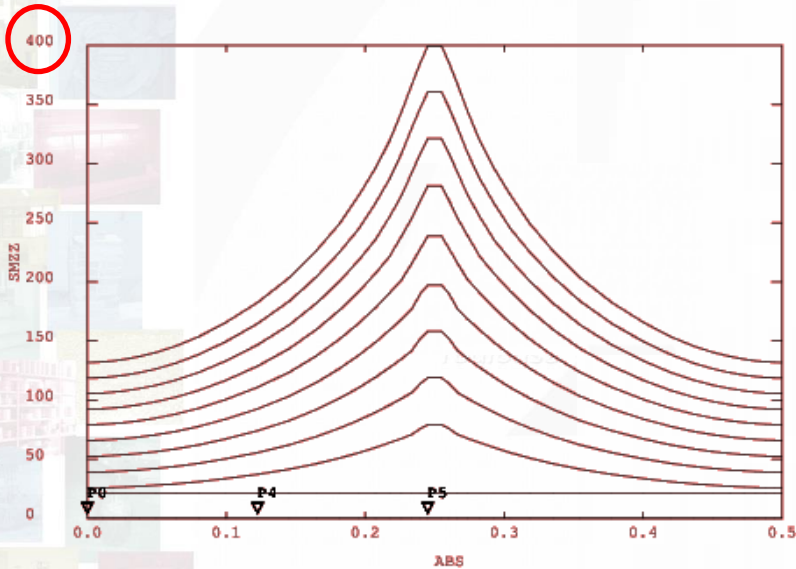
CAST3M FECIT

CAST3M FECIT

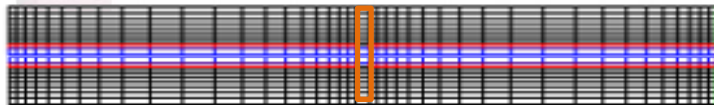
Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

Solution armature répartie adhérence parfaite

Solution Armatures et interfaces maillées



sig



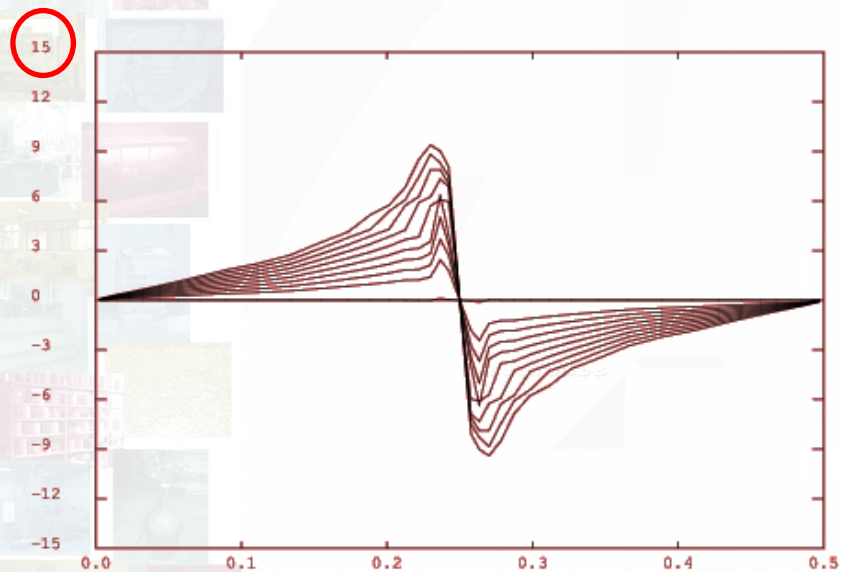
sig



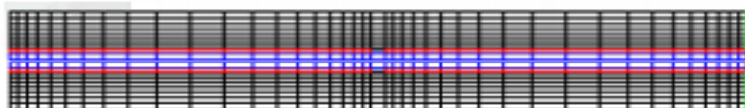
L'hypothèse d'adhérence parfaite du béton armé conduit à localiser la déformation de l'acier en fon de fissure, faussant l'ouverture de fissure et la force

Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

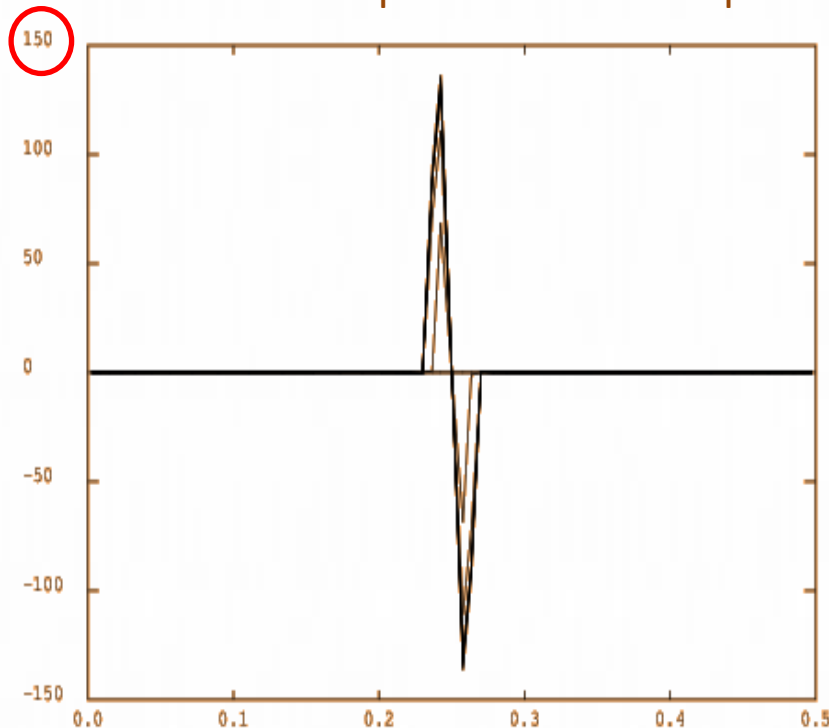
Solution Armatures et interfaces maillées



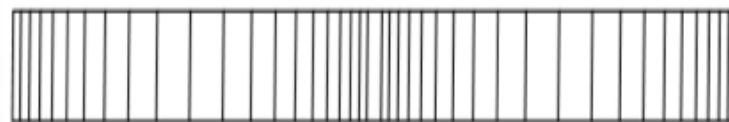
tau pour phi:PHI0



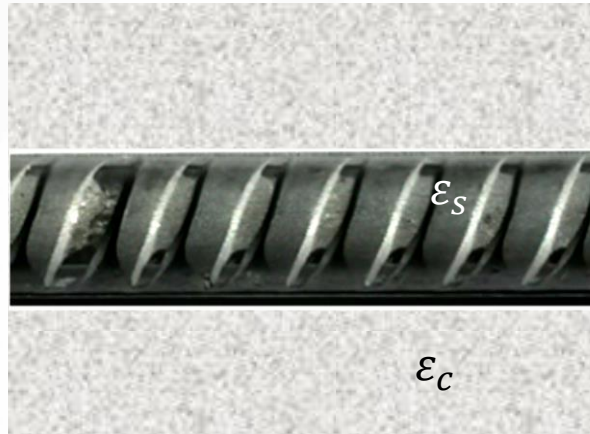
Solution armature répartie adhérence parfaite



tau pour phi:PHI0



Correction de l'erreur par une formulation d'Helmholtz sur la déformation de l'acier©



MODÉLISATION MULTI-PHYSIQUE
Matériaux composites à matrice fragile
pour le BTP-Génie Civil



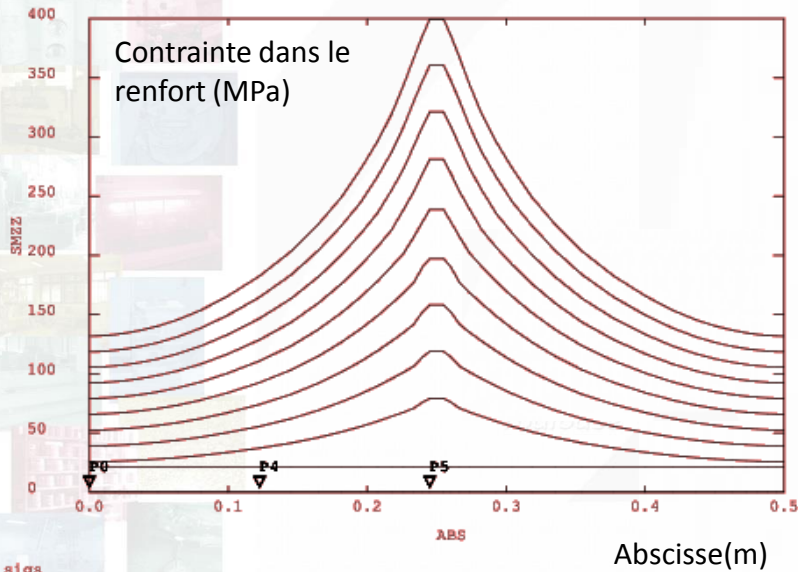
$$\varepsilon_s - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \varepsilon_s = f(\varepsilon_c, \varepsilon_s^a)$$

$l_c(D_s, \varepsilon_s, H_{int})$

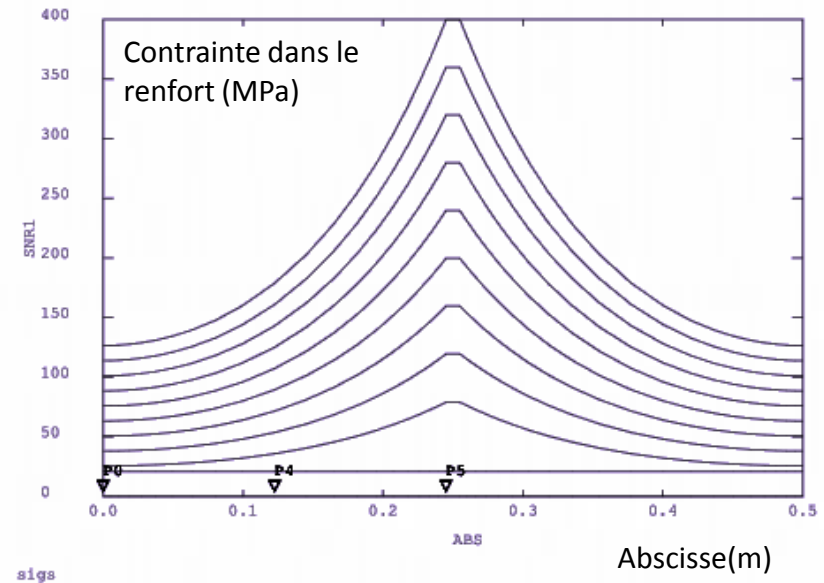
© Dépôt de Propriété Intellectuelle à l'Université de Toulouse pour les formulations des fonctions f et l_c

Lmdc
toulouse

Solution Armatures et interfaces maillées

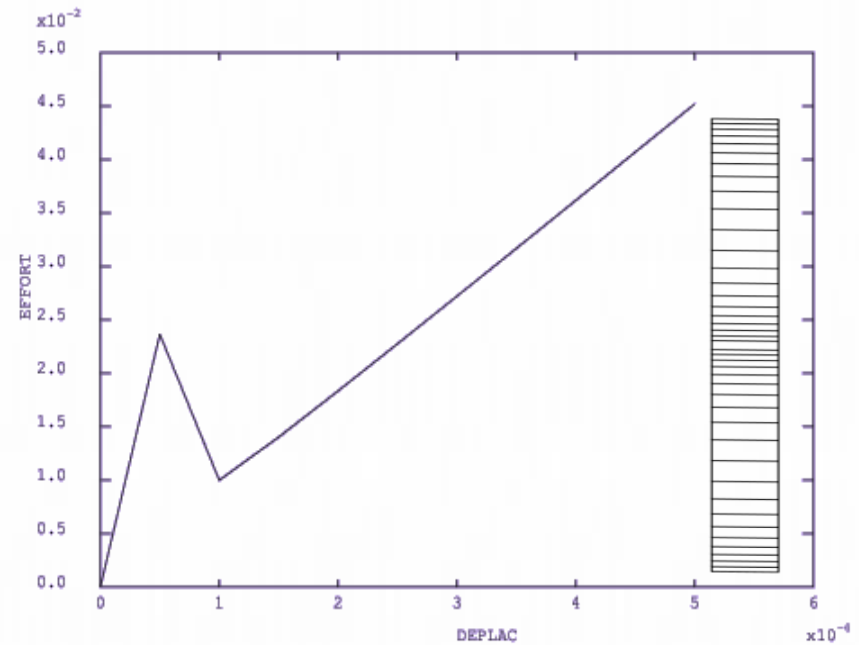
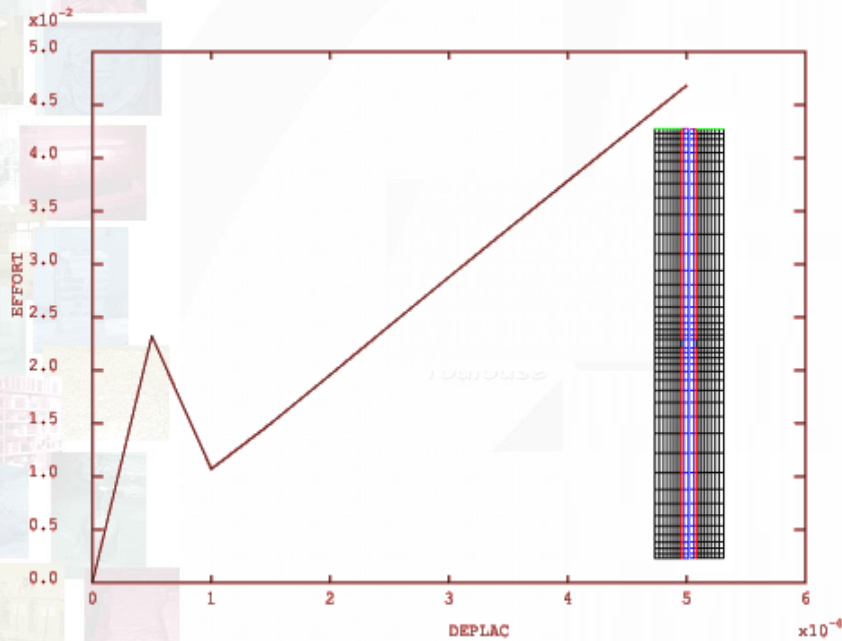


Solution Armatures réparties (Helmholtz)



Solution Armatures et interfaces maillées

Solution Armatures réparties (Helmholtz)

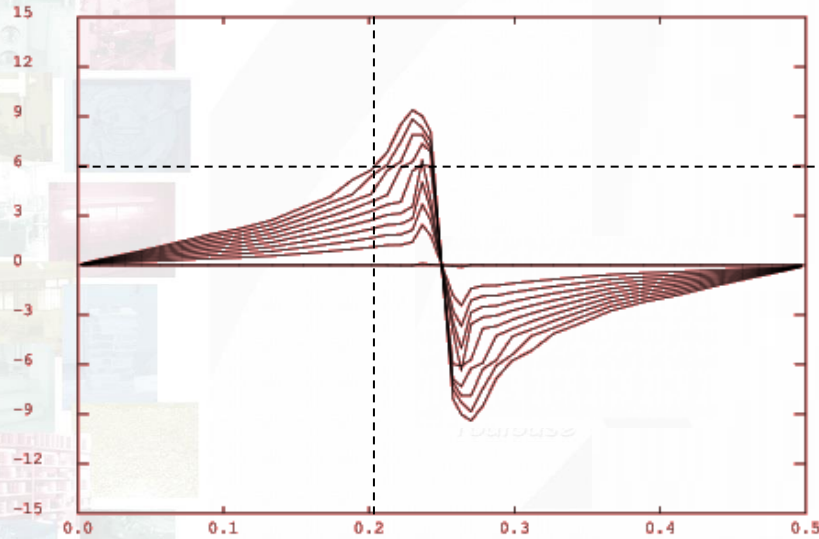


CAST3M FECIT

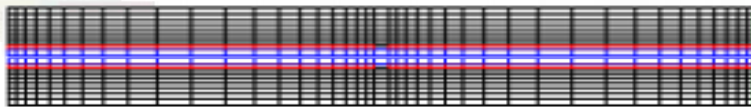
CAST3M FECIT

Concordance des relations force-déplacement imposé

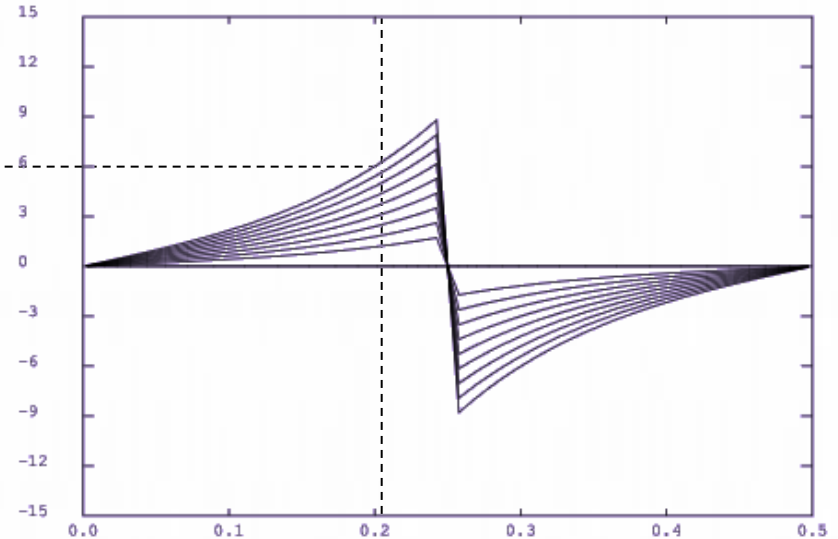
Solution Armatures et interfaces maillées



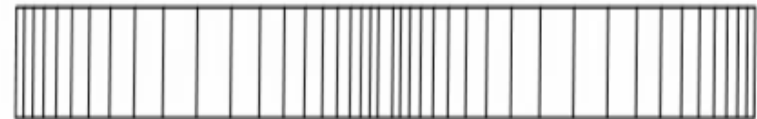
tau pour phi:PHI0



Solution Armatures réparties (Helmholtz)



tau pour phi:PHI0



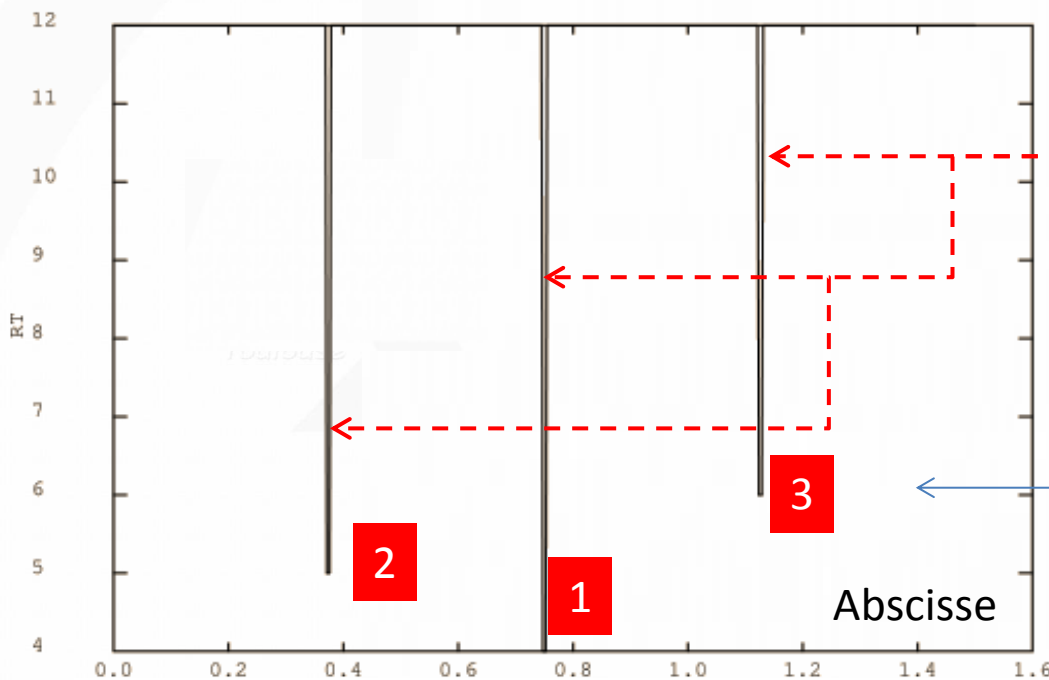
Concordance des contraintes de cisaillement (sauf au voisinage immédiat de la fissure)

Cas d'une fissuration multiple imposée

Maillage complet avec interface



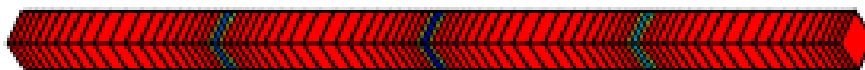
Résistance de la matrice



3 sections affaiblies

Ordre d'apparition
des fissures

Evolut

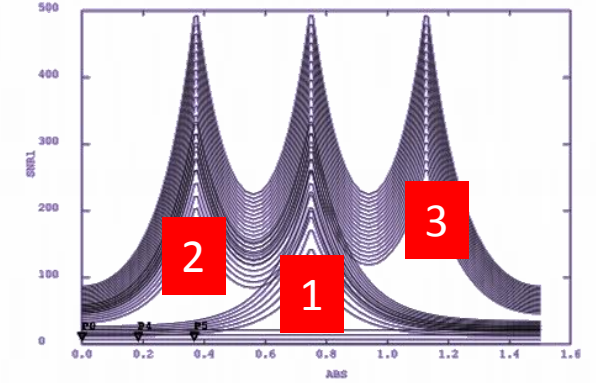
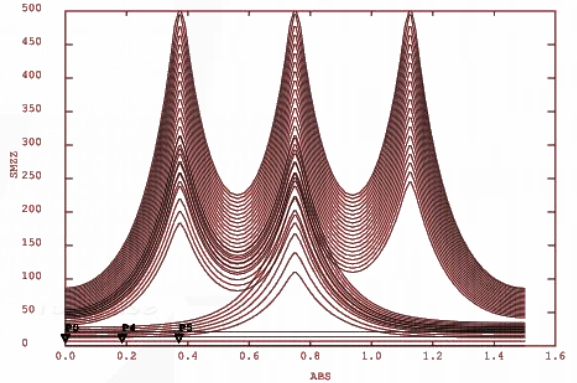


Maillage BA homogénéisé + « Helmholtz »

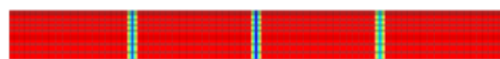
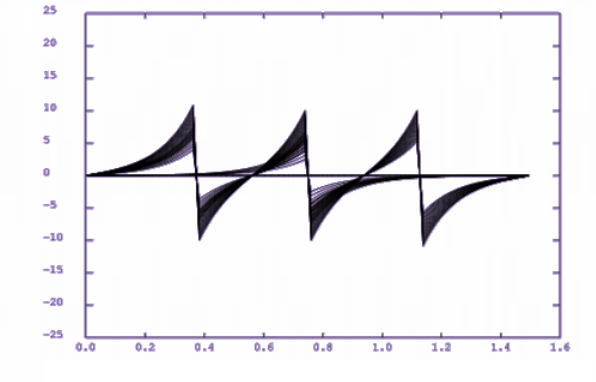
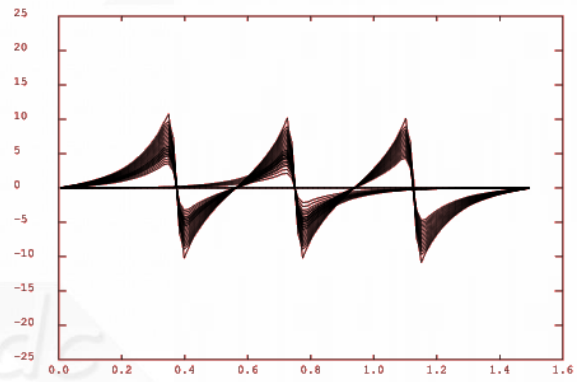
Force déplacement



Contrainte dans l'acier à chaque pas



Contrainte de cisailement à l'interface à chaque pas



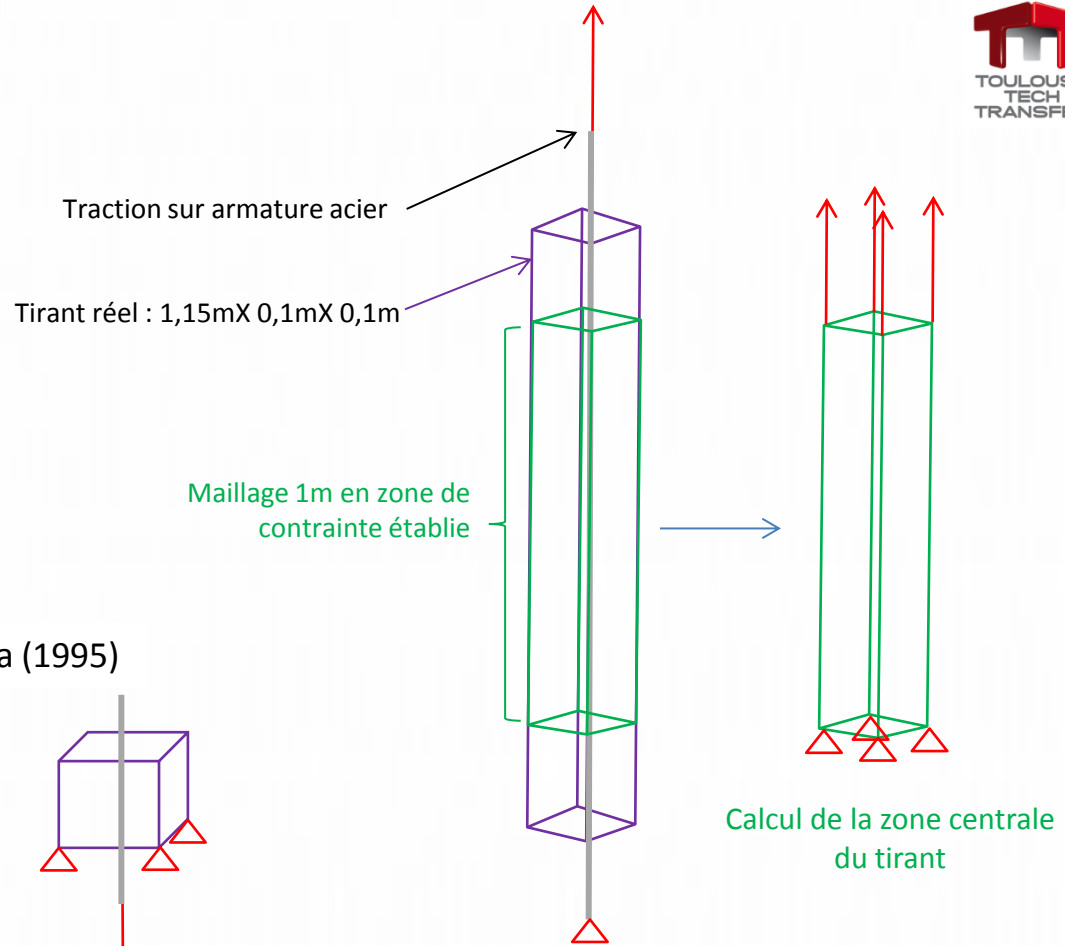
Applications de la formulation d'Helmholtz

1. Limiteur de localisation
2. Effet d'échelle probabiliste
3. Modélisation simplifiée pour la liaison acier béton
4. **Etude de cas : combinaison des Formulations de liaison acier béton et d'effet d'échelle probabiliste pour le calcul d'un tirant en béton armé**

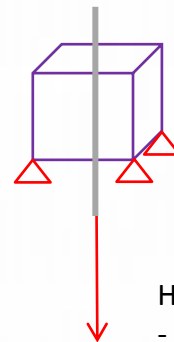
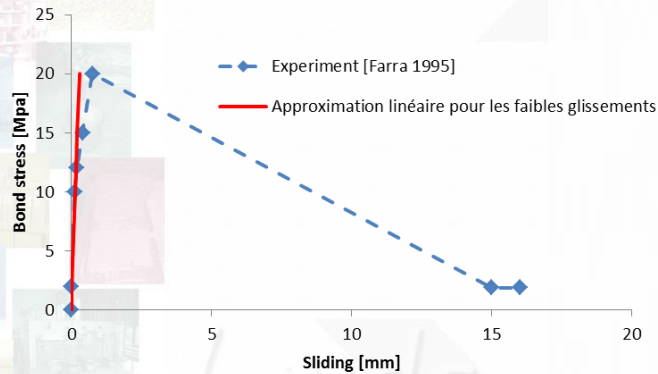
 **MODÉLISATION MULTI-PHYSIQUE**
Matériaux composites à matrice fragile
pour le BTP-Génie Civil



Paramètres	Valeur	Unité
lc WL2	0,5	m
m Weibull	24	-
H	90000	Mpa/m
Ds	0.01	M
As	7.854E-05	M2
Ec	30400	Mpa
ν c	0.2	-
Rt 1ere fissure	2.6	Mpa
Rc	56.9	Mpa
Gf	0.01	MJ/m2
A tirant	0.01	m2
Ac	0.00992146	m2
rhos	0.79%	



Paramètres mécaniques du tirant de Farra (1995)



Hypothèses complémentaires

- Simulation de la zone centrale seulement
- Coefficient de variation de R_t 7.5%
- L_c Weibull 0,5m
- Variation déterministe périodique 2% avec $\lambda=10$ cm

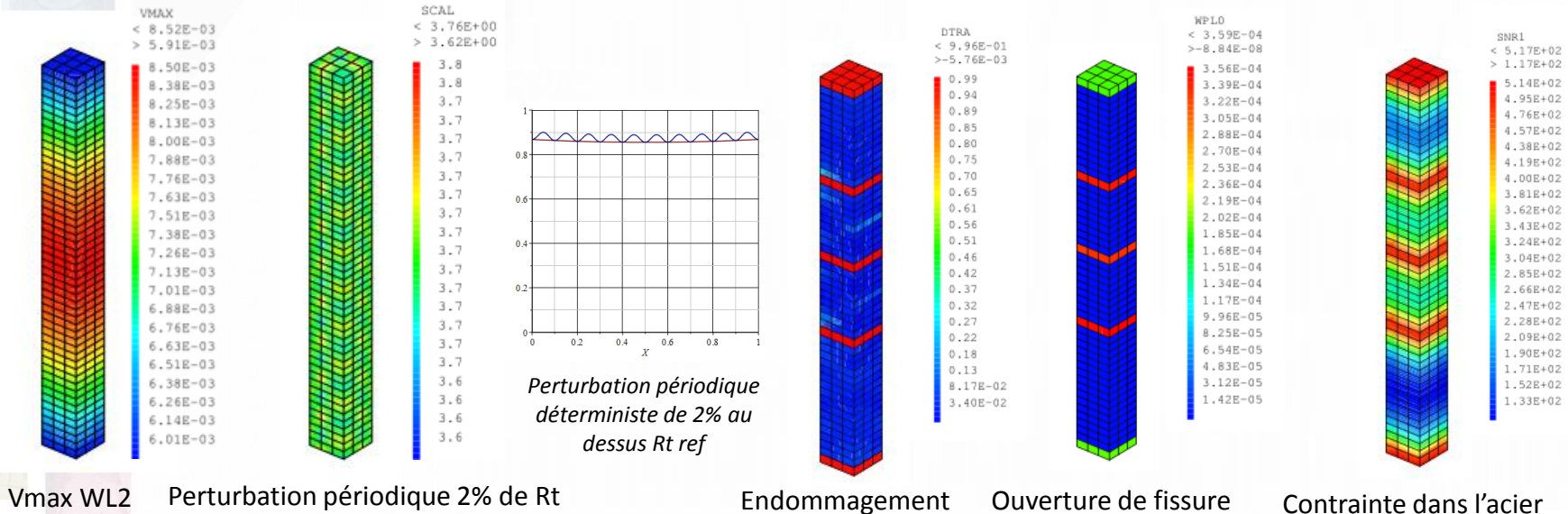
Approximation Rigidité des interfaces issue de l'essai Pull-Out

$$\alpha - \left(\frac{l_c^2}{2}\right) \Delta\alpha = V_{\max} \cdot \left(\frac{\sigma}{R_t/V_{ref}}\right)^m$$

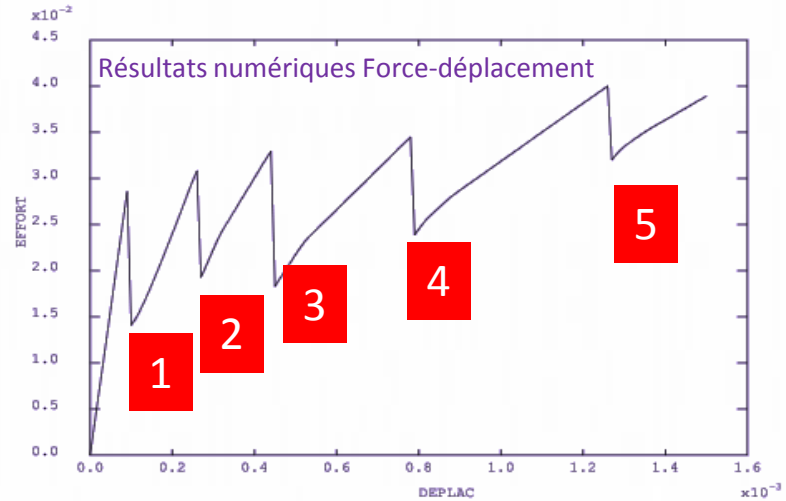
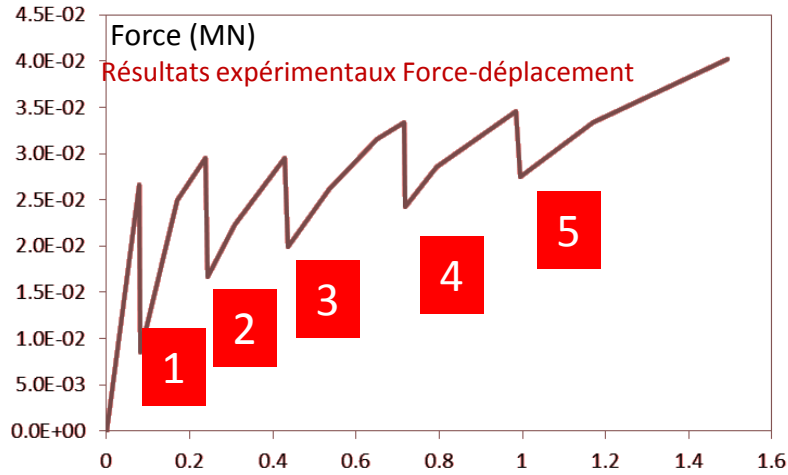
$$\varepsilon_s - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \varepsilon_s = f(\varepsilon_c, \varepsilon_s^a)$$

Champs donnés Vmax et Perturbation déterministe de Rt au-dessus Rt ref

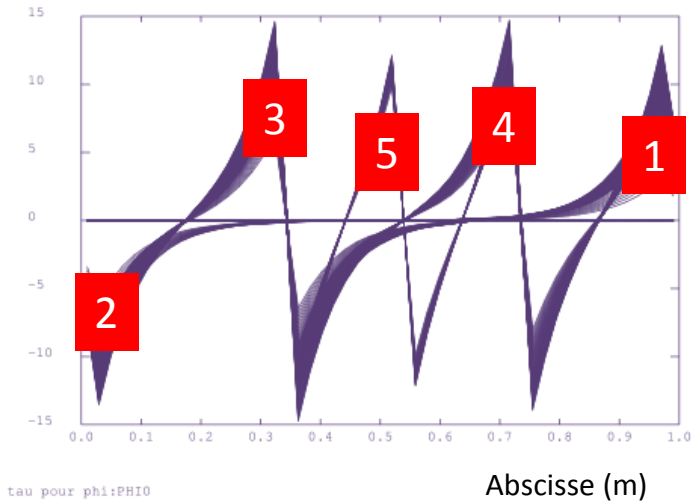
Résultats ; Endommagement, ouverture des fissures, contraintes acier



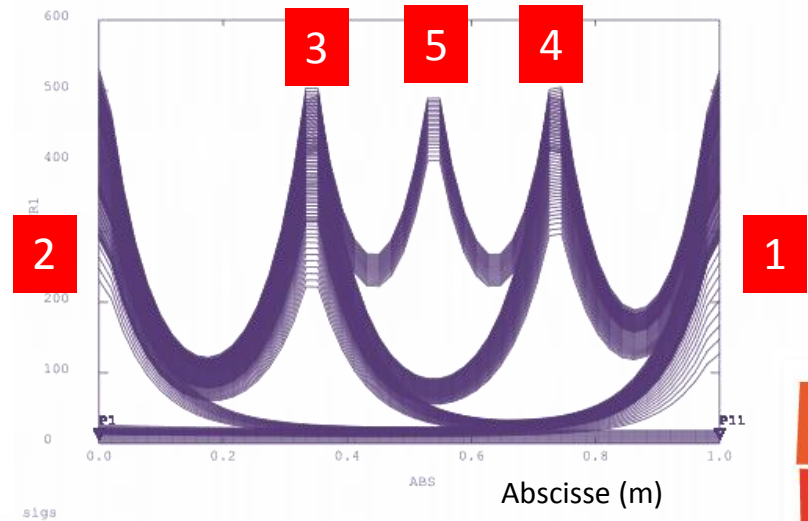
Helmholtz pour WL2 + Helmholtz pour glissement acier béton + perturbation périodique déterministe de 2% Rt de référence



Contrainte de cisaillement à l'interface (MPa)



Contrainte dans l'acier (MPa)

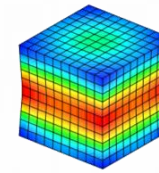


Chronologie de la contrainte de cisaillement renfort matrice

Chronologie de la contrainte dans le renfort

- **Limiteur de localisation** (méthode du 2nd gradient)

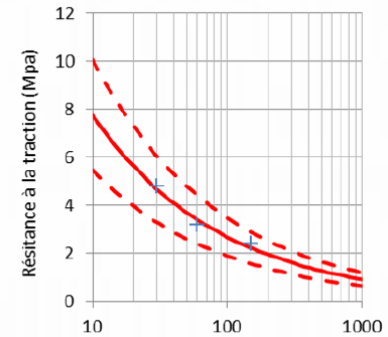
$$\langle \tilde{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{(l_c \sqrt{2\pi})^3} \int \tilde{\varepsilon} \psi dx \quad \Leftrightarrow \quad \langle \tilde{\varepsilon} \rangle - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \langle \tilde{\varepsilon} \rangle = \tilde{\varepsilon}$$



Endommagement non-local

- **Effet d'échelle probabiliste** par méthode de Weibull modifiée (WL2)

Effet d'échelle de Weibull

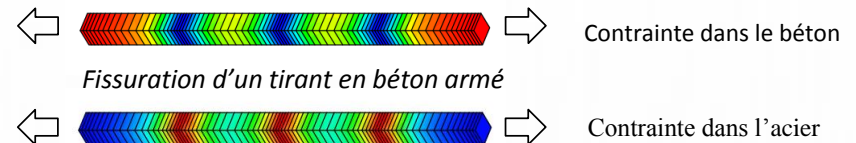


$$\ln(1 - Pf_{V/M}) = \int_V \frac{\ln(1 - Pf_{ref})}{V_{ref}} \psi(l/l_c) dV \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \alpha = f(\sigma, Rt, CVRt)$$

- **Glissement acier béton** (PI Université de Toulouse TTT)



$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_s - \frac{l_c^2}{2} \nabla^2 \varepsilon_s = f(\varepsilon_c, \varepsilon_s^a)$$



Lignes de commande permettant de lancer le calcul en non local avec Helmholtz

```
MOD1 = MODE VOLTOT MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ... 'NON_LOCAL' 'HELM' 'V_MOYENNE' ('MOTS' '...' );
```

```
mat1 = MATE mod1 YOUN youngn NU ... LCAR ... LCF1 ... LCF2 ... LCF3... LCF4 ... LCF5 ... ;
```

Traitement numérique non local de phénomènes physiques par l'équation d'Helmholtz : les effets d'échelle et le glissement renfort-matrice

Alain Sellier (1)



Alain Millard (2)



Merci pour votre attention

¹ LMDC, INSA/UPS Génie Civil, 135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 04 France.

²CEA DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S, bâtiment 607 - CEN Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex