

@Torsion, une procédure CAST3M
dédiée aux calculs E.F. poutres.
Théorie et programmation GIBIANE

Laurent GORNET

GeM UMR CNRS 6183

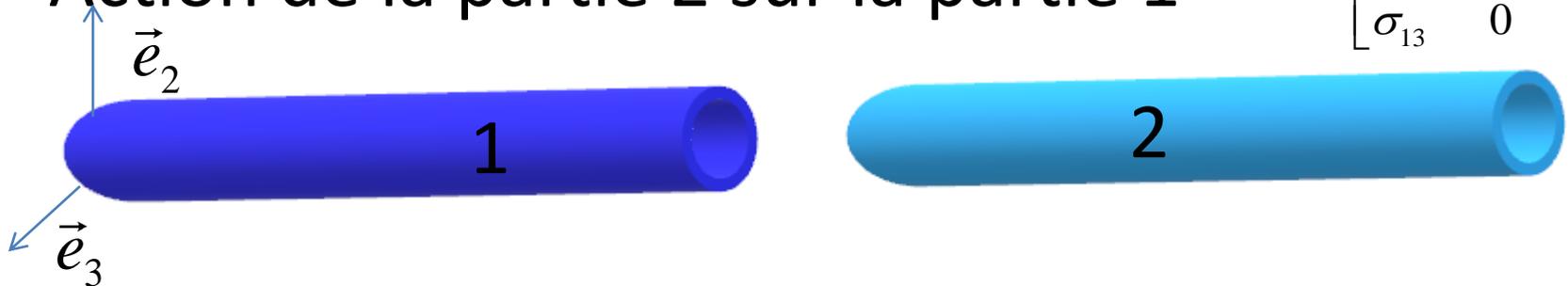
Objectif de l'étude

- Faciliter le calcul éléments finis des poutres
- Créer une procédure automatique pour caractériser les propriétés mécaniques des sections de poutres : @Torsion
- Bibliographie :
 - *Mécanique du continu, J. Salençon*
 - *Poutres et arcs élastiques, P. Ballard, A. Millard*

Contraintes intégrées

- Action de la partie 2 sur la partie 1

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- Composantes du torseur au CDG de la section

– Effort normal et efforts tranchants $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$

– Moment de torsion, moments de flexion $\vec{M}_{G 2 \rightarrow 1}$

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \int_s \bar{\sigma}(M) \vec{e}_1 ds$$

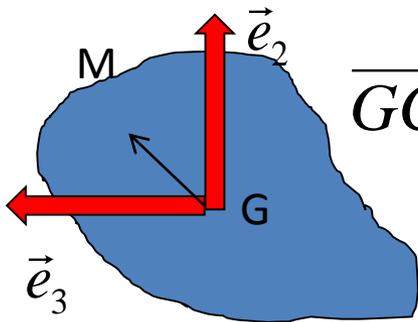
$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = N(x_1) \vec{e}_1 + T_2(x_1) \vec{e}_2 + T_3(x_1) \vec{e}_3$$

$$\vec{M}_{G 2 \rightarrow 1} = \int_s \overrightarrow{GM} \wedge \bar{\sigma}(M) \vec{e}_1 ds$$

$$\vec{M}_{G 2 \rightarrow 1} = M_1(x_1) \vec{e}_1 + M_2(x_1) \vec{e}_2 + M_3(x_1) \vec{e}_3$$

Comportement isotrope dans la base principale

- Torsion autour axe \vec{e}_1 $M_1(x_1) = G J \frac{d\theta_1(x_1)}{dx_1} - z_c T_2(x_1) + y_c T_3(x_1)$
- Flexion autour axe \vec{e}_2 $M_2(x_1) = E I_2 \frac{d\theta_2(x_1)}{dx_1}$
- Flexion autour axe \vec{e}_3 $M_3(x_1) = E I_3 \frac{d\theta_3(x_1)}{dx_1}$
- Traction/compression \vec{e}_1 $N(x_1) = E S \frac{du(x_1)}{dx_1}$
- Effort tranchant \vec{e}_2
- Effort tranchant \vec{e}_3



$$\overrightarrow{GC} = y_c \vec{e}_2 + z_c \vec{e}_3$$

$$T_2(x_1) = k'_2 GS \left(-\theta_3(x_1) + \frac{dv(x_1)}{dx_1} - z_c \frac{d\theta_1}{dx_1} \right)$$

$$T_3(x_1) = k'_3 GS \left(\theta_2(x_1) + \frac{dw(x_1)}{dx_1} + y_c \frac{d\theta_1}{dx_1} \right)$$

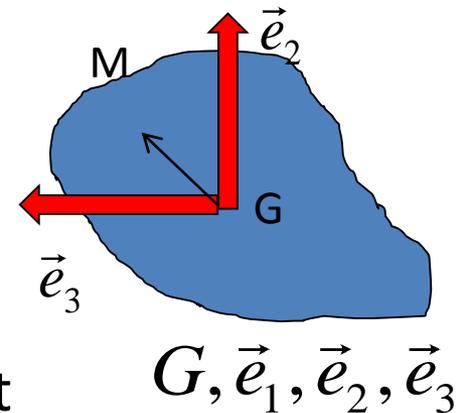
Contraintes

- Dans la base principale

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{N(x_1)}{S} - \frac{M_3(x_1)}{I_3} x_2 + \frac{M_2(x_1)}{I_2} x_3$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = k_3 \frac{T_3(x)}{S} \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = k_2 \frac{T_2(x)}{S}$$

$$\vec{GM} = x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$



- Sections réduites $k_i^{-1} S$

- Répartition des contraintes de cisaillement
- Section rectangulaire $k_2 = k_3 = 4/3$
- Section circulaire $k_2 = k_3 = 3/2$

Plan

- Développement de @Torsion
 - De la théorie à la programmation en GIBI
- Exemples de validation
 - Triangles, rectangles, L, C ...
- Calcul d'une poutre Naca
- Conclusion

@Torsion

- Les données : surface, contour
- Résultats :
 - Aire, le Centre de Gravité PG
 - Moments quadratiques
 - Base principale, Moments quadratiques principaux
 - Gauchissement de torsion $G(x,y)$
 - Rigidité de torsion J et centre de torsion PC
- Gauchissements longitudinal $GL(x,y)$
 - Coefficients de corrections de cisaillement

Caractéristiques géométriques des sections

- Théories classiques : Gauchissements
 - Torsion: G , répartition du cisaillement : GL
- Solutions analytiques : Sections massives
 - Section circulaire pleine
 - Section rectangulaire, triangulaire
- Solutions analytiques : Sections minces
 - Section mince ouverte
 - Section mince fermée

Propriétés géométriques

$$I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$$

$$S, I_2, I_3$$

Caractéristiques géométriques des sections

- Centre de gravité: **G**
- Centre de torsion : **C**

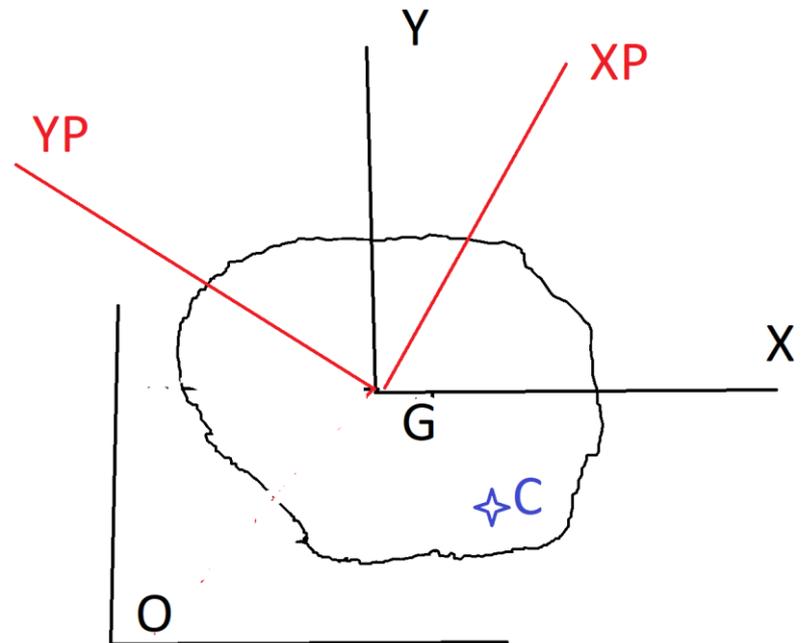
$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y_o \, dy \, dz$$

$$z_G = \frac{1}{S} \int_S z_o \, dy \, dz$$

$$\overrightarrow{GM} = y \, \vec{y} + z \, \vec{z}$$

$$\overrightarrow{OM} = y_o \, \vec{y} + z_o \, \vec{z}$$

$$\overrightarrow{GC} = y_c \, \vec{y} + z_c \, \vec{z}$$



Caractéristiques géométriques centre de gravité

- Programmation du centre de gravité G

- MODE, MATE

- Les coordonnées des points

- COOR

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y_o \, dy \, dz$$

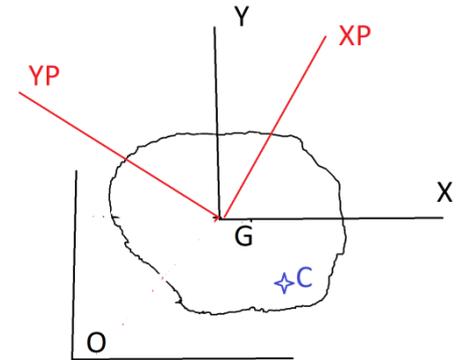
- Intégrer sur la section

- CHAN, INTG

$$z_G = \frac{1}{S} \int_S z_o \, dy \, dz$$

Surface et centre de gravite

```
MODL1 = MODE MAIL1 THERMIQUE ISOTROPE;
MAT1 = MATE MODL1 'K' 1.;
CND1 = CONDUCTIVITE MODL1 MAT1;
```



```
XX = COOR 1 MAIL1; YY = COOR 2 MAIL1;
ZER = XX * 0.; UNI = ZER + 1.; UNIM = CHAN 'CHAM' UNI MAIL1;
```

* Aire de la surface, MESU

```
SS = INTG MODL1 UNIM;
```



```
XXM = CHAN 'CHAM' XX MAIL1; YYM = CHAN 'CHAM' YY MAIL1;
```

* Coordonnées du CDG : G

```
XG = (1./SS) * (INTG MODL1 XXM);
```

```
YG = (1./SS) * (INTG MODL1 YYM);
```



```
XXG = XX - XG;
```

```
YYG = YY - YG;
```

Caractéristiques géométriques

Moments quadratiques

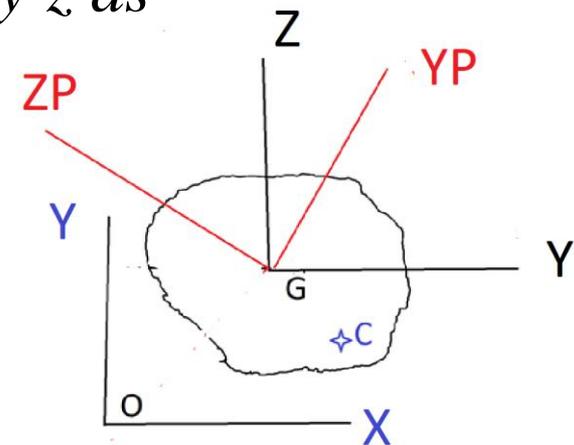
- Moments quadratique dans la base globale

$$I_{G_y} = \int_S z^2 ds \quad I_{G_z} = \int_S y^2 ds \quad I_{G_{yz}} = \int_S y z ds$$

$$\begin{bmatrix} I_{G_y} & I_{G_{yz}} \\ I_{G_{yz}} & I_{G_z} \end{bmatrix}_{G \bar{y} \bar{z}}$$

Diagonalisation

$$\begin{bmatrix} I_{G_{Yp}} & 0 \\ 0 & I_{G_{Zp}} \end{bmatrix}_{G \bar{Y}_p \bar{Z}_p}$$



- Moments quadratique dans la **base principale**
- Operateurs : - , **COOR, CHAN, INTG,***

Propriétés en torsion

$$J, x_c, y_c$$

Fonction de Gauchissement

Etat anti plan de contrainte

- Contraintes d'un état de torsion

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\vec{x}} \bar{\sigma} \bar{\vec{x}} & \left(\bar{\Pi} \bar{\sigma} \bar{\vec{x}} \right)^T \\ \bar{\Pi} \bar{\sigma} \bar{\vec{x}} & \bar{\Pi} \bar{\sigma} \bar{\Pi} \end{bmatrix}$$

- Comportement isotrope

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz}$$

$$\bar{\Pi} \bar{\sigma} \bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Pi} \bar{\sigma} \bar{\vec{x}} = \sigma_{xy} \vec{y} + \sigma_{xz} \vec{z}$$

Torsion d'une poutre isotrope

Fonction de Gauchissement $G(y, z)$

- **Approche cinématique** : torsion axe x
- Déplacement, déformation, contrainte

$$\vec{U}(M) = (\alpha x) \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} + \alpha G(y, z) \vec{x} \quad \alpha = \frac{d\theta_x(x)}{dx}$$

- Equations d'équilibre $\overrightarrow{\text{div}}(\overline{\overline{\sigma}}) = \vec{0} \quad \text{sur } \Omega$

– Condition bord libre $\overline{\overline{\sigma}} \vec{n}_{ex} = \vec{0} \quad \text{sur } \partial\Omega$

$$\overline{\overline{\Pi\sigma}} \vec{x} = G \alpha \left(\overrightarrow{\text{grad}}(G(y, z)) + \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right)$$

Fonction de Gauchissement $G(y, z)$

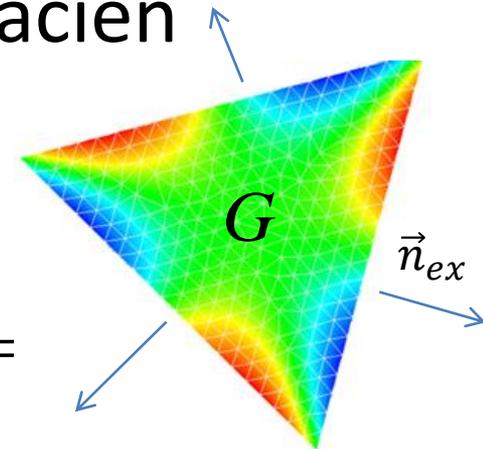
- **Approche cinématique** : matériau isotrope
- Equation d'équilibre isotrope : Laplacien

$$\Delta G = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

- Condition bord libre : $\left(\overline{\Pi \sigma} \vec{x} \right) \cdot \vec{n}_{ex} =$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(G) \vec{n}_{ex} = - \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right) \vec{n}_{ex} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

- Condition d'unicité au CDG : $\int_S G \, dS = 0$

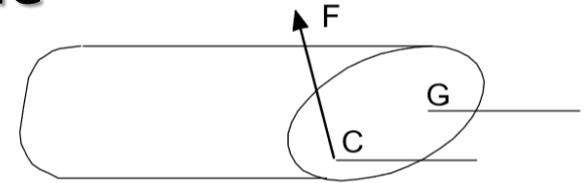


Centre de torsion

Approche cinématique

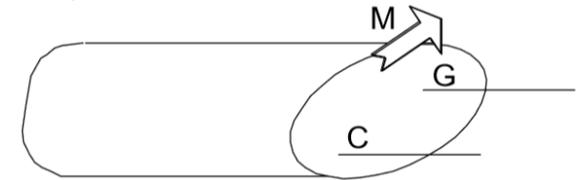
Travaux : Maxwell Betti

- $W (\text{char1} * \text{dépla2}) = W (\text{char2} * \text{dépla1})$



Chargement 1:

- Un effort F au centre de torsion



Chargement 2:

- Un moment de torsion au centre de gravité

• Position du centre de torsion base principale

$$y_c = -\frac{1}{I_y} \int_S z G dS \qquad z_c = \frac{1}{I_z} \int_S y G dS$$

Rigidité de torsion

- Moment de torsion poutre

$$\overrightarrow{M}_G \vec{x} = \mathbf{GJ} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + y_c T_z(x) - z_c T_y(x)$$

- La rigidité de torsion

$$D_u = \mathbf{G} \int_S \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right) \left(\overrightarrow{grad}(\mathbf{G}) + \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right) dS$$

- Rigidité en contrainte et en déplacement

$$D_\sigma \leq \mathbf{GJ} \leq D_u$$

Fonction de torsion φ

Analogie avec la thermique

- **Approche en contrainte:** matériau isotrope

– Fonction de torsion

$$\vec{M}_G \vec{x} = \mathbf{G} D_\sigma \alpha$$

$$\alpha = \frac{d\theta_x(x)}{dx}$$

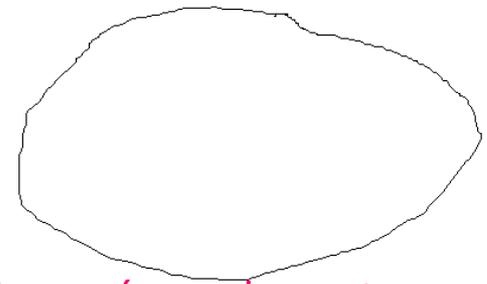
$$D_\sigma = \int_S \overrightarrow{\text{grad}}^2 \varphi dS$$

- **Problème de thermique**

– **domaine simplement connexe**

$$\Delta \varphi = -2 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial_{\text{ext}} \Omega$$



Température imposée sur le contour

Fonction de torsion φ

Instructions Cast3M

MOD1 = MODE SURF1 'THERMIQUE' 'ISOTROPE' ;

MAT = MATE MOD1 'K' 1. ;

SOU = SOUR MOD1 SURF1 -2.;

* CALCUL DE LA MATRICE DE LA CONDUCTIVITE

CON = COND MOD1 MAT ;

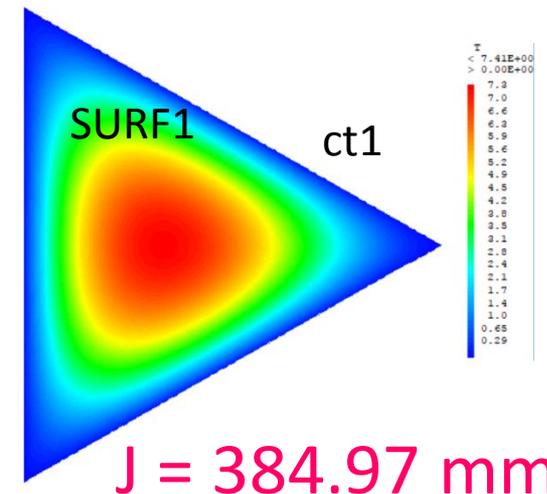
* TEMPERATURE IMPOSEE SUR BORD Zéro

BLT = BLOQ ct1 'T' ;

* APPEL AU SOLVEUR : Calcul TEMPERATURES

TCON1 = RESO (CON ET BLT) SOU ;

Hauteur : a= 10 mm



Fonction de torsion φ

Instructions Cast3M

*Fonction de Torsion

```
TRAC TCON1 ct1 'TITR' 'Fct de Torsion' ;
```

```
TRAC TCON1 surf1 ct1 'TITR' 'Fct de Torsion' ;
```

* Calcul de la rigidité

```
TG = GRAD MOD1 TCON1 ; TG2 = TG * TG MOD1;
```

```
DS1 = INTG MOD1 TG2 'T,X' ;
```

```
DS2 = INTG MOD1 TG2 'T,Y' ;
```

```
DS = DS1 + DS2; MESS 'Rigidite J : ' DS ;
```

Fonction de Gauchissement $G(y, z)$

Analogie avec la thermique

- Approche en déplacement : matériau isotrope

$$\Delta G = 0 \quad \text{sur } \Omega$$



$$\overrightarrow{\text{grad}}(G) \vec{n}_{ex} = -(\vec{x} \wedge \overrightarrow{GM}) \vec{n}_{ex} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\text{div}(\vec{q}) + r = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\vec{q} = -\overline{\lambda} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

$$\overline{\lambda} = -\lambda \overline{1}$$

$$T = T_D \quad \text{sur } \partial_T \Omega$$

$$\vec{q} \vec{n}_{ex} = \Phi_D$$

$$J = \int_S \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(G) + \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right) dS$$

- Opérateurs:

– Maillage : DROI, CERC, SURF, DALLER

– Modèle, rigidité : MODE, MATE, CONDU

– Conditions limites : COOR, FLUX, BLOQ, DEPI

– Résolution et graphiques : RESOU, TRAC

$$\int_S G dS = 0$$

Bloquer un point de la section et calculer la constante

Plan

- Développement de @Torsion
 - De la théorie à la programmation en GIBI
- Exemples de validation
 - Triangles, rectangles, L, C ...
- Calcul de poutre
- Conclusion

Propriétés de torsion du triangle

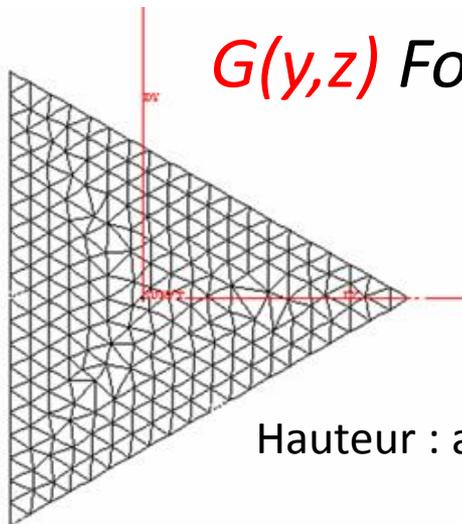
- Raideur de torsion : $J = 385.98 \text{ mm}^4$
- Raideur de torsion théorique : $J_t = 384.90 \text{ mm}^4$

Erreur : $(J - J_t) / J_t = 0.28031 \%$

$G(y,z)$ Fonction de Gauchissement

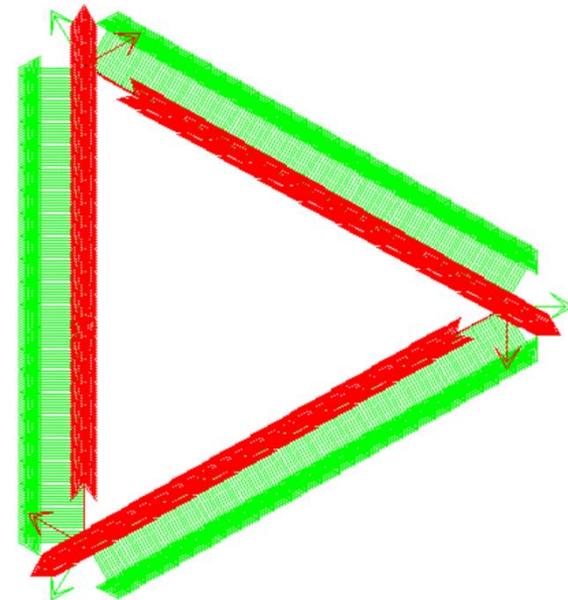
$$J = \frac{a^3}{15\sqrt{3}}$$

@Frenet



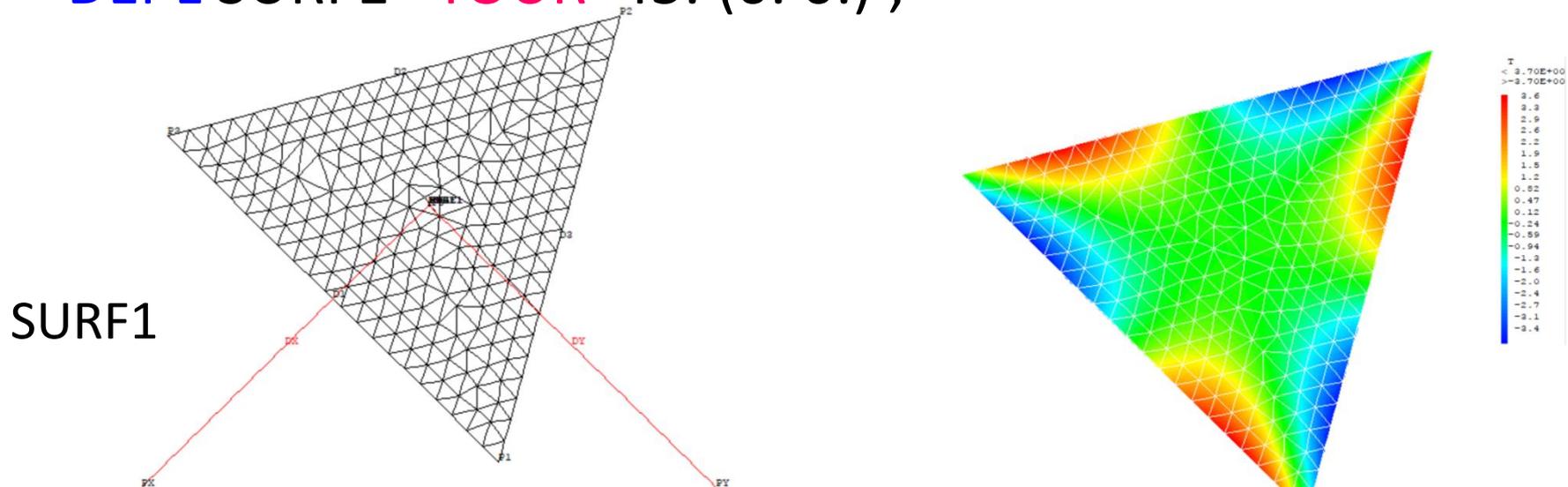
Hauteur : $a = 10 \text{ mm}$

Conclusion : raffiner le maillage



Moments quadratiques

- $I_{XP} = I_{YP} = 320.75 \text{ mm}^4$ $J = 385.98 \text{ mm}^4$
- Vérifications : déplacer la section
 DEPL SURF1 'PLUS' (10 20);
 DEPL SURF1 'TOUR' 45. (0. 0.) ;



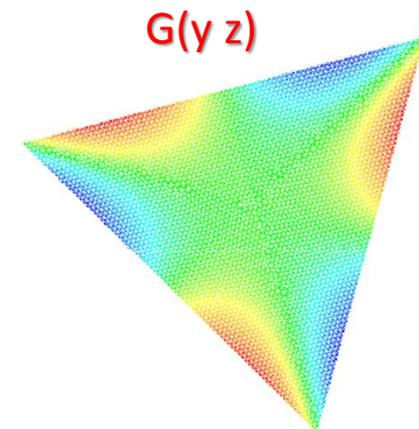
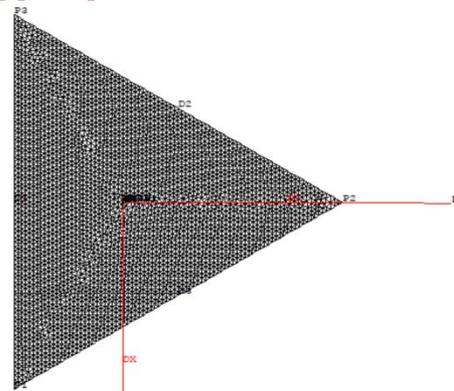
Propriété de torsion du triangle

- $I_{XP} = I_{YP} = 320.75 \text{ mm}^4$
- Raideur de torsion : $J = 384.97 \text{ mm}^4$
- Raideur de torsion théorique : $J_t = 384.90 \text{ mm}^4$

Erreur : $(J - J_t) / J_t = 1.76754 \text{E-}02 \text{ \%}$

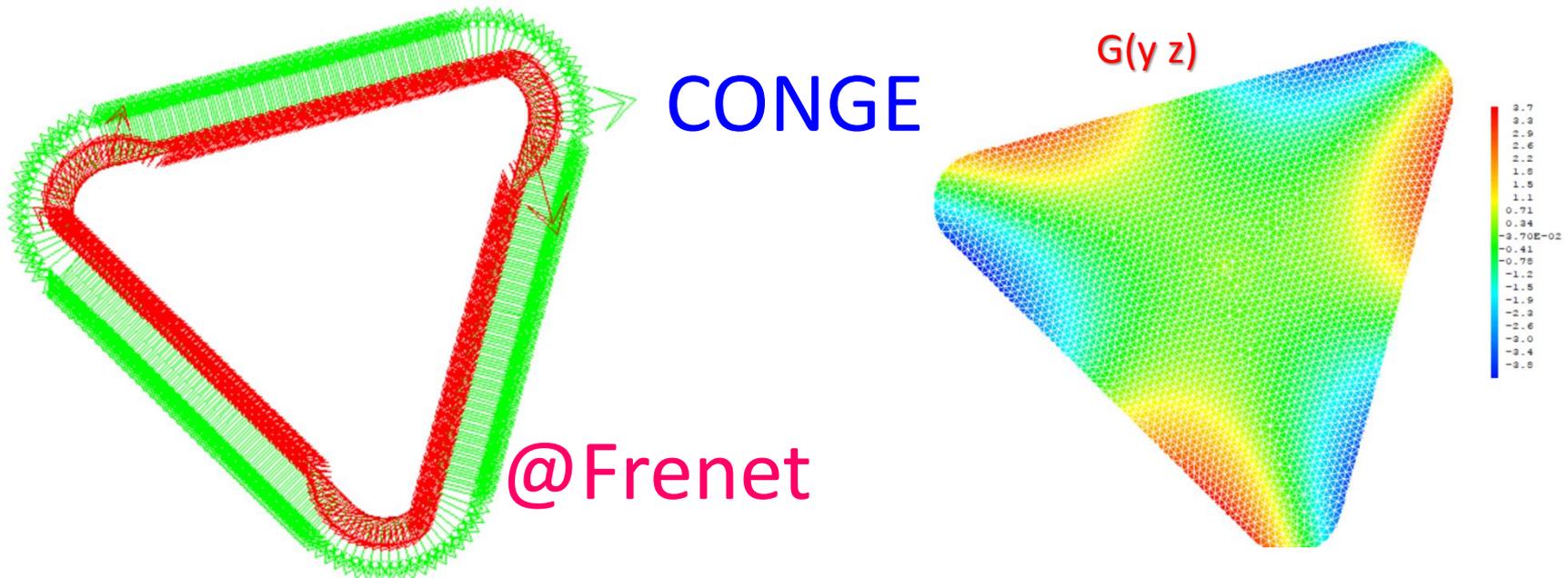
- Maillage raffiné par 4

$$J = \frac{a^3}{15\sqrt{3}}$$



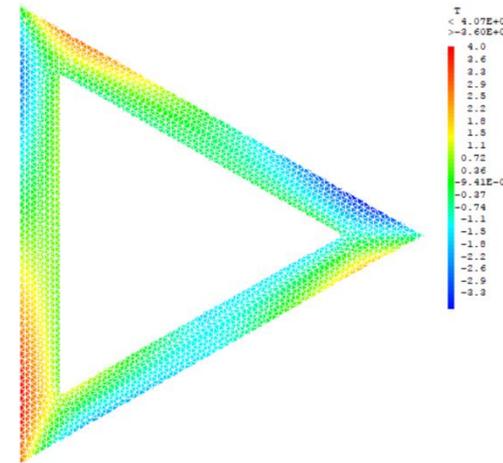
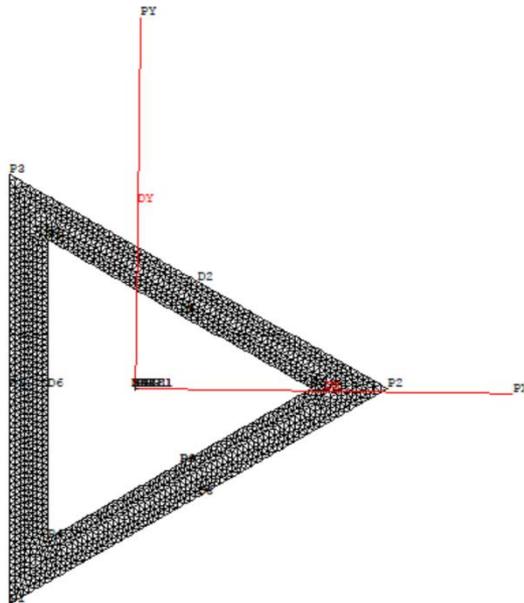
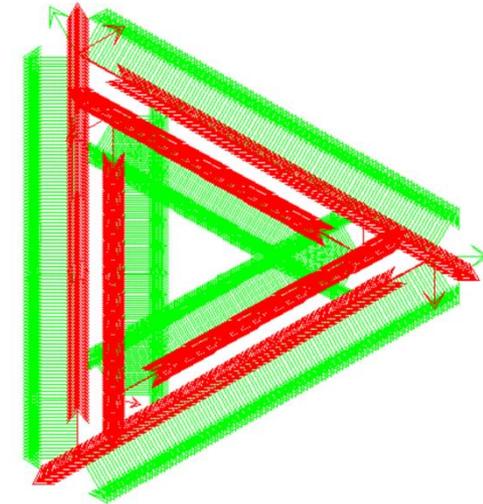
Propriétés du triangle avec congés

- $I_{XP} = I_{YP} = 284.44 \text{ mm}^4$
- Raideur de torsion : $J = 383.79 \text{ mm}^4$
 - Erreur : -0.28950 % (avec théorique sans congé)



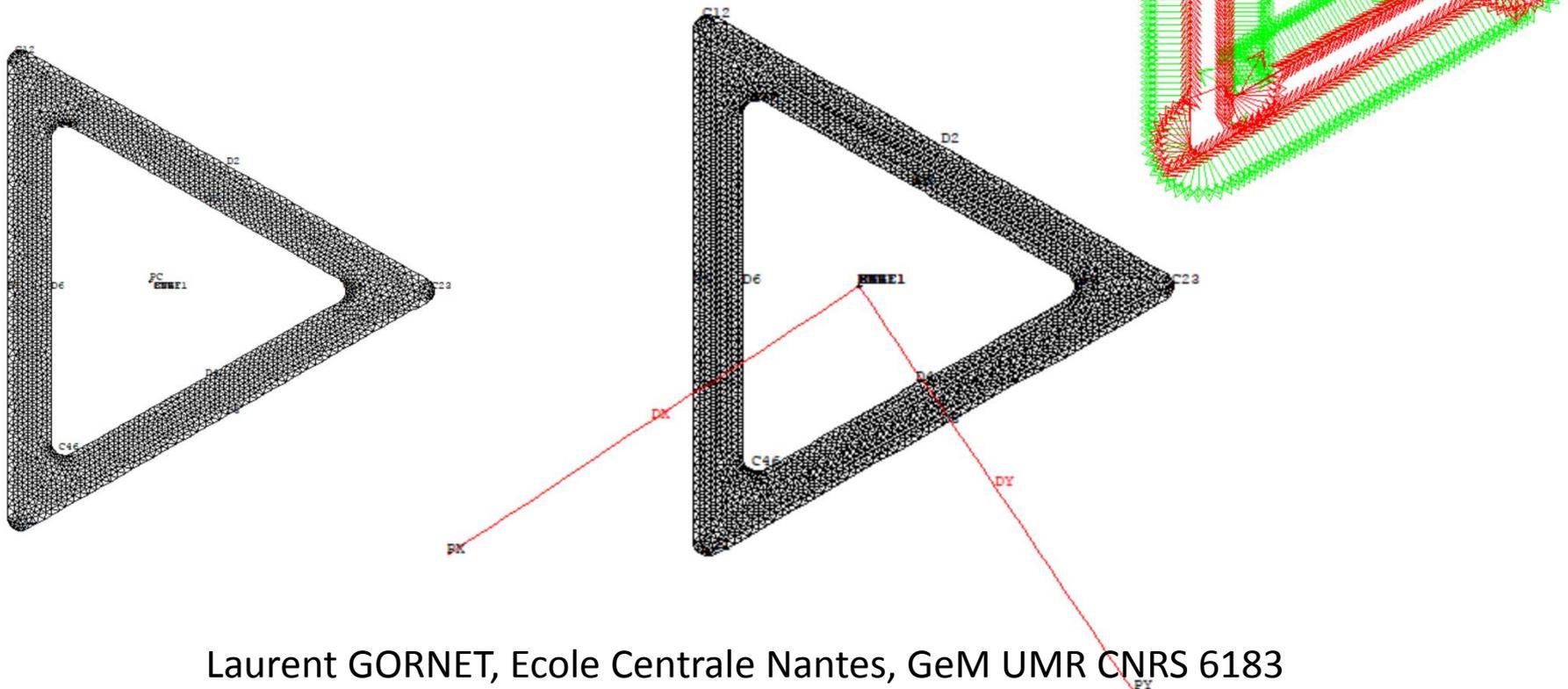
Section creuse triangle

- Rigidité théorique : $J_t = 267,04\text{mm}^4$
- Rigidité EF : $J = 292,49\text{mm}^4$
- Erreur -8,7 %



Section creuse avec congés

- Rigidité EF : $J = 273,43 \text{ mm}^4$
- Position du Centre de torsion : $G = C$



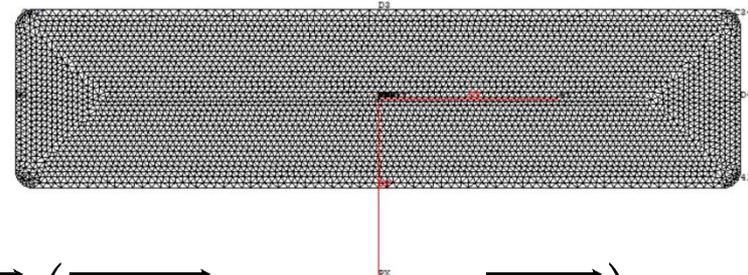
Section : rectangle

- Hauteur : $h = 10 \text{ mm}$, Largeur : $b = 40 \text{ mm}$
- Sans congé :

- $I_x = b h^3 / 12 = 3333,3 \text{ mm}^4$

- $I_y = h b^3 / 12 = 53333 \text{ mm}^4$

- $J_t = 11233 \text{ mm}^4$



$$J = \int_S \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\mathbf{G}) + \vec{x} \wedge \overrightarrow{GM} \right) dS$$

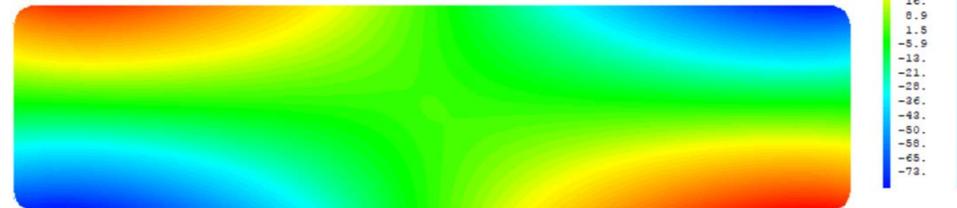
- Solution EF Cast3M avec ^Scongés :

- $I_x = b h^3 / 12 = 3313,7 \text{ mm}^4$

- $I_y = h b^3 / 12 = 52998 \text{ mm}^4$

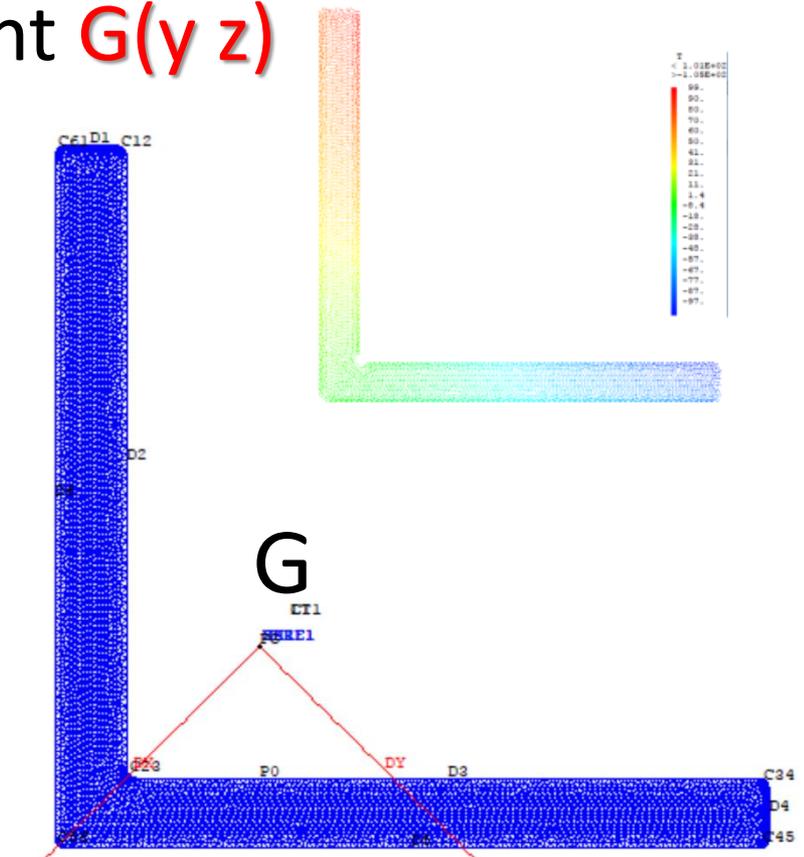
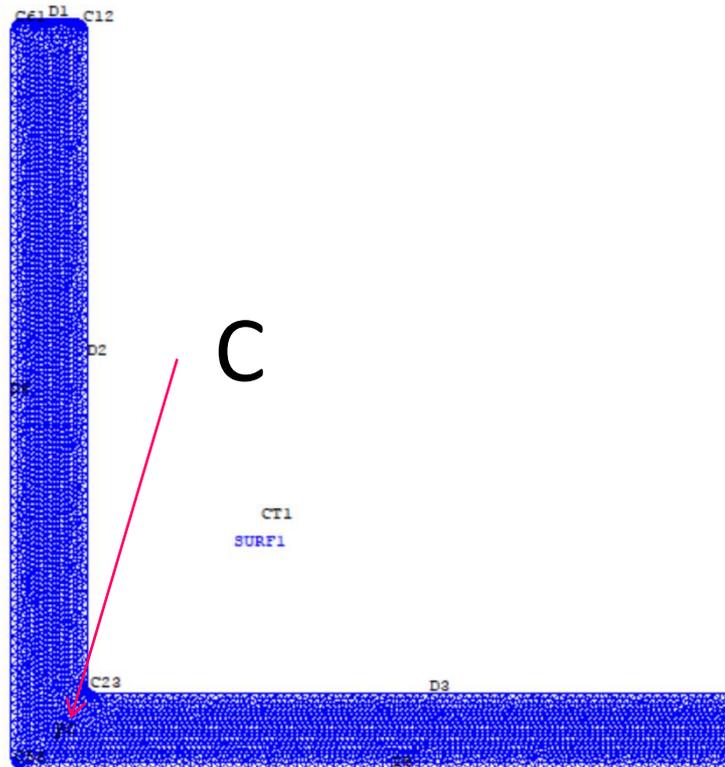
- $J = 11673 \text{ mm}^4$

- $G = C$



Section : L

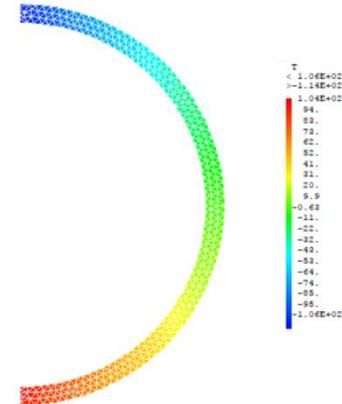
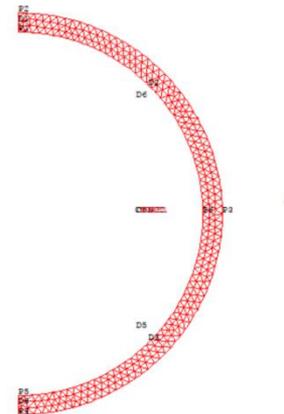
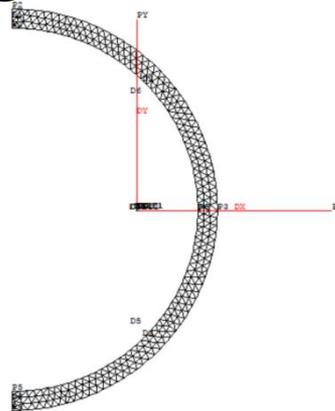
- Centre de torsion, Centre de gravité
- Fonction de gauchissement $G(y, z)$



Section : C

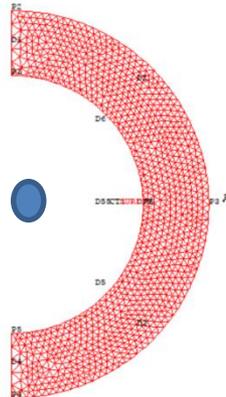
– Section Mince

$$\|\vec{OC}\| = \frac{2 e R^4}{I_3}$$



– Section épaisse

Origine de la géométrie : 0, 0



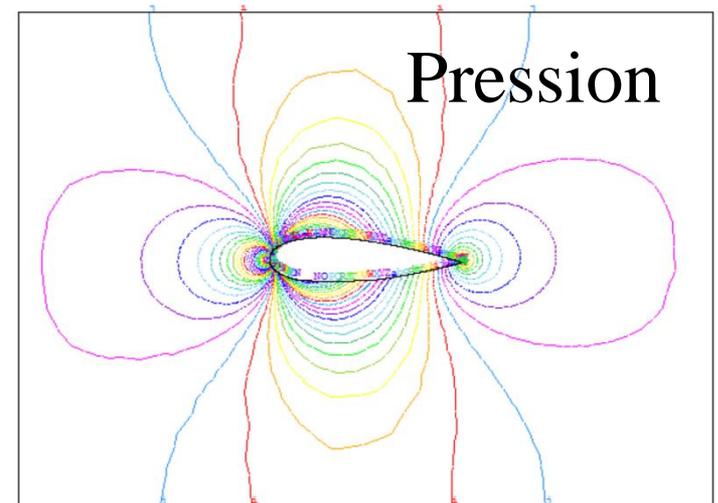
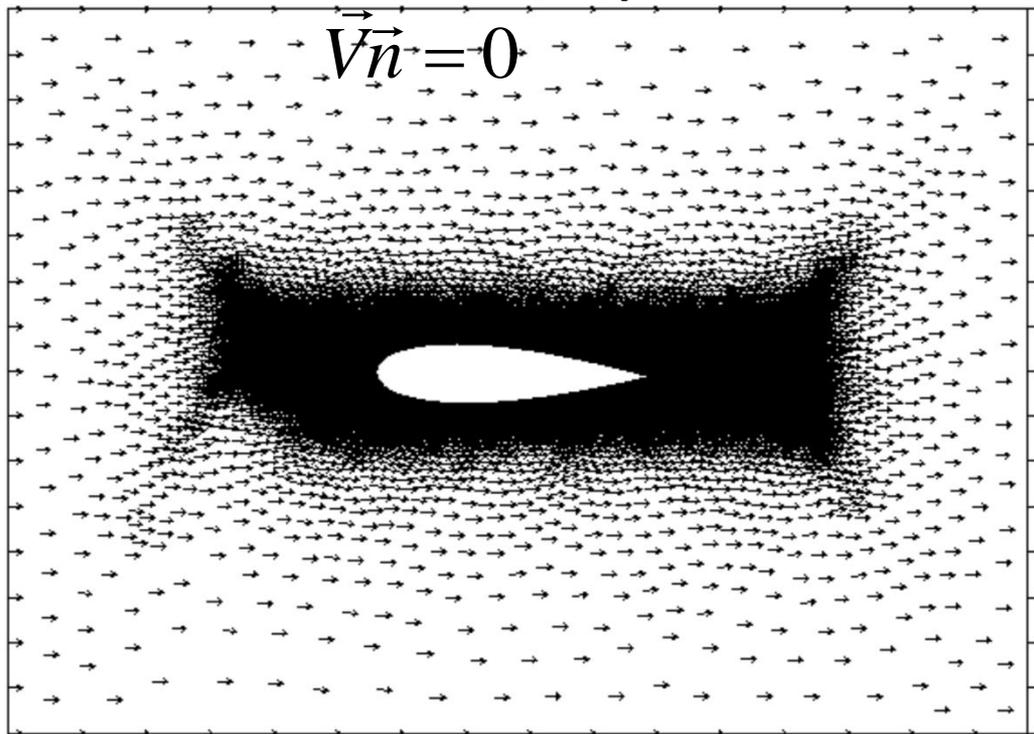
$$\|\vec{OC}\| = \frac{2 e R^4}{I_3} \quad ?$$

Plan

- Développement de @Torsion
 - De la théorie à la programmation en GIBI
- Exemples de validation
 - Triangles, rectangles, L, C ...
- Calcul d'une poutre Naca
- Conclusion

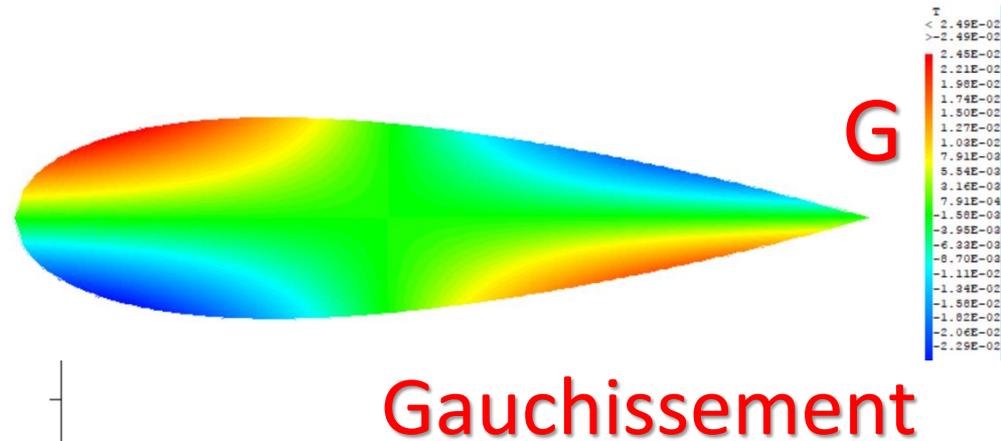
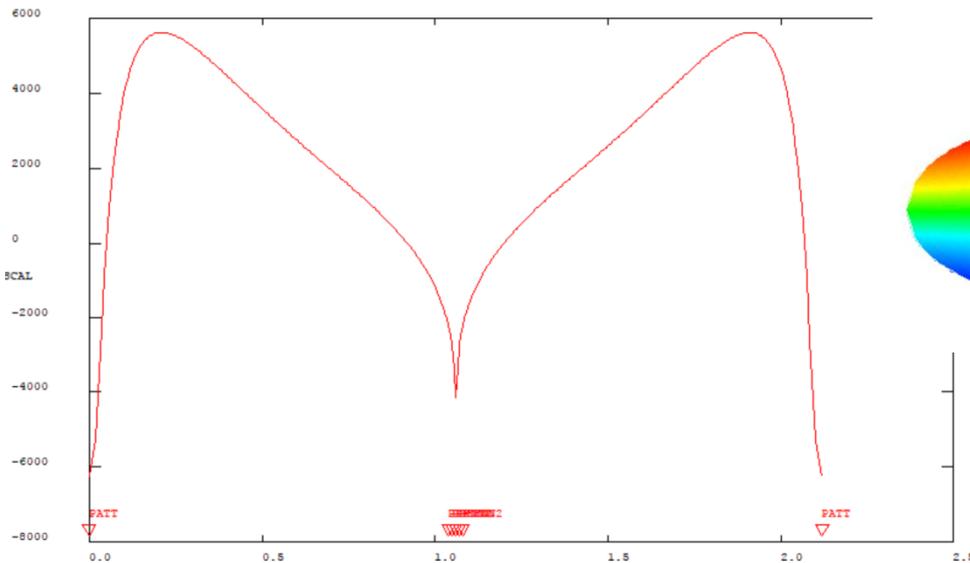
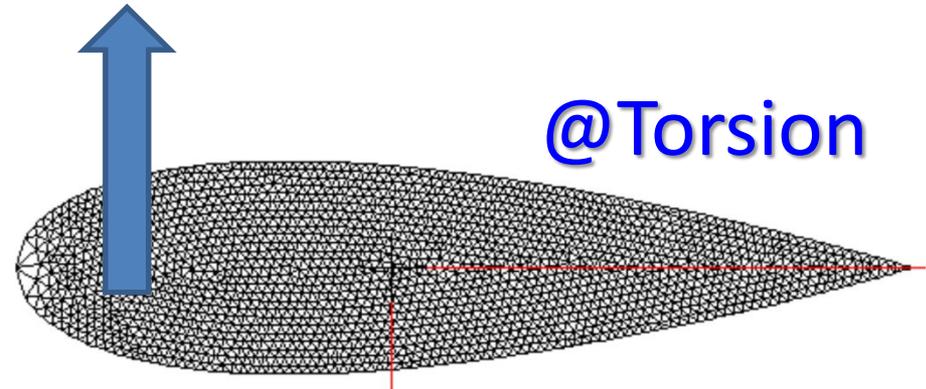
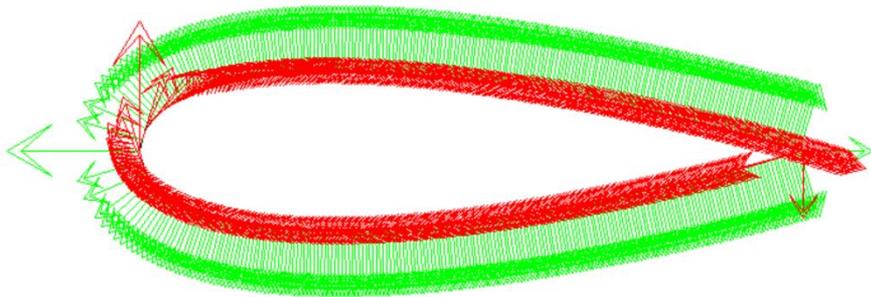
Efforts sur un Naca

- Fluide Parfait incompressible : Kutta Jukowski
- L'aile est une poutre Timoshenko



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= 0 & \vec{V} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi \\ \Delta \phi &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

Propriétés section Naca-0024



Contrainte – déformation

Elast19.dgibi
$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{N(x_1)}{S} - \frac{M_3(x_1)}{I_3} x_2 + \frac{M_2(x_1)}{I_2} x_3$$

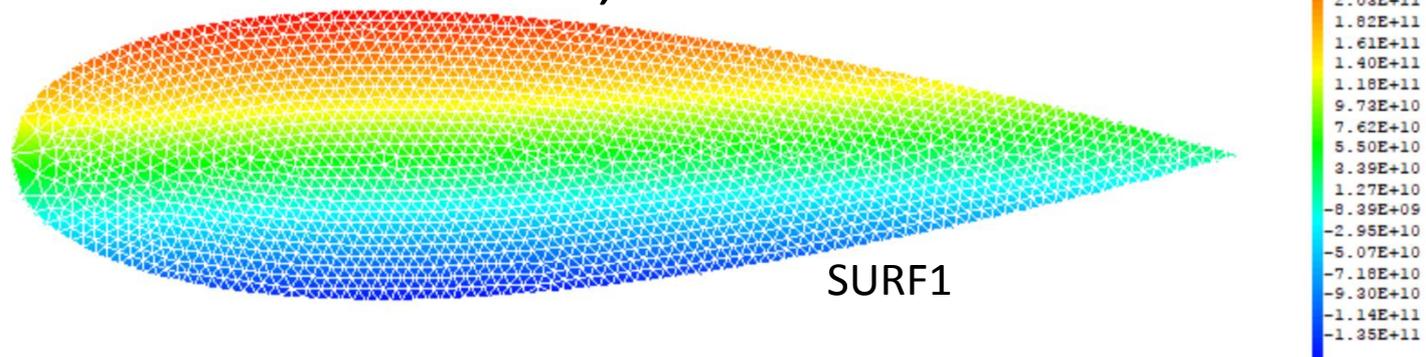
OPTI MODE PLAN GENE ;

MO = MODE SURF1 MECANIQUE ELASTIQUE TRI6 DPGE PG;

MA = MATE MO YOUN 2E11 NU 0.3;

- Chargements au CDG PG :

– Moments de Flexions, Effort Normal



Conclusion

- Éléments finis poutre dans Cast3M
 - Sections avec deux axes de symétrie
 - POUTRE (Euler Bernoulli)
 - TIMO (Théorie Timoshenko)
- La procédure [@Torsion](#)
 - Propriétés de la section avec centre de torsion
- Evolution : Centre de torsion
 - TIMO