



CEA - CENTRE DE SACLAY

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE  
CURIE

École Doctorale des Sciences Mécaniques, Acoustiques,  
Électroniques & Robotiques de Paris

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

par

**Quentin DESBONNETS**

---

**Méthode d'homogénéisation pour la vibration de  
faisceaux de tubes en présence de fluide**

---

Soutenue le 13 décembre 2012 devant le jury composé de :

M. Daniel BROU	CEA - Saclay	Encadrant
M. Olivier CADOT	ENSTA-ParisTech	Examineur
M. Ivan DELBENDE	LIMSI - CNRS	Examineur
M. Olivier DOARÉ	ENSTA-ParisTech	Examineur
M. Serge HUBERSON	Université de Poitiers	Rapporteur
M. Olivier LE MAITRE	LIMSI - CNRS	Directeur de thèse
M. Jean-François SIGRIST	DCNS Reasearch	Rapporteur

Commissariat à l'énergie atomique et  
aux énergies alternatives  
Laboratoire d'Études de Mécanique  
Sismiques  
CEA/DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI  
91 191 Gif-sur-Yvette

École Doctorale des Sciences Méca-  
niques, Acoustiques, Électroniques &  
Robotiques de Paris  
ED SMAER  
Campus Jussieu - BC 270  
4 place Jussieu  
75252 Paris cedex 05

# Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier mon encadrant au sein du CEA, Daniel Broc, pour son encadrement et sa présence tout au long de ces trois années de thèse. Les nombreuses discussions que nous avons eu ainsi que ses conseils avisés m'ont fortement aidé pour la réalisation de ces travaux. Je remercie également Olivier le Maître d'avoir accepté d'endosser le rôle de directeur de thèse et pour son aide apportée.

Je remercie Serge Huberson et Jean-François Sigrist d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je tiens à remercier le laboratoire EMSI du CEA Saclay pour l'accueil que j'ai reçu de la part de toute l'équipe. Je retiendrai les moments conviviaux que j'ai pu partager avec eux au cours de ces trois années. J'adresse un remerciement particulier à Cyril pour la proximité de son bureau avec celui des doctorants et l'enthousiasme dont il fait preuve afin de discuter de tous les sujets. Un grand merci également à tous les doctorants du laboratoire qui m'ont soutenu et encouragé lors de la rédaction de cette thèse et pour tous les bons moments que nous avons passé ensemble au CEA et aussi en dehors. Je les soutiens à mon tour pour la fin de leur thèse.

Je remercie également tous les collègues du CEA, du SEMT ou du STMF, que j'ai pu rencontré, qui m'ont aidé au cours de ma thèse ou avec qui j'ai pu partager d'agréables moments lors de conférences ou séminaires.

Je remercie les personnes que j'ai pu côtoyer via l'association des doctorants du CEA pour ces moments que j'ai pu partager avec eux.

Je voudrais remercier mes amis que j'ai côtoyé au cours de ces trois ans bien qu'éloignés géographiquement. Merci aux amis Bordelais, aux Limogeuards-Palois, aux Toulousains, au Toulonnais et à l'Utrechtois pour tous ces moments.

J'ai pu au cours de ces trois années redécouvrir les plaisirs de la marche. Merci à Laurent, Marjorie, Stefan et Maxime pour tous ces kilomètres avalés ensemble. Un merci tout particulier à Stefan pour m'avoir emmener bien que novice à l'assaut du glacier et à Laurent pour ses formules clefs en main.

La vie en région parisienne n'aurait pas été aussi agréable si certaines personnes n'avaient pas été présentes. Un grand merci pour cela à Gaël, Carole, Alain, Dorothy, Thomas, Armelle, Maxime, Damien, Clémence et Mathieu pour leur précieuse amitié. Parmi eux, je remercie Gaël et Clémence qui se sont relayés au poste de colocataire durant ces années.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien depuis toujours, à tout moment et en toute circonstance.

Enfin à celle qui partage ma vie, qui me connaît, me soutient, qui (bien que l'on lui reproche souvent la situation inverse) me supporte et grâce à qui je suis moi aujourd'hui : Merci Jessica.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Problème d'interaction fluide-structure dans un faisceau</b>	<b>17</b>
2.1	Formulation du problème . . . . .	17
2.2	La formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne . . . . .	20
2.2.1	Formalisme de la méthode ALE . . . . .	20
2.3	Résolution numérique du système . . . . .	23
2.3.1	Choix de la discrétisation temporelle . . . . .	23
2.3.2	Résolution en temps du système . . . . .	25
2.3.3	Traitement du terme de convection non-linéaire . . . . .	25
2.4	Discrétisation avec les éléments finis . . . . .	27
2.4.1	Écriture matricielle . . . . .	28
2.4.2	Calcul des forces . . . . .	30
2.4.3	Bilan des puissances . . . . .	31
2.5	Choix des paramètres numériques . . . . .	33
2.5.1	Pas d'espace . . . . .	33
2.5.2	Pas de temps . . . . .	34
2.5.3	Géométrie du calcul . . . . .	34
2.5.4	Validation des choix de paramètres numériques . . . . .	35
2.6	Les schémas de couplages . . . . .	36
2.7	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Dynamique de l'écoulement dans un faisceau oscillant</b>	<b>41</b>
3.1	Cylindre isolé oscillant dans un large domaine de fluide . . . . .	41
3.2	Écoulements dans un faisceau oscillant . . . . .	44
3.2.1	Régimes symétriques . . . . .	44
3.2.2	Régime non symétrique . . . . .	50
3.3	Conclusion . . . . .	52
<b>4</b>	<b>L'homogénéisation dans le cas non visqueux linéarisée</b>	<b>59</b>
4.1	La méthode des échelles multiples . . . . .	59
4.2	Approche physique de l'homogénéisation . . . . .	66
4.2.1	Système à solution analytique . . . . .	67
4.2.2	Analyse sur une cellule élémentaire . . . . .	71
4.2.3	Équivalence des formulations de la méthode d'homogénéisation . . . . .	73
4.2.4	Application de la méthode et résultats . . . . .	75
4.3	Conclusion . . . . .	77

---

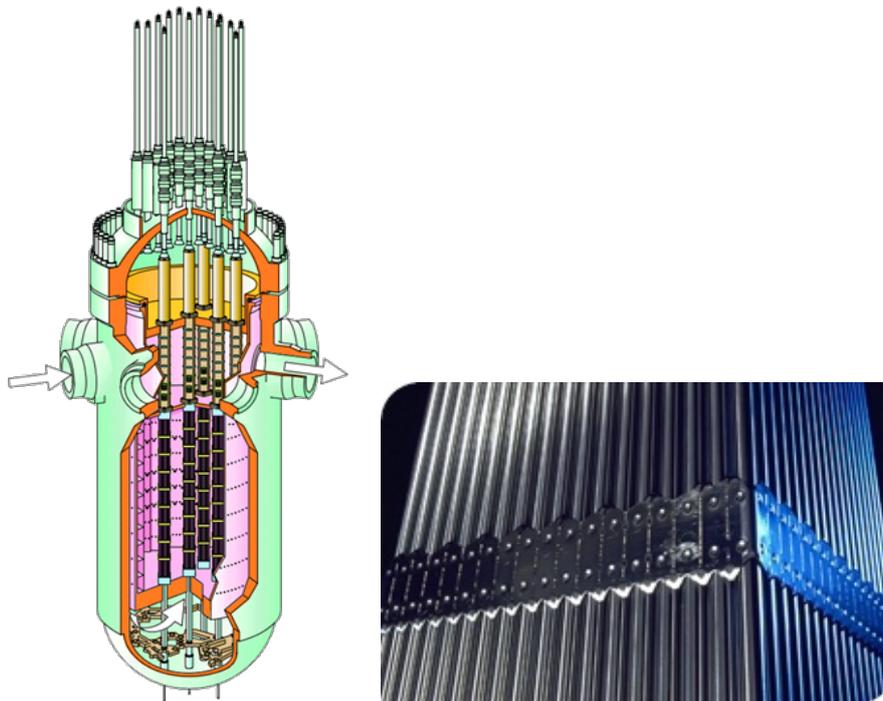
<b>5</b>	<b>Le modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes</b>	<b>81</b>
5.1	Mise en place du modèle . . . . .	81
5.1.1	Détermination des équations du modèle . . . . .	84
5.2	Modélisation des efforts . . . . .	88
5.2.1	Motivation . . . . .	88
5.2.2	Expression de la force moyenne de trainée . . . . .	94
5.3	Ordre de grandeur du terme d'erreur . . . . .	105
5.4	Validation du modèle . . . . .	110
5.4.1	Résolution numérique du modèle . . . . .	110
5.4.2	Cas de lâcher d'un faisceau rigide . . . . .	112
5.4.3	Faisceau rigide soumis à des sollicitations externes . . . . .	116
5.5	Conclusion . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Opérateur de discrétisation temporelle</b>	<b>133</b>
<b>B</b>	<b>Bilan des puissances</b>	<b>135</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>137</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Dans l'industrie nucléaire, on rencontre fréquemment des problématiques mettant en jeu des faisceaux de tubes immergés dans du fluide. Les cœurs de réacteurs à eau pressurisée (REP), les cœurs de réacteur à neutrons rapides à caloporteur sodium (RNR-Na), les réacteurs embarqués et les générateurs de vapeurs (GV) en sont des exemples.

Ces structures sont des faisceaux de tubes immergés dans un fluide. Un cœur de REP, figure 1.1, est constitué de 157 assemblages combustibles se présentant chacun sous la forme de faisceaux de tubes disposés en mailles carrés composés de 17 tubes de côté, soit 289 tubes, à section circulaire. Ces tubes sont de 9.5 mm de diamètre, de 4 m de long et



(a) Schéma d'une cuve d'un cœur de REP.

(b) Assemblage combustible.

FIGURE 1.1 – Représentation d'un cœur de réacteur à eau pressurisé dans sa cuve et vue de côté d'un assemblage combustible pour REP.

espacés entre eux suivant un pas de 1.26 cm. Un assemblage est constitué de 264 crayons

combustibles et de 25 tubes guides. Un crayon combustible est une gaine en alliage base zirconium dans laquelle sont empilés les pastilles de combustibles. Les tubes guides servent aux grappes de contrôle ou aux crayons absorbants. Les assemblages combustibles sont immergés dans le fluide caloporteur du circuit primaire. Ce fluide est chauffé au contact des assemblages et est ensuite acheminé vers un générateur de vapeur, figure 1.2. Dans le

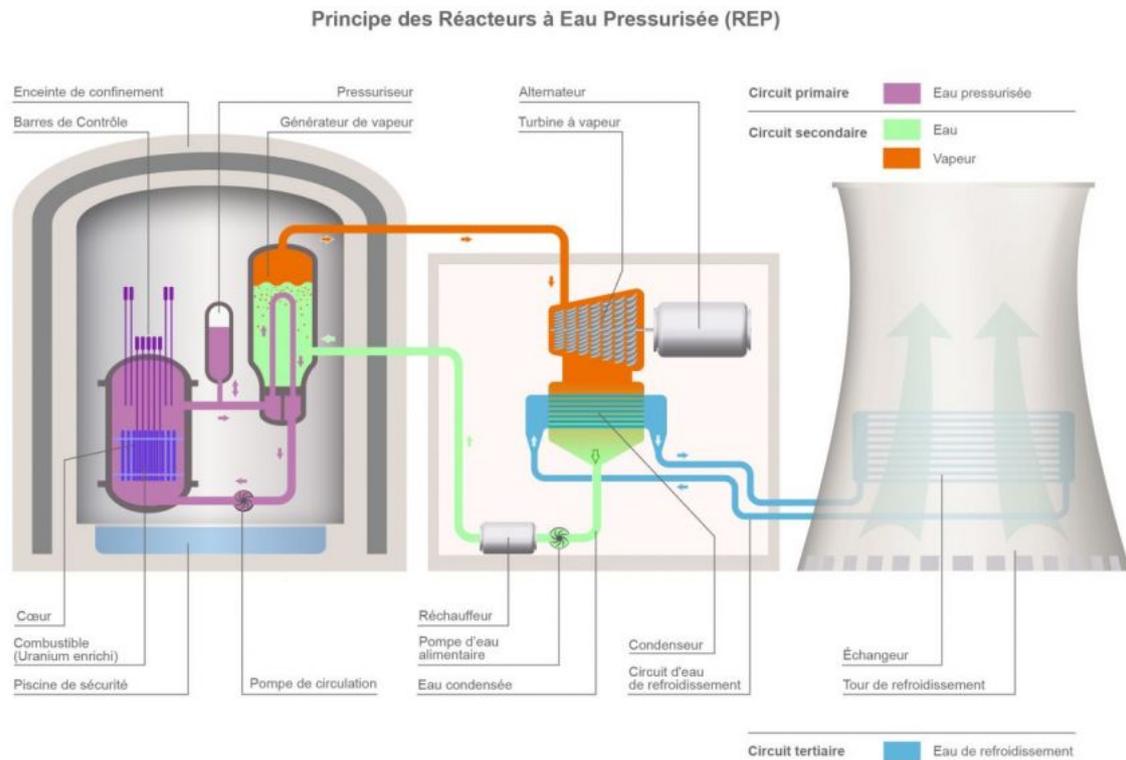


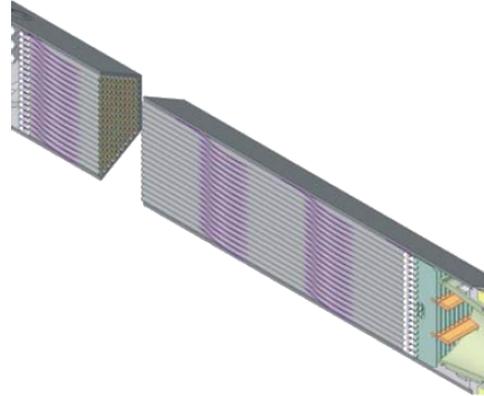
FIGURE 1.2 – Schéma de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisé.

cas d'un REP, le fluide caloporteur est de l'eau liquide. Ce fluide circule le long des assemblages. Sa température est de  $300^{\circ}\text{C}$  et sa pression de 155 bar. La viscosité cinématique  $\nu$  de l'eau dans ces conditions est de  $1.2 \times 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La modélisation du comportement dynamique de ces cœurs nécessite de prendre en compte la présence du fluide car celui-ci modifie les fréquences propres de vibrations de la structure par rapport au cas en air. Cette modification est une baisse de fréquence de l'ordre de 10 à 15% selon les cas [15]. La présence de fluide se traduit également par un taux d'amortissement pouvant atteindre 30% [13, 14] en partie induit par l'écoulement axial.

Les générateurs de vapeur associés aux réacteurs à eau pressurisée sont composés de 3500 à 5600 tubes de 2 cm de diamètre en forme de U, contenant le liquide caloporteur issu du circuit primaire. L'ordre de grandeur de leur première fréquence propre est évalué à 35 Hz [9]. Les tubes sont plongés dans l'eau du circuit secondaire. Cette eau lorsqu'elle traverse le générateur de vapeur est transformée en vapeur. Cette vapeur anime les turbines permettant de générer l'électricité, figure 1.2. La température de l'eau en entrée est de  $220^{\circ}\text{C}$  et sa pression de 60 bar. Sa viscosité cinématique est de  $1.4 \times 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Les cœurs de réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (RNR-Na) sont composés de quelques centaines d'assemblages combustibles disposés en mailles triangulaires,

figure 1.3. Ces assemblages sont des hexagones fermés d'un dizaine de centimètres de dia-



(a) Assemblages combustibles d'un RNR-Na entourés de protections neutroniques latérales. (b) Coupe d'un assemblage combustible d'un RNR-Na.

FIGURE 1.3 – Représentation d'un cœur de réacteur à neutrons rapides et d'une coupe d'un assemblage combustible.

mètre contenant chacun 217 aiguilles combustibles de quelques millimètres de diamètre chacune [2]. Le fluide caloporteur est du sodium liquide, à une température de  $400^{\circ}\text{C}$ . Il est acheminé à l'intérieur des assemblages combustibles par une pompe où il est porté jusqu'à  $550^{\circ}\text{C}$  [3]. Les assemblages combustibles sont fortement confinés et baignent dans le sodium. La pression au sein du fluide est de 1 à 4 bar [48]. Sa viscosité cinématique  $\nu$  est de  $2.8 \times 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Dans les RNR-Na, un échangeur de chaleur est en contact avec le sodium chaud du cœur et chauffe le fluide du circuit secondaire, figure 1.4. Le fluide du circuit secondaire (du sodium également) est ainsi chauffé et est acheminé vers un générateur de vapeur. La vapeur ainsi créée alimente les turbines permettant de générer l'électricité.

Les calculs de dimensionnement de ces structures doivent prendre en compte les sollicitations dynamiques qu'elles peuvent subir. Ces sollicitations sont de deux types :

- les excitations permanentes, comme les vibrations induites par l'écoulement, qui peuvent engendrer, d'une part des chocs entre les tubes entraînant l'usure de ces derniers au niveau des points de choc, d'autre part des phénomènes d'instabilité fluide élastique,
- les excitations accidentelles ou transitoires, comme les excitations d'origine sismique ou les impacts, pour lesquelles la tenue de ces structures doit être assurée. Un séisme engendre des mouvements d'ensembles des tubes au cours duquel l'interaction fluide-structure et les impacts entre tubes deviennent très importants. Par exemple, la réponse d'un cœur REP à un séisme d'accélération comprise entre 0.1 et  $1g$  (soit  $1$  à  $10 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) dont le contenu fréquentiel se concentre autour de  $3\text{Hz}$  (fréquence propre du système) donnerait lieu à des ordres de grandeurs de déplacements entre 1.8 et 18 fois le diamètre d'un tube [24]. La réponse d'un générateur de vapeur à cette même sollicitation sismique autour de la première fréquence propre du système (35

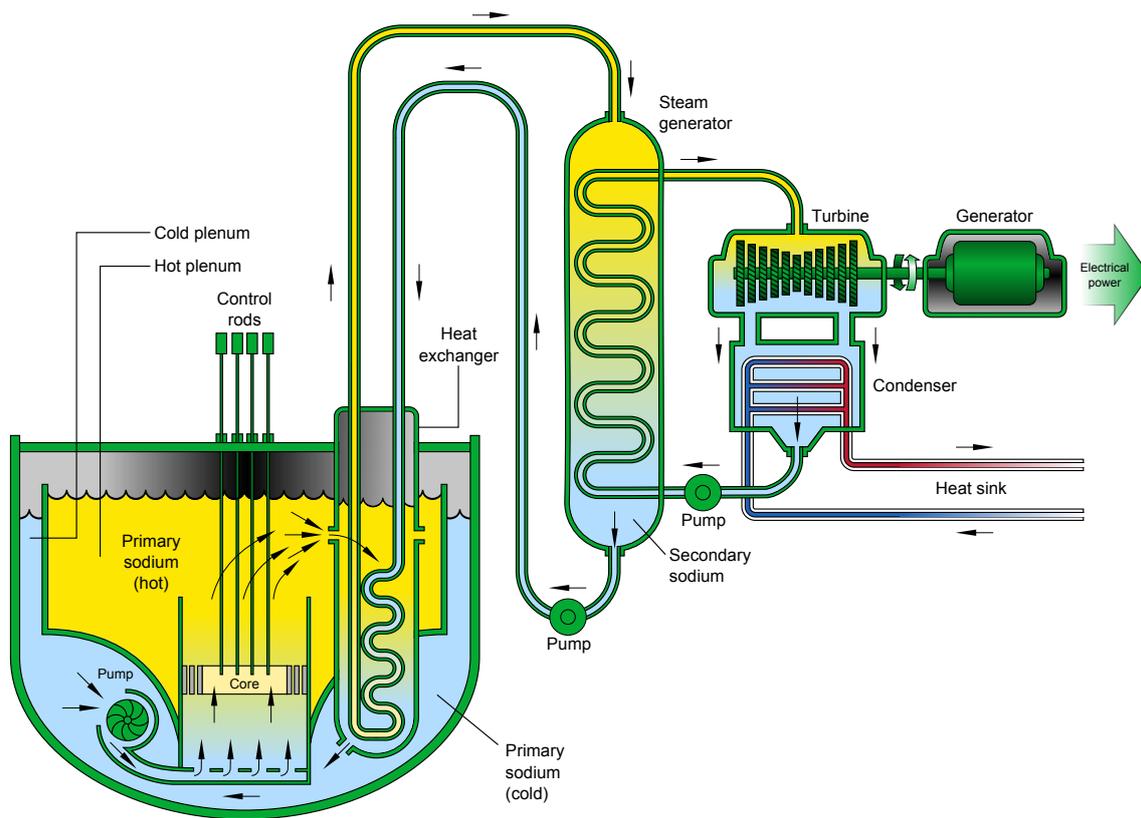


FIGURE 1.4 – Schéma de fonctionnement d'un réacteur à neutrons rapides refroidit au sodium.

Hz) donne des ordres des grandeurs de déplacements de l'ordre de 0.07 à 0.7 fois le diamètre d'un tube. Enfin, la fréquence propre d'un cœur de RNR-Na est également de l'ordre de 3Hz. Le fort confinement des assemblages donne des ordres de grandeurs de déplacements comparables à ceux d'un cœur de REP.

La simulation numérique des phénomènes présents dans ces systèmes constitue un enjeu important. La difficulté ainsi que le coût de la mise en place d'expérimentations pour ce type de systèmes fait que la simulation devient nécessaire lorsqu'elle est possible. De plus, même lorsque l'expérimentation est possible, il est délicat de mesurer de façon précise et exhaustive tous les caractéristiques de l'écoulement ou du faisceau de tubes. Ainsi l'apport de la simulation numérique fournit plus de données en plus grande quantité et permet de mieux appréhender les phénomènes vibratoires complexes.

### **La simulation numérique de l'interaction fluide-structure**

La modélisation de la vibration d'un faisceau de tubes immergé dans du fluide nécessite de prendre en compte le couplage entre la dynamique du faisceau de tubes et la mécanique régissant le domaine fluide. Le mouvement de la structure déforme le domaine fluide au cours du temps, et la réponse du fluide à ces déformations modifie le mouvement de cette structure. Lorsque les déformations de la structure se font sur des échelles de temps comparables aux temps caractéristiques fluide, le domaine fluide doit être mis à jour régulièrement. Suivant les méthodes utilisées, la prise en compte de cette déformation peut être plus ou moins coûteuse. Plusieurs approches sont envisageables afin de modéliser ces systèmes couplés. On en cite quelques unes en exemple.

Pour des très petits déplacements de structures dans le fluide, il est possible de conserver un domaine fluide fixe et d'adopter la technique dite de transpiration. La méthode considère que, du point de vue du fluide le déplacement de la structure est équivalent à un développement limité au voisinage de la position initiale de la structure. A l'interface fluide-structure, on modifie donc les conditions limites au cours du temps et on attribue au fluide une vitesse de transpiration au travers du solide. Une description de cette méthode est donnée dans [26]. Cette méthode est restreinte aux cas de très petits déplacements.

Pour prendre en compte des déformations du domaine fluide plus importante, une première méthode est la formulation ALE. Cette méthode consiste à déformer le domaine fluide à partir d'une configuration de référence, ce qui introduit des termes complémentaires liés au mouvement du maillage dans les équations aux dérivées partielles du modèle. Nous décrirons cette méthode plus en détails dans le chapitre 2. Nous verrons que le principal inconvénient de l'ALE est la nécessité de remailler le domaine. Dans le cas général, le coût du remaillage devient rapidement une part importante du temps de calcul global, d'autant plus lorsque la géométrie est complexe et/ou tridimensionnelle. Lorsque ces temps engendrés deviennent prohibitifs, on préfère à la formulation ALE les méthodes de domaine fictif.

Afin d'éviter de déformer le domaine fluide, les méthodes de domaine fictif travaillent sur un maillage fluide fixe. Le solide est alors superposé au maillage fluide et les valeurs de vitesses et pressions prises aux nœuds des mailles occupées par le solide sont totalement fictives. La gestion des conditions à imposer afin que le fluide "voie" le solide donne lieu à plusieurs méthodes. On mentionne quelques exemples de ces méthodes.

Parmi elles, on trouve la méthode des frontières immergées (*Immersed Boundary Method*, IBM). Cette méthode a été proposée par Peskin [47] pour la simulation des écoulements sanguins dans le cœur. La méthode utilise un seul maillage cartésien indépendant de la géométrie qui contient tout le domaine susceptible d'être occupé par le fluide et le solide au cours du temps. La présence du solide dans le fluide se modélise par l'ajout d'un terme source de type Dirac dans les équations de la dynamique du fluide. Cette méthode est adaptée au traitement de structures minces où le fluide pilote la dynamique de l'interface fluide-structure [44].

Une méthode plus générale que les frontières immergées, inspirée de cette dernière, est la méthode de pénalisation de la pénétration du fluide dans la structure. Cette méthode se base sur le principe de la non-pénétration du fluide dans le solide. Elle consiste à voir le solide comme un milieu poreux, avec une imperméabilité d'autant plus grande que la porosité sera faible. Cette approche a été proposée par Arquis et Caltagirone [8] pour des écoulements incompressibles visqueux avec un modèle de porosité de Brinkman. Ce modèle revient à pénaliser la vitesse du fluide dans le volume solide en considérant une perméabilité très grande dans le fluide par rapport au solide.

Une autre méthode issue des méthodes de frontières immergées est la méthode *Fictitious domain* utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode a été développée par Glowinski *et al.* [30]. La méthode consiste à remplir le domaine solide d'un état fluide virtuel et à imposer le mouvement de corps rigide par multiplicateurs de Lagrange dans la formulation variationnelle du fluide.

Les principes détaillés de ces méthodes à domaine fictif, ainsi que d'autres méthodes non citées ici, sont décrits dans [44].

Un autre type de méthode, les méthodes particulières, sont particulièrement adaptées aux problèmes de grands déplacements. Ces méthodes ne considèrent pas de maillage. Les grandeurs physiques ne sont plus définies sur des nœuds d'une grille mais sur des particules ayant chacune une masse, une densité, une viscosité. La méthode SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*) utilisant ce principe, est introduite par Gingold et Monaghan [29], initialement pour des problématiques d'astrophysiques. Sur chaque particule, on réalise une interpolation avec les particules voisines proches. Ces méthodes posent des soucis lorsque des changements de voisins s'opèrent (générant des coûts supplémentaires de recherche de nouveaux voisins).

Un dernier exemple de méthodes pour la simulation de l'interaction fluide-structure sont les méthodes avec recouvrement de maillages. La méthode *Fat boundary* [42] en est un exemple. Un maillage non-structuré adapté à l'interface fluide-structure entoure le solide localement tandis que le domaine global est discrétisé par un maillage cartésien. Les deux domaines se recouvrent. La condition de Dirichlet sur la vitesse aux parois du solide est imposée dans le domaine local, et est remplacée dans le domaine global par une condition de Neumann d'égalité des flux à la paroi entre la solution locale et la solution globale. Une condition de Dirichlet impose la continuité des solutions globales et locales à l'interface entre les deux domaines.

Ces méthodes, dont la présentation faite ici n'est bien sûr pas exhaustive, sont donc utilisés lorsque que l'on veut modéliser avec une bonne précision l'interaction fluide-structure entre un solide et son fluide environnant. Cependant, les systèmes que l'on considère sont

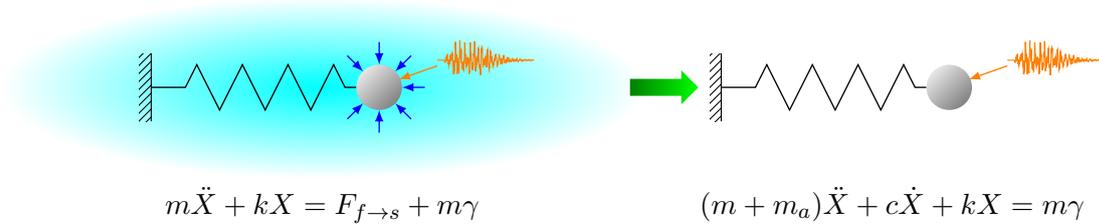


FIGURE 1.5 – Représentation schématique de l’interaction fluide-structure du point de vue du cylindre. Cas d’un cylindre baigné dans du fluide est soumis à une sollicitation externe.

de très grandes tailles. Par exemple, un cœur de REP est un système où l’on dénombre 45373 tubes plongés dans du fluide. Une modélisation totale d’un cœur via les méthodes citées précédemment n’est pas envisageable. C’est pourquoi on s’intéresse à des méthodes d’homogénéisation permettant de représenter la physique de milieux hétérogènes par un milieu homogène équivalent.

### Un mot sur l’homogénéisation

L’homogénéisation est classiquement définie comme l’ensemble des techniques qui permettent de passer de la description microscopique à la description macroscopique d’un phénomène physique modélisé par une ou plusieurs équations différentielles. L’homogénéisation est un outil de modélisation qui fournit des modèles asymptotiques simplifiés : Elle fournit des propriétés macroscopiques "équivalentes" d’un milieu microscopique hétérogène, avec comme avantage un gain en temps de calculs (par rapport à une modélisation complète) au prix d’une perte d’information au niveau local.

Dans notre cas on cherche une méthode permettant de passer de la description au niveau de l’interaction entre un tube, le fluide environnant ainsi que les autres tubes du faisceau à un système représentant la vibration d’un faisceau de tubes immergé dans du fluide. En effet, si le système était restreint au cas d’un cylindre unique 2D immergé et soumis à une force extérieure, alors l’interaction fluide-structure se résumerait du point de vue du cylindre à considérer un oscillateur possédant une masse alourdie (effet de masse ajoutée) et un amortissement équivalent, figure 1.5. Nous reviendrons sur ce point en détail au chapitre 5. Dans le cas du faisceau, le mouvement de chaque tube va perturber le fluide environnant, et donc indirectement impacter, via ce fluide, les tubes voisins, figure 1.6. L’homogénéisation a pour but de fournir une bonne approximation des efforts présents au sein du système, comme les forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau, et ainsi qualifier les déplacements des tubes.

Pour aboutir à une représentation homogénéisée d’un milieu multi-phasique périodique, plusieurs approches peuvent être utilisées. Une première approche consiste à faire de la sous-structuration, une autre, à utiliser les méthodes d’homogénéisation. Les deux méthodes peuvent éventuellement se rejoindre en aboutissant aux mêmes équations.

La sous-structuration consiste à décomposer le domaine total en sous-domaines ayant des relations entre eux. Dans le cas d’un milieu périodique, ces sous-domaines représentent des cellules élémentaires. Des travaux ont été réalisés en ce sens par Shinohara [57] et Jacquelin [39]. Ils considèrent un cas simplifié avec un fort confinement (fines lames d’eau

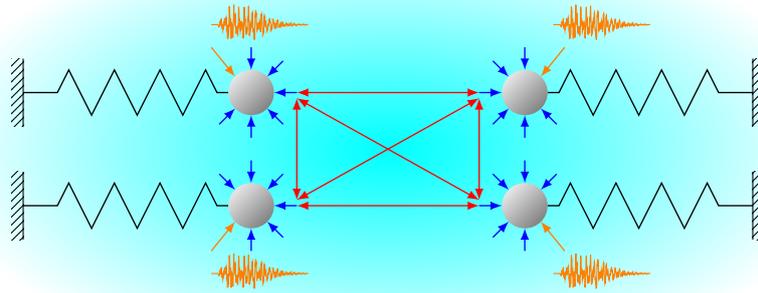


FIGURE 1.6 – Représentation schématique des interactions entre les tubes et le fluide au sein d’un faisceau. Cas d’un faisceau baigné dans du fluide est soumis à une sollicitation externe.

entre des tubes de section carrée ou hexagonale). Cette méthode reste limitée aux cas de fort confinement. Son intégration dans un code de calcul général n’est pas immédiate.

On peut également citer la démarche de Bloch [19] qui considère un faisceau infini et identifie des modes de vibration des tubes organisés en cellules.

Les approches de Shinohara et Jacquelin, ainsi que celle de Bloch permettent de comprendre le comportement physique du faisceau.

Concernant les méthodes d’homogénéisation, on peut en citer deux, largement utilisées. La première méthode est basée sur les développements asymptotiques. La seconde est basée sur la prise de moyenne. Ces deux méthodes correspondent à des analyses différentes de l’écoulement. Elles postulent toutes deux l’existence de deux échelles de variations des grandeurs physiques.

La méthode des développements asymptotiques [12] suppose, sur le plan mathématique, une grande régularité des coefficients des opérateurs présents dans les équations du système à homogénéiser. La solution du problème, qui n’est pas forcément périodique, est recherchée sous la forme d’un développement asymptotique à deux échelles. Cette méthode est appliquée à la vibration d’un faisceau de tubes immergé dans du fluide, dans le cas non visqueux linéarisé, par Hammami [34]. On détaille le principe de la méthode dans le chapitre 4 via ce cas d’application. Une limite de cette méthode est qu’elle ne prend pas en compte les mouvements différentiels entre tubes voisins. Cheval [18] utilise des éléments des analyses de Shinohara et Jacquelin pour compléter les méthodes de Hammami de façon à prendre en compte ces mouvements.

La méthode des développements asymptotiques se complète avec une méthode d’homogénéisation par convergence à deux échelles, introduite par Allaire [4]. Celle-ci permet de justifier mathématiquement les calculs formels effectués dans la méthode des développements asymptotiques. Cependant elle est plus complexe à mettre en place.

La méthode de la prise de moyenne s’inscrit dans une vision phénoménologique, donc basée sur la physique [63]. Les approximations ne sont pas considérées dans les hypothèses de départ mais sont faites au fur et à mesure du raisonnement. Cette méthode com-

bine l'utilisation d'une fonction caractéristique, qui traduit la distinction entre le domaine fluide et le domaine solide, et une prise de moyenne spatiale permettant l'homogénéisation. Différents termes inconnus apparaissent dont les modélisations sont ensuite proposées en s'appuyant sur la séparation des échelles. Cette méthode correspond à une approche physique de l'homogénéisation. Cette approche est employée par Sigrist et Broc [58] pour établir un modèle homogénéisé de la vibration d'un faisceau de tubes dans le cas non visqueux linéarisé en 2D et 3D. Cette méthode peut sembler moins assise mathématiquement que la méthode basée sur les développements asymptotiques mais nous montrerons au chapitre 4 que ces deux méthodes donnent des résultats similaires pour l'application qui nous intéresse. C'est cette voie qui sera suivie afin de mettre en place le modèle homogénéisé de la vibration d'un faisceau de tubes en présence de fluide basé sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide au chapitre 5 plus général que le modèle précédent.

Notons que la méthode de la prise de la moyenne a déjà été utilisée pour mettre en place un modèle de vibration d'un faisceau de tube en 3D basé sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide par Ricciardi [52], dans l'approximation d'un mouvement rigide du faisceau (c'est à dire que les mouvements différentiels entre tubes sont négligés). Ce modèle est adapté à la simulation d'un assemblage combustible seul mais présente des problèmes de continuité, du fait de sa construction dans l'approximation de mouvement rigide, lorsque l'on considère des mouvements différentiels entre 2 faisceaux voisins par exemple.

En résumé, on souhaite mettre en place une méthode d'homogénéisation de la vibration d'un faisceau de tubes immergé, basée sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide. Pour cela on choisit une approche similaire aux méthodes de prise de moyenne. Cette vision physique de l'homogénéisation va nécessiter des approximations qui peuvent être faites à partir d'une étude des phénomènes physiques en jeu dans la vibration d'un faisceau de tubes en présence de fluide. Cette étude va nécessiter la réalisation de simulations numériques modélisant ces phénomènes. Une fois le modèle homogénéisé proposé, ses résultats pourront être comparés à ceux obtenus par le calcul direct.

Le plan de cette thèse est le suivant. Dans un premier chapitre nous présenterons les outils numériques de simulations que nous utiliserons dans nos travaux. Notre choix s'est porté sur l'utilisation d'une formulation ALE afin de traiter l'interaction fluide-structure pour les simulations directes. Le formalisme de cette méthode est rappelé. Les stratégies de discrétisation temporelle et de résolution en temps du système fluide ainsi que la méthode de discrétisation spatiale employée, les éléments finis, appliquées aux équations de Navier-Stokes, sont détaillées. Les stratégies de couplages utilisées entre le système fluide et le faisceau sont présentées.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de l'oscillation d'un faisceau de tubes ( $6 \times 6$ ) dans un fluide initialement au repos confiné dans une cuve de fluide en fonction des paramètres du système. Dans le cas d'un cylindre oscillant dans un large domaine de fluide les variations de ces paramètres génèrent des écoulements très différents. Une classification sommaire des écoulements générés par les oscillations du faisceau est réalisée en fonction de la forme des écoulements et également de l'allure des forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau. Nous nous appuyerons sur les résultats des simulations présentées dans ce chapitre afin de construire les approximations nécessaires à la mise en place du modèle homogénéisé.

Le chapitre 4 présentera l'homogénéisation de la vibration d'un faisceau de tubes dans

le cas non visqueux linéarisé. Dans un premier temps, la méthode des développements asymptotiques est appliquée au cas d'un faisceau de tubes immergé dans du fluide soumis à une excitation externe. Dans un second temps, on montre que le même modèle (avec les mêmes équations) peut être obtenu en considérant une approche physique des phénomènes en jeu sur des cellules élémentaires. Ce chapitre nous conforte dans notre choix de la méthode d'homogénéisation, à savoir la méthode de prise de moyenne, pour la construction d'un modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide.

Enfin le dernier chapitre traite de la mise en place de ce modèle. Nous détaillerons sa construction. Ce modèle requiert des approximations et nécessitera de modéliser certains termes. Pour cela nous nous appuyerons en partie sur les simulations effectuées au chapitre 3 ainsi que sur les résultats de la littérature. La validation du modèle se fera par la comparaison de cas d'applications avec des simulations directes.

## Chapitre 2

# Problème d'interaction fluide-structure dans un faisceau

Ce chapitre présente les outils numériques de résolution des systèmes d'équations utilisés pour la simulation d'un problème d'interaction fluide-structure. Ces outils serviront à la réalisation de simulations numériques de vibration d'un faisceau de tubes en présence de fluide. Les outils de résolution numérique de ce système d'équations seront présentés. On détaille les algorithmes de résolution des équations employés. On détaille également la méthode des éléments finis utilisée pour discrétiser le problème dans le code de calcul CAST3M [1]. On décrira les choix de modélisation. On présente ensuite les outils de calculs de forces et de puissances. Les techniques de couplage pour la simulation de problèmes d'interaction fluide-structure seront enfin présentées. Elles seront utilisées pour la réalisation de simulations de vibration d'un faisceau de tubes dont le comportement vibratoire est non-forcé.

### 2.1 Formulation du problème

On s'intéresse au cas d'un faisceau de tubes bidimensionnel immergé dans du fluide et soumis à une excitation externe. Le domaine total  $\Omega$ , représenté dans la figure 2.1 est composé d'une phase solide  $\Omega_S$  et d'une phase fluide  $\Omega_F$ . L'interface fluide-structure est notée  $\Gamma_{F/S}$  de vecteur normal  $\mathbf{n}$ , orienté du fluide à la structure, et de vecteur tangent  $\mathbf{t}$ .

Le fluide considéré est supposé incompressible de masse volumique  $\rho$ , invariante par rapport au temps, et de viscosité cinématique  $\mu$ . On considère l'écoulement fluide régi par les équations de Navier-Stokes incompressible. Il est décrit par le champ de vitesse fluide  $\mathbf{v}^*$  et le champ de pression  $p^*$ . La notation  $*$  est utilisée pour désigner les grandeurs dimensionnées. Les équations de Navier-Stokes sont décrites sous leurs formes dimensionnelles par le système

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0 & \text{dans } \Omega_F, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* \right) = -\nabla p^* + \mu \Delta \mathbf{v}^* & \text{dans } \Omega_F. \end{cases} \quad (2.1)$$

L'approximation de divergence nulle revient à dire que la masse volumique reste constante le long d'une trajectoire. La seconde équation est issue de la conservation de la quantité de mouvement, en utilisant l'expression (2.2) pour le tenseur des contraintes,

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = -p^* \underline{\underline{Id}} + \mu \left( {}^t \nabla \mathbf{v}^* + \nabla \mathbf{v}^* \right). \quad (2.2)$$

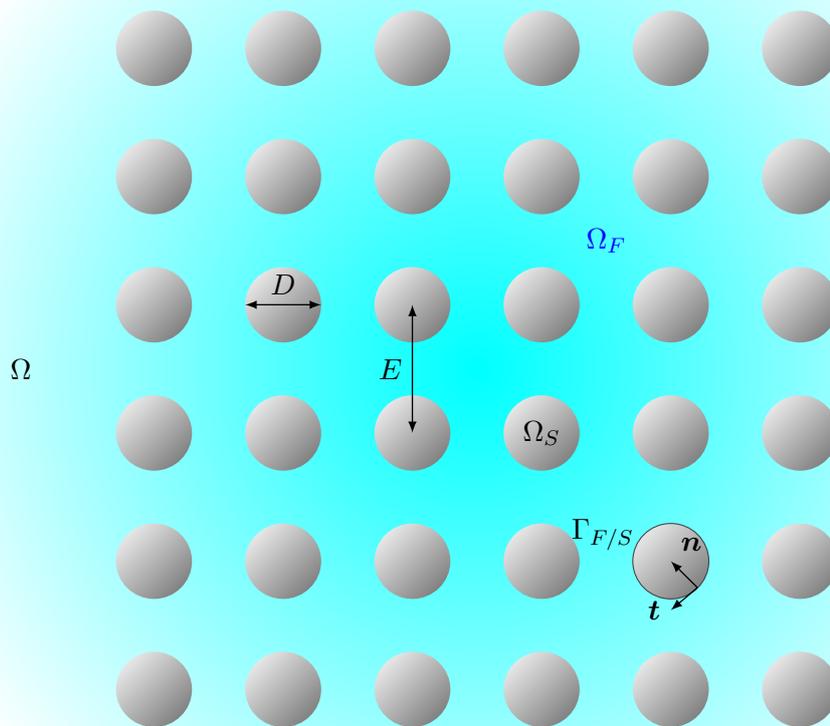


FIGURE 2.1 – Faisceau de  $N$  tubes immergés dans un fluide initialement au repos et soumis à une excitation externe.

Le faisceau est composé de  $N$  tubes rigides de diamètre  $D$  supposés identiques et arrangés en mailles carrés. L'espacement entre deux tubes voisins est noté  $E$ . Chaque tube est assimilé à un oscillateur non amorti de masse  $m$  et de raideur  $k$ . La masse totale du faisceau vaut  $M = Nm$  et, dans le cas d'un faisceau rigide, sa raideur vaut  $K = Nk$ . Le mouvement d'un tube dans le vide est régi par une équation d'oscillateur à deux degrés de liberté soumis aux efforts fluide et à une sollicitation externe  $\mathbf{a}$ , de la forme

$$m\ddot{\mathbf{X}}^* + k\mathbf{X}^* = \mathbf{F}_{f \rightarrow s}^* + m\mathbf{a}^* = \int_{\Gamma_{F/S}} \underline{\underline{\sigma}}^* \mathbf{n} \, d\Gamma + m\mathbf{a}^*. \quad (2.3)$$

Les oscillateurs du système sont supposés non amortis dans le vide, cela afin de mettre en évidence l'effet d'amortissement dû à l'immersion du faisceau dans le fluide.

On considère que les tubes sont parfaitement lisses. Un tube interagit avec le fluide environnant par la condition d'adhérence

$$\mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{X}}^* \quad \text{sur} \quad \Gamma_{F/S}. \quad (2.4)$$

### Adimensionalisation

Les grandeurs caractéristiques du système complet sont donc

- la masse  $M$  du faisceau,
- sa raideur  $K$ ,
- le diamètre  $D$  d'un tube,
- l'espacement  $E$  entre deux tubes,
- la masse volumique  $\rho$  du fluide,
- et la viscosité dynamique  $\mu$  du fluide.

A ces grandeurs on ajoute la vitesse maximale moyenne d'un tube  $V$  comme vitesse de référence. A partir de ces grandeurs on détermine les grandeurs complémentaires suivantes :

- $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$  la fréquence propre du faisceau (ou d'un tube) dans le vide,
- $T = \frac{1}{f_0}$  la période du faisceau dans le vide et ordre de grandeur en temps du système,
- $L = VT$  l'ordre de grandeur de déplacement du faisceau,
- $P = \rho V^2$  l'ordre de grandeur de la pression dynamique.

On a donc 7 grandeurs caractéristiques et 3 grandeurs fondamentales : masse (kg), longueur (m) et temps (s). Le système va donc dépendre de 4 paramètres adimensionnels.

L'adimensionnement du système composé des équations (2.1), (2.3) et de la condition limite (2.4) donne le système (2.5),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega_F, \\ \frac{1}{Kc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} & \text{dans } \Omega_F, \\ \ddot{\mathbf{X}} + 4\pi^2 \mathbf{X} = \frac{4MKc}{\pi} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} + \mathbf{a} & \text{pour } l = 1, \dots, N, \\ = \frac{4MKc}{\pi} \int_{\Gamma_{F/S}} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} \, d\Gamma + \mathbf{a} & \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}} & \text{sur } \Gamma_{F/S}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Le problème est caractérisé par les paramètres adimensionnels

$$Kc = \frac{VT}{D}, \quad Re = \frac{\rho VD}{\mu}, \quad \mathcal{M} = \frac{\rho \pi \frac{D^2}{4}}{m}, \quad e = \frac{E}{D}. \quad (2.6)$$

Le nombre de Keulegan-Carpenter  $Kc$  quantifie le rapport entre la longueur caractéristique du système solide (l'ordre de grandeur de déplacement d'un cylindre) et la longueur caractéristique du système fluide. Il est régulièrement utilisé dans les problèmes de structures soumises à des écoulements fluide oscillant ou des problèmes de structures oscillantes immergées dans du fluide. Le nombre de Reynolds  $Re$  représente le rapport entre les échelles de temps des effets cinétiques et les échelles de temps des effets visqueux. Ce nombre adimensionnel est largement utilisé en mécanique des fluides. C'est un paramètre caractérisant l'écoulement et permettant de distinguer les différents régimes (par exemple, pour les écoulements de fluide autour d'un cylindre on distingue en fonction du nombre de Reynolds les régimes dit de Stokes, laminaire, transitoire ou turbulent). Le nombre adimensionnel  $\mathcal{M}$  représente le rapport entre les masses volumiques fluide et solide. Enfin, le nombre  $e$  représente le pas d'espace du faisceau adimensionné.

Le problème à modéliser est un faisceau mobile, immergé dans du fluide au repos, soumis à une sollicitation extérieure. L'implémentation numérique de ce problème d'interaction fluide-structure se fait dans ces travaux à l'aide d'une formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne.

## 2.2 La formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne

Pour décrire la physique d'un milieu continu, deux approches sont principalement utilisées. La première est une description du point de vue matériel, la formulation lagrangienne, où le repère est lié aux points matériels. Cette description est adaptée pour de faibles déformations d'un milieu continu ainsi qu'aux suivis d'interfaces. Lorsque les déformations sont trop importantes, la résolution numérique qui en découle devient très coûteuse et peut générer des erreurs numériques importantes. La seconde approche est une description du point de vue du mouvement des particules, la description eulérienne, où le repère est fixe et lié à l'espace. Cette description permet de gérer des déformations du milieu continu très importantes. Cependant, elle nécessite la prise en compte de termes de convection non-linéaires. L'utilisation de cette description apporte également des difficultés pour le suivi d'interface.

La méthode arbitraire Lagrange-Euler (ALE) a été développée afin de réduire les inconvénients des formulations purement lagrangienne ou eulérienne. Elle consiste à définir un référentiel arbitraire dans lequel on se place pour calculer les variables physiques du domaine fluide. Ce référentiel et le maillage qui en découle sont mobiles. La vitesse d'un nœud du maillage est arbitraire. Par exemple, proche de la structure les nœuds suivent l'interface fluide-structure, selon une description lagrangienne, alors que loin de la structure ceux-ci adoptent une description eulérienne.

### 2.2.1 Formalisme de la méthode ALE

Supposons un point matériel  $M$  mobile au cours du temps, d'un milieu continu  $\Omega$ . Selon la formulation employée on le repère de différentes manières. En description eulérienne le point est repéré par ses coordonnées spatiales  $(x, t)$  où  $x$  est fonction de  $t$ . On note  $\Omega_x$

le milieu continu décrit par ces coordonnées eulériennes. En description lagrangienne, ce point est repéré par ses coordonnées matérielles  $(X, t)$  où  $X \in \Omega_X$ . La cinématique du milieu continu est décrite par l'application  $\varphi$  vérifiant

$$\begin{aligned} \Omega_X \times [0, T_f] &\rightarrow \Omega_x \times [0, T_f] \\ t &\rightarrow t \\ X &\rightarrow x = \varphi(X, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Supposons une quantité  $f$  définie en  $M$ . On utilise la notation  $\tilde{f}$  lorsque cette quantité est exprimée dans le référentiel matériel. Elle est décrite comme  $f = f(x, t) = f(\varphi(X, t), t) = \tilde{f}(X, t)$ . Ainsi sa dérivée particulaire s'écrit comme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_X \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_X$  est la vitesse des particules dans le référentiel spatial.

Supposons à présent le point  $M$  décrit dans le repère ALE. Il est repéré par ses coordonnées ALE  $(\chi, t)$  où  $\chi$  est fonction de  $t$ . La cinématique du milieu est décrite par l'application  $\psi$  de tel sorte que

$$\begin{aligned} \Omega_\chi \times [0, T_f] &\rightarrow \Omega_x \times [0, T_f] \\ t &\rightarrow t \\ \chi &\rightarrow x = \psi(\chi, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

On utilise la notation  $\hat{f}$  pour exprimer une quantité dans le repère ALE. Ainsi la quantité  $f$  est décrite comme  $f = f(x, t) = f(\psi(\chi, t), t) = \hat{f}(\chi, t)$ . Alors

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \Big|_\chi = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_\chi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \zeta \cdot \nabla f \quad (2.10)$$

où  $\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_\chi$  est la vitesse du référentiel ALE évaluée dans le repère spatial.

Les relations entre les différents repères sont représentées par la figure 2.2.

Ainsi on obtient,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \Big|_\chi - \zeta \cdot \nabla f + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \Big|_\chi + (\mathbf{v} - \zeta) \cdot \nabla f \quad (2.11)$$

En appliquant la relation (2.11) au champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , et en l'introduisant dans l'équation de quantité de mouvement du système (2.5), on obtient l'expression de l'équation de quantité de mouvement ALE

$$\frac{1}{Kc} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} \Big|_\chi + ((\mathbf{v} - \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (2.12)$$

On remarque que dans cette équation, seule la dérivée temporelle est exprimée dans le référentiel ALE. Cette formulation n'est pas exactement une formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne, puisque toutes les dérivées partielles ne sont pas exprimées dans le référentiel arbitraire, mais il s'agit d'une formulation quasi-eulérienne, introduite par

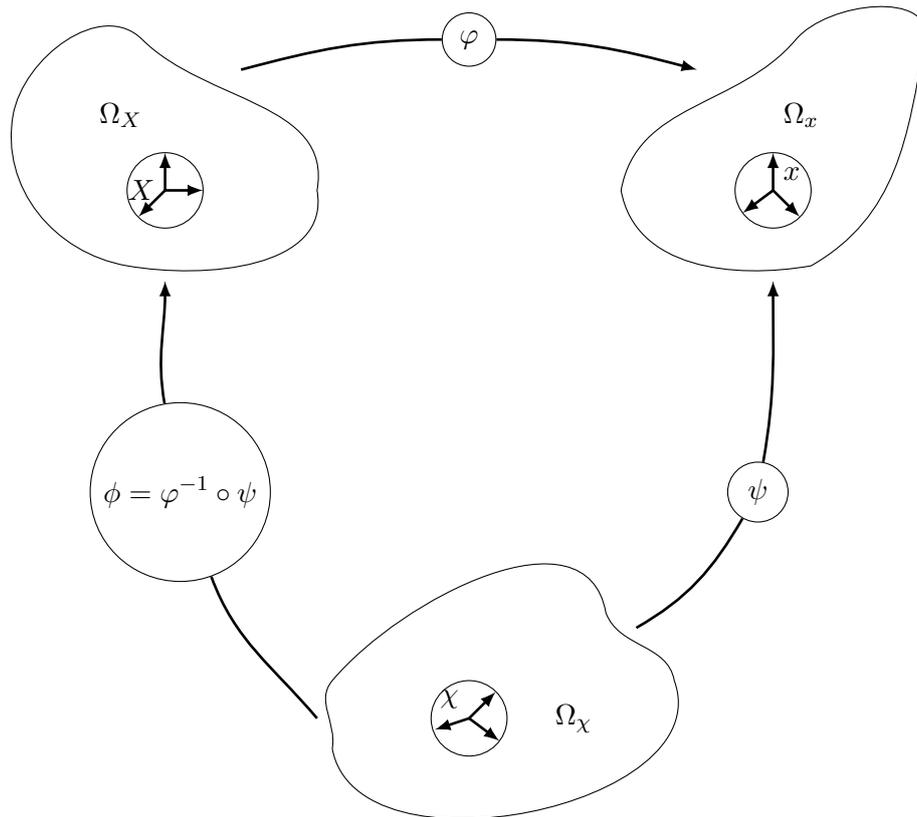


FIGURE 2.2 – Relations entre le référentiel matériel, spatial et arbitraire et entre les descriptions lagrangienne, eulérienne et ALE. Figure inspirée de [23].

[37] qui en est un cas particulier. Cependant, sa fréquente utilisation a atténué la distinction entre les deux formulations qui sont généralement considérées équivalentes. La dérivée partielle temporelle correspond à une différence de vitesses en des instants différents et en un point du référentiel arbitraire fixe. Cependant, numériquement cette dérivée correspond à une différence de vitesses entre deux points temporellement différents mais aussi spatialement différents, dû à la mobilité du maillage.

A chaque itération de calcul on doit donc reconstruire le maillage, puis y projeter la solution. Le remaillage associé au calcul fluide peut s'avérer très couteux. De plus, on doit s'assurer que la projection sur le maillage ne dégrade pas la précision du calcul. On suppose qu'au sein de notre faisceau les mouvements différentiels de tubes sont faibles devant le mouvement d'ensemble. Ainsi, on peut considérer que les nœuds du maillage entre deux tubes suivent un mouvement uniforme et possède une vitesse de maillage égale à la vitesse des tubes. On suppose la vitesse des nœuds du maillage égale à la vitesse des tubes de part et d'autre du faisceau sur une large zone. Au niveau des extrémités de la cuve, la vitesse de maillage est nulle. Ainsi il existe une zone de transition pour la vitesse de maillage, éloignée du faisceau. Dans cette zone, la vitesse du fluide est supposée nulle. Afin de ne pas régénérer le maillage du faisceau à chaque itération on se place dans le repère lié au faisceau avec un maillage immobile. On va donc modifier l'équation (2.12) afin d'obtenir la formulation souhaitée.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Kc} \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} \right|_x + ((\mathbf{v} - \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \\
& \frac{1}{Kc} \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} \right|_x + ((\mathbf{v} - \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} + \left( (\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \\
& \frac{1}{Kc} \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} \right|_x + \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \underbrace{\left( (\dot{\mathbf{X}} - \zeta) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}}_{\text{erreur commise}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Or le terme d'erreur commise est nul proche du faisceau où  $\zeta = \dot{\mathbf{X}}$  et est nul loin du faisceau où  $\mathbf{v} = 0$ . On commet ainsi une erreur dans la description des équations mais qui n'impacte pas la physique de l'écoulement.

Cette formulation ne nécessite pas de remaillage. La non-déformation du maillage nous permet de réduire nos temps de calculs. Cependant, on se restreint ainsi à des mouvements rigide du faisceau. C'est pourquoi dans ces travaux les calculs utilisant cette formulation considèreront des faisceaux rigides.

## 2.3 Résolution numérique du système

Les équations à résoudre ont été présentées. Elles sont exprimées à l'aide d'une formulation ALE. On détaille à présent les outils de résolution du système. Le choix de la discrétisation temporelle est abordé. Puis on détaille la méthode de résolution du système en temps ainsi que les outils de traitement du terme non-linéaire de l'équation.

### 2.3.1 Choix de la discrétisation temporelle

On s'intéresse à la discrétisation temporelle de notre système. Afin de réduire le nombre de pas de temps, on choisi un schéma implicite d'ordre 2. On s'intéresse au schéma Euler rétrograde d'ordre 2 (ER2, aussi appelé Backward differential formula of order 2, BDF2). Cela revient à discrétiser le terme d'accélération temporelle de l'équation de quantité de

mouvement comme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t + dt) = \frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (2.14)$$

tout en traitant implicitement les autres termes de l'équation. On rappelle en annexe A que ce schéma est bien d'ordre 2. L'intérêt de ce schéma ne porte pas que sur son ordre. En effet, on veut connaître au mieux l'influence du fluide sur la structure. Cette structure lorsqu'elle est en mouvement, transmet une partie de son énergie au fluide. Celui ci la dissipe par viscosité, la conserve au sein de ses tourbillons, ou la retransmet à la structure par application d'une force. Afin de limiter la dissipation numérique de cette énergie, on veut que le schéma d'intégration soit aussi d'ordre 2 pour l'équation de variation d'énergie locale. Cette équation une fois intégrée sur le domaine fluide donne le bilan de puissance. La variation d'énergie locale s'obtient en multipliant l'équation de quantité de mouvement par le champ de vitesse fluide,

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2Kc} \mathbf{v}^2 \right) = \frac{1}{Kc} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P_{loc}(\mathbf{v}) = \left( -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} \quad (2.15)$$

que nous simplifierons en une équation 1D,

$$\frac{dv}{dt}(t + dt)v(t + dt) = P_{loc}(v(t + dt)). \quad (2.16)$$

Le schéma ER2 appliqué à cette équation s'écrit

$$\frac{1}{2\Delta t} \left( 3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1} \right) v^{n+1} = P_{loc}(v^{n+1}), \quad (2.17)$$

et l'erreur de troncature associé

$$\mathcal{T}_{ec}(\Delta t, t, v) = \frac{1}{2\Delta t} (3v(t + dt) - 4v(t) + v(t - dt))v(t + dt) - P_{loc}(v(t + dt)). \quad (2.18)$$

En utilisant les développements de Taylor (détaillé en annexe A) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ec}(\Delta t, t, v) = & \frac{dv}{dt}(t)v(t) + \Delta t \left[ \frac{d^2v}{dt^2}(t)v(t) + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] + \Delta t^2 \left[ -\frac{1}{6} \frac{d^3v}{dt^3}(t)v(t) + 2 \frac{d^2v}{dt^2} \frac{dv}{dt} \right] \\ & - P_{loc}(v(t)) - \Delta t \left[ \frac{dv}{dt} P'_{loc}(v(t)) \right] - \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2v}{dt^2} P'_{loc}(v(t)) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 P''_{loc}(v(t)) \right] \\ & + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (2.19)$$

On remarque que  $v$  est solution de (2.16), et que par dérivation

$$\frac{d^2v}{dt^2}(t)v(t) + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = P'_{loc}(v(t)) \frac{dv}{dt}(t), \quad (2.20)$$

et

$$\frac{d^3v}{dt^3}(t)v(t) + 3 \frac{d^2v}{dt^2} \frac{dv}{dt} = P''_{loc}(v(t)) \left( \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 + P'_{loc}(v(t)) \frac{d^2v}{dt^2}(t). \quad (2.21)$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ec}(\Delta t, t, v) &= -\frac{1}{6} \Delta t^2 \left[ 2 \frac{d^3v}{dt^3}(t)v(t) + 3 \frac{d^2v}{dt^2} \frac{dv}{dt} \right] + O(\Delta t^3) \\ &= O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'erreur de troncature est bien de l'ordre de  $\Delta t^2$ . Le schéma est d'ordre 2 pour l'équation de quantité de mouvement et pour l'équation de variation d'énergie cinétique. Nous les préférons donc à un schéma de type Euler rétrograde d'ordre 1, ou à un schéma de Crank-Nicholson d'ordre 2 pour l'équation de quantité de mouvement mais d'ordre 1 pour la variation d'énergie cinétique.



### La méthode de Newton

Une première façon de traiter cette non-linéarité est d'utiliser la méthode de Newton. Pour illustrer cette méthode on considère le problème 1D de convection-diffusion stationnaire

$$(v \cdot \nabla) v = \frac{1}{Re} \Delta v \quad (2.27)$$

La méthode de Newton est une méthode itérative. On cherche le zéro du résidu  $R(v)$  par sous-itération successive,

$$R(v) = (v \cdot \nabla) v - \frac{1}{Re} \Delta v = 0 \quad (2.28)$$

On linéarise ce résidu en  $R_{lin}(v)$  autour d'un état de départ  $v_i$ , avec  $i$  l'indice de sous-itération ( $0 \leq i \leq I_{max}$ ), de sorte que

$$R_{lin}(v) = \delta_{v-v_i} R(v_i) + R(v_i) = 0, \quad (2.29)$$

où  $\delta_g R(f)$  est la dérivée au sens des opérateurs de  $R$  en  $f$  selon  $g$ , et s'exprime comme

$$\delta_g R(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} R(f + \epsilon g). \quad (2.30)$$

Dans le cas de l'équation de convection-diffusion, on obtient

$$\delta_g R(f) = ((g \cdot \nabla) f + (f \cdot \nabla) g) - \frac{1}{Re} \Delta g. \quad (2.31)$$

Puisque  $\delta_g R(f)$  est linéaire par rapport à  $g$ , l'équation (2.29) revient à chercher

$$\delta_v R(v_i) + R(v_i) - \delta_{v_i} R(v_i) = 0, \quad (2.32)$$

soit

$$(v \cdot \nabla) v_i + (v_i \cdot \nabla) v - \frac{1}{Re} \Delta v = (v_i \cdot \nabla) v_i. \quad (2.33)$$

Résoudre ce système permet d'obtenir une estimation  $v_{i+1}$  de la solution. Si cette estimation n'est pas satisfaisante, on linéarise de nouveau le résidu autour de  $v_{i+1}$ . En pratique, on veut que  $\|v_{i+1} - v_i\| < \xi$  où  $\xi$  est un critère de convergence choisi.

Cette méthode présente l'avantage de converger rapidement vers la solution cherchée lorsque l'estimation de départ  $v_0$  est suffisamment proche. Lorsque qu'on utilise une discrétisation temporelle relativement grossière, les solutions peuvent fortement changer d'un pas de temps sur l'autre. On utilise donc de préférence une méthode de type point fixe qui possède un rayon de convergence plus important.

### La méthode du point fixe

La méthode du point fixe, appelé aussi méthode de Picard, est une méthode plus laxiste pour le choix de l'estimation de départ. Le principe est de remplacer la dérivé du résidu par une approximation approchée. Ainsi, dans l'équation (2.31), on peut approcher  $\delta_g R(f)$  de deux façons :

$$\begin{aligned} \delta_g R(f) &= (f \cdot \nabla) g - \frac{1}{Re} \Delta g \\ \text{ou } \delta_g R(f) &= (g \cdot \nabla) f - \frac{1}{Re} \Delta g \end{aligned} \quad (2.34)$$

Cela revient à garder un des deux termes de la linéarisation du terme convectif. Le choix du terme à garder se fait empiriquement. Dans notre cas, c'est la première expression de



Dans notre problème, la vitesse est imposée sur les bords des cylindres. On choisit donc une fonction test vérifiant  $\mathbf{w} = 0$  sur  $\Gamma_{F/S}$ . Travailler avec la formulation faible permet d'abaisser l'ordre des opérateurs. Ainsi, la pression et la fonction test  $q$  ont juste besoin d'être de carré intégrable. On les prend donc dans

$$L^2(\Omega_F) = \left\{ f : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega_F} f^2 d\Omega_F < \infty \right\}. \quad (2.39)$$

Les fonctions  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  ainsi que leurs dérivées premières quant à elles doivent être de carrés intégrables. On les prend donc dans l'espace

$$H_1(\Omega_F) = \left\{ \mathbf{f} : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_F) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_F) \right\}. \quad (2.40)$$

On a donc le problème suivant à résoudre

Trouver  $(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega_F) \times L^2(\Omega_F)$  tels que  $\mathbf{v}|_{\Gamma_{F/S}} = \dot{\mathbf{X}}$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_F} q \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega_F = 0, \\ \frac{1}{Kc} \int_{\Omega_F} \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega_F + \int_{\Omega_F} \mathbf{w} \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} d\Omega_F = \int_{\Omega_F} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega_F \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{w} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega_F - \int_{\Gamma_{F/S}} p (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} [(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$\forall (\mathbf{w}, q) \in H_0^1(\Omega_F) \times L^2(\Omega_F)$ .

### 2.4.1 Écriture matricielle

Afin de discrétiser le problème, on applique la méthode de Galerkin. On introduit les espaces d'approximation  $V_h$  et  $P_h$ , sous espaces de dimension  $2K$  et  $L$  des espaces de fonctions  $H^1(\Omega_F)$  et  $L^2(\Omega_F)$ . On définit chacun de ces deux sous espaces par construction des bases éléments finis  $\{\mathbf{w}_k(x)\}_{k=1}^{2K}$  et  $\{q_k(x)\}_{k=1}^L$ . Les dimensions  $K$  et  $L$  dépendent du type d'éléments finis utilisés et du nombre d'éléments utilisés pour mailler. On établit dans un premier temps le système matriciel qui découle du système (2.41), et on détaillera ensuite les types d'éléments finis utilisés.

On approche les variables  $\mathbf{v}$  et  $p$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_h(x) = \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathbf{w}_k(x) \\ p_h(x) = \sum_{k=1}^L p_k q_k(x) \end{array} \right. \quad (2.42)$$

et on les remplace par ces approximations dans le système de (2.41). Le problème à résoudre vaut quelque soit le couple de fonctions test  $(\mathbf{w}, q)$  choisies. Il est donc valable pour tout couple de fonctions de bases  $(\mathbf{w}_k, q_l)_{k=1 \dots 2K, l=1 \dots L}$ . Pour un couple en particulier

le problème (2.41) s'approche par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in V_H \times P_H \text{ tels que } \mathbf{v}_h|_{\Gamma_{F/S}} = \dot{\mathbf{X}} \text{ et} \\ \sum_{i=1}^{2K} v_i \int_{\Omega_F} q_l \nabla \cdot \mathbf{w}_i \, d\Omega_F = 0, \\ \frac{1}{Kc} \sum_{i=1}^{2K} \frac{\partial v_i}{\partial t} \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \, d\Omega_F + \sum_{i=1}^{2K} v_i \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_k \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{w}_i \, d\Omega_F = \\ \sum_{j=1}^L p_j \int_{\Omega_F} q_j \nabla \cdot \mathbf{w}_k \, d\Omega_F \\ - \frac{1}{Re} \sum_{i=1}^{2K} v_i \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{w}_k : \left( \nabla \mathbf{w}_i + {}^t \nabla \mathbf{w}_i \right) \, d\Omega_F \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\forall (\mathbf{w}_k, q_l)_{k=1 \dots 2K, l=1 \dots L} \in V_H \times P_H.$$

Le système d'équation (2.43) se traduit matriciellement par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}V = 0 \\ \frac{1}{Kc} \mathcal{M} \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{N}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}})V + {}^t \mathcal{G}P + \frac{1}{Re} \mathcal{L}V = 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

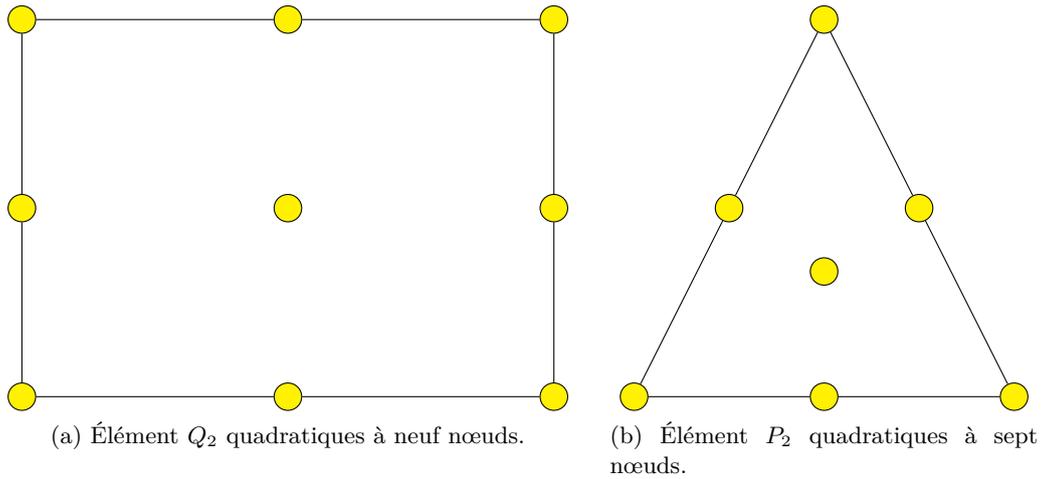
où

$$\left\{ \begin{array}{l} V = v_i = {}^t(v_1, \dots, v_{2K}) \\ P = p_j = {}^t(p_1, \dots, p_L) \\ \mathcal{M} = m_{i,j} = \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \, d\Omega_F \\ \mathcal{N}(\bullet) = n_{i,j}(\bullet) = \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_j \cdot \left( (\bullet) \cdot \nabla \right) \mathbf{w}_i \, d\Omega_F \\ \mathcal{G} = g_{i,j} = - \int_{\Omega_F} q_j \nabla \cdot \mathbf{w}_i \, d\Omega_F \\ \mathcal{L} = l_{i,j} = \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{w}_j : \left( \nabla \mathbf{w}_i + {}^t \nabla \mathbf{w}_i \right) \, d\Omega_F \end{array} \right. \quad (2.45)$$

On choisit de mailler notre domaine à base de quadrangles quand cela est possible et à base de triangles sinon. Les triangles sont également utilisés dans les zones de transition, lorsque que l'on veut passer d'un maillage raffiné (dans les zones d'intérêt) à un maillage très grossier (dans des zones de moindre importance, par exemple sur les extrémités du domaine ou la vitesse fluide est nulle). Pour l'inconnue vitesse, on choisit des éléments de type lagrangien bidimensionnel  $Q_2$  classique pour les quadrangles représenté en figure 2.3. Il s'agit d'éléments quadratique à 9 nœuds (4 aux sommets, 4 aux milieux des arêtes, et un central). Pour les triangles, on choisit des éléments triangulaires quadratique pour fluides, représenté en figure 2.3. Il s'agit d'éléments  $P_2$  classiques auxquels on ajoute un nœud central (3 aux sommets, 3 aux milieux des arêtes et un central).

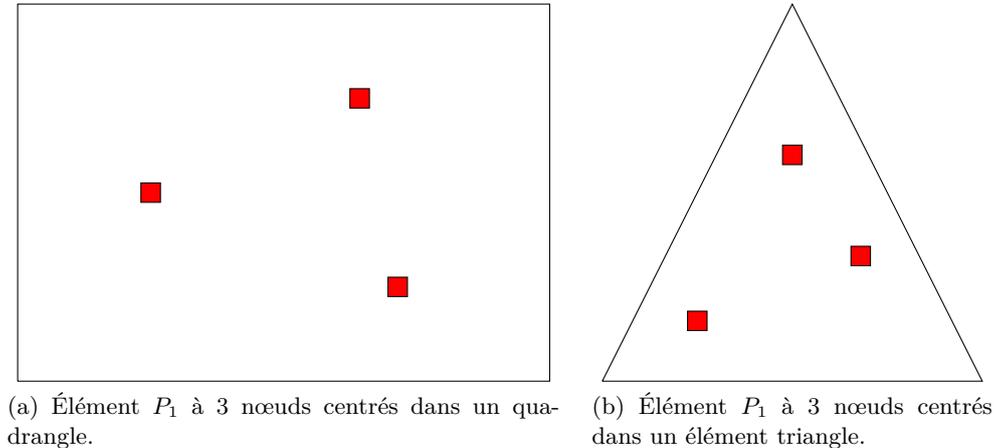
Le choix des éléments finis de pression n'est pas immédiat. En effet, ce choix doit respecter la condition LBB (ou condition inf-sup) assurant la compatibilité entre les vitesses et les pressions calculées. D'un point de vue numérique, cela revient à assurer l'inversibilité du système (2.44) [10]. La condition LBB est respectée si et seulement si il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\inf_{q \in \mathcal{L}^2(\Omega)} \left[ \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^2} \int_{\Omega} \frac{q \nabla \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)^2} \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} \, d\Omega \right] \geq \beta \quad (2.46)$$

FIGURE 2.3 – Éléments finis  $Q_2$  et  $P_2$  utilisés pour l'inconnue de vitesse.

Du point de vue physique, cette condition empêche l'apparition de modes parasites de pression dont l'amplitude oscille d'éléments à éléments tout en conservant des gradients nuls aux nœuds de vitesse. On va donc choisir des éléments finis en pression afin d'obtenir un couple de types d'éléments stable.

Notre choix s'arrête sur des éléments pression  $P_1$  par morceau, à 3 nœuds centrés dans l'élément, comme représentés en figure 2.4. On travaille donc avec un couple d'éléments

FIGURE 2.4 – Éléments finis  $P_1$  utilisés pour l'inconnue de pression.

équivalents aux éléments de type Crouzeix-Raviart 2D. Ces couples d'éléments sont stables [10, 31], d'ordre spatial 3 en vitesse et 2 en pression, donc précis. Cette précision nous permet de travailler avec des maillages peu raffinés.

### 2.4.2 Calcul des forces

Le calcul des forces exercées par le fluide sur la structure est un point très important dans notre étude. En effet, dans le cas d'un mouvement non forcé, c'est cette force qui va, avec la sollicitation externe, piloter le mouvement du faisceau, et qui à son tour va

perturber le fluide. Du point de vue des équations, la force exercée par le fluide sur la structure se calcule par intégration du tenseur des contraintes fluides selon la normale, le long du contour de la structure.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{f \rightarrow s} &= \int_{\Gamma_{F/S}} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_{F/S}} \left[ -p \underline{\underline{Id}} + \frac{1}{Re} \left( {}^t \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \right) \right] \mathbf{n} \, d\Gamma \\
&= \left[ \int_{\Gamma_{F/S}} -pn_x + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} n_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_y \right) d\Gamma \right] \mathbf{e}_x \\
&\quad + \left[ \int_{\Gamma_{F/S}} -pn_y + \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} n_y + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_x \right) d\Gamma \right] \mathbf{e}_y
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Cela nécessite d'évaluer les termes de ces intégrales en chaque point du contour du solide. Pour cela il faut tout d'abord déterminer les dérivées partielles spatiales des composantes de la vitesse sur les points de la frontières du domaine de calcul. La pression n'est pas définie sur ces points. Il faut ensuite approximer cette pression sur le bord pour calculer la force.

Cependant on peut dans notre cas s'appuyer sur la formulation variationnelle du problème pour évaluer la force. En reprenant l'équation de conservation de quantité de mouvement de la formulation variationnelle (2.38) et en choisissant comme fonction test  $\mathbf{w}_k$ , la  $k^{\text{ième}}$  fonction de la base de l'espace vectoriel  $V_H$  d'approximation des vitesses, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Kc} \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, d\Omega_F + \int_{\Omega_F} \mathbf{w}_k \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \, d\Omega_F &= \int_{\Omega_F} p \nabla \cdot \mathbf{w}_k \, d\Omega_F \\
- \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{w}_k : \left( \nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v} \right) \, d\Omega_F - \int_{\Gamma_{F/S}} p (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma & \\
+ \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} \left[ (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}_k \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma . &
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Ce qui s'exprime également sous forme matricielle par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Kc} \mathcal{M}_{k,\cdot} \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{N}_{k,\cdot} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) V + \left( {}^t \mathcal{G} \right)_{k,\cdot} P + \frac{1}{Re} \mathcal{L}_{k,\cdot} V &= - \int_{\Gamma_{F/S}} p (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \\
+ \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} \left[ (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}_k \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma &
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Le membre de gauche apparaît comme la résultante des quatre opérateurs de discrétisation du problème au point  $k$ . On la note  $R_k$ .

- Si l'indice  $k$  représente un point en dehors de la frontière du domaine alors la fonction  $\mathbf{w}_k$  est nulle sur les points de cette frontière et les intégrales de droite sont nulles. On a donc  $R_k = 0$ , en effet la résultante est le résidu de la résolution du problème au point  $k$ . Au cours de la résolution du calcul, les vitesses et pressions sont calculées de façon à rendre nul ce résidu (de façon approchée).
- Si  $k$  est un point appartenant à  $\Gamma_{F/S}$ , alors  $\mathbf{w}_k \neq 0$  sur certains points de la frontière des cylindres et la résultante  $R_k$  représente  $(\mathbf{F}_{f \rightarrow s})_k$  la force exercée par le fluide sur la structure au point  $k$ .

### 2.4.3 Bilan des puissances

De la même façon que les forces, la formulation variationnelle du problème permet d'obtenir les termes du bilan des puissances. L'équation de quantité de mouvement de

la formulation variationnelle (2.38) est valable pour toute fonction test de l'espace des vitesses. Elle est donc valable en prenant comme fonction test la vitesse fluide. Cette équation devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kc} \int_{\Omega_F} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega_F + \int_{\Omega_F} \mathbf{v} \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} d\Omega_F &= \int_{\Omega_F} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega_F \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega_F - \int_{\Gamma_{F/S}} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma & \\ + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} [(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma . & \end{aligned} \quad (2.50)$$

En notant  $e_c = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  l'énergie cinétique locale et  $P_{visc} = \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega_F$  la puissance des efforts visqueux, on montre annexe B que l'on obtient

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{Kc} \frac{\partial}{\partial t} e_c + \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) e_c d\Omega = -P_{visc} - (\mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \dot{\mathbf{X}}). \quad (2.51)$$

Les termes dans l'intégrale correspondent à la description ALE adimensionnée de  $\frac{de_c}{dt}$ , ainsi on obtient le bilan de puissance

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_c + P_{f \rightarrow s} + P_{visc} &= 0, \\ \text{ou} & \\ \frac{d}{dt} E_c + P_{visc} &= P_{s \rightarrow f}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec  $\frac{d}{dt} E_c$  la puissance cinétique. Ce bilan exprime le fait que sur un intervalle de temps, l'énergie transmise par la structure au fluide et stockée dans le mouvement du fluide (tourbillon ou écoulement) ou dissipée par viscosité. L'énergie stockée est soit retransmise à la structure, soit dissipée.

Numériquement, on s'appuie également sur la formulation variationnelle pour déterminer ce bilan des puissances. Le bilan s'obtient en considérant comme fonction test la vitesse fluide, soit la combinaison linéaire (2.42)

$$\mathbf{v}_h(x) = \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathbf{w}_k(x). \quad (2.53)$$

On obtient ce bilan sous forme discrète à partir de

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kc} \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathcal{M}_{k,\cdot} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathcal{N}_{k,\cdot} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) V + \sum_{k=1}^{2K} v_k ({}^t \mathcal{G})_{k,\cdot} P + \sum_{k=1}^{2K} v_k \frac{1}{Re} \mathcal{L}_{k,\cdot} V &= \\ - \int_{\Gamma_{F/S}} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} [(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma, & \end{aligned} \quad (2.54)$$

soit

$$\frac{1}{Kc} \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathcal{M}_{k,\cdot} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2K} v_k \mathcal{N}_{k,\cdot} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) V + \sum_{k=1}^{2K} v_k ({}^t \mathcal{G})_{k,\cdot} P + \sum_{k=1}^{2K} v_k \frac{1}{Re} \mathcal{L}_{k,\cdot} V = -\mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (2.55)$$

On remarque que  $\sum_{k=1}^{2K} v_k \left( {}^t \mathcal{G} \right)_{k,\cdot} = {}^t \left( \sum_{k=1}^{2K} \mathcal{G}_{\cdot,k} v_k \right) = {}^t (\mathcal{G}V) = 0$ . On identifie donc les termes de puissance cinétique et de puissance visqueuse sous forme discrète par :

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} E_c &= \frac{1}{Kc} V \mathcal{M} \frac{\partial V}{\partial t} + V \mathcal{N} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) V \\ - P_{visc} &= \frac{1}{Re} V \mathcal{L} V \end{aligned}$$

On vient de présenter les outils de discrétisation spatiale du système grâce à la méthode des éléments finis. Les types d'éléments utilisés ont été introduits et le système matriciel à résoudre a été détaillé. La méthode des éléments finis est pratique lorsque l'on veut évaluer les résultantes des forces sur les surfaces du domaine. Ce point a été détaillé. Ceci s'applique également au bilan des puissances du problème.

La section suivante traite des valeurs de paramètres de discrétisation choisis pour réaliser les simulations de faisceau oscillant.

## 2.5 Choix des paramètres numériques

Le schéma de discrétisation temporelle et la méthode des éléments finis utilisée pour la discrétisation spatiale du problème ont été introduits dans les deux sections précédentes. Il convient à présent de choisir les paramètres de discrétisation en espace et en temps. L'objectif est de mettre en place des calculs permettant de rendre compte des phénomènes physiques mis en jeu avec une précision satisfaisante tout en considérant des temps de calculs raisonnables. On détermine dans cette section les valeurs des paramètres numériques répondant à ce compromis et valables pour la plage de  $Kc-Re$  qui sera considérée au chapitre 3. La première sous-section détermine la finesse de la discrétisation spatiale du problème. La sous-section suivante discute du pas de temps choisi pour la discrétisation temporelle. On présente enfin la géométrie de calcul qui sera utilisée dans le chapitre 3.

### 2.5.1 Pas d'espace

La zone d'intérêt de nos calculs se situe au niveau du faisceau. On ne s'intéresse pas aux champs de vitesses fluide éloignés du faisceau. Dans ces zones éloignées on choisit donc une discrétisation grossière afin de gagner en temps de calcul. Dans la zone du faisceau, on souhaite capter au mieux l'influence du fluide sur les tubes. L'épaisseur des mailles au voisinage du cylindre est guidée par l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  pour une plaque plane oscillante dans un fluide au repos. L'épaisseur de cette couche limite appliqué au cas du cylindre est donnée [24, 38] par

$$\delta = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{Kc}{Re}}. \quad (2.56)$$

La plage de  $Kc-Re$  qui sera étudiée au chapitre 3 varie pour le  $Kc$  de  $10^{-2}$  à 10 et pour le  $Re$  de 40 à 500. L'épaisseur de la couche limite selon la formule (2.56) pour chacune de ces configurations est donnée dans le tableau 2.1.

Pour les simulations qui seront présentées dans les chapitres suivants, on fait le choix d'une épaisseur de discrétisation  $\Delta x$  de 0.05 sur les bords des cylindres. Cette épaisseur convient donc pour la majorité des simulations, exceptées celles aux plus petits  $Kc$  où la

$\delta$	$Re = 40$	100	200	250	500
$Kc = 0.01$	0.025	0.015	0.011	0.01	0.007
0.1	0.08	0.05	0.035	0.032	0.023
1	0.25	0.16	0.11	0.1	0.07
5	0.56	0.36	0.25	0.23	0.16
10	0.8	0.5	0.35	0.32	0.23

TABLE 2.1 – Estimation de l'épaisseur de la couche en fonction de la configuration de  $Kc-Re$ .

discrétisation sera raffinée.

### 2.5.2 Pas de temps

Le problème que l'on souhaite modéliser concerne des tubes qui se déplacent dans du fluide. Ces tubes ont une vitesse  $\dot{\mathbf{X}}$  d'amplitude maximale  $V$ . Ainsi la vitesse des tubes ne doit pas dépasser la vitesse numérique du calcul, c'est à dire qu'au cours d'un pas de temps le déplacement des particules de fluide  $\dot{\mathbf{X}}\Delta t$  ne doit pas excéder la discrétisation spatiale  $\Delta x$ . Cette condition est la condition CFL qui s'écrit sous sa forme adimensionnée comme

$$Kc \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C, \quad (2.57)$$

où  $C$  est une constante de l'ordre de 1. La condition CFL pilote notre choix pour la discrétisation temporelle. Ainsi plus le  $Kc$  augmente, plus la discrétisation temporelle sera fine. Les calculs pour les grands  $Kc$  seront donc plus coûteux. Inversement, pour les petits  $Kc$  la discrétisation temporelle peut être plus grossière. Cependant, dans ces cas, on sera limité par la volonté de conserver une discrétisation temporelle suffisante du phénomène des oscillations du faisceau.

En pratique, on choisit un pas de temps maximum de  $10^{-2}$  afin de conserver une discrétisation temporelle des oscillations du faisceau suffisante (qui ont une période ou une pseudo-période de l'ordre de 1). Une période d'oscillation du faisceau est donc décrite par au minimum 100 pas de temps. Cette discrétisation s'applique pour les configurations d'écoulement de  $Kc$  de  $10^{-2}$  à 5. Puis pour les plus grands  $Kc$ , soit  $Kc = 10$ , on choisit un pas de temps de  $5 \times 10^{-3}$ . Ces choix de discrétisations assurent que sur un pas de temps le déplacement du cylindre ne se déplace pas de plus de 5% de son diamètre.

### 2.5.3 Géométrie du calcul

Dans le chapitre suivant, on considèrera un faisceau oscillant (dont le mouvement sera forcé) immergé dans un fluide au repos. Le faisceau est composé de 36 tubes (6 par 6) agencés en mailles carrées. L'espacement entre les tubes est fixé à 1.7. Le système est contenu dans une cuve. Cette cuve est prise rectangulaire. Elle est supposée fortement étendue dans la direction des oscillations du faisceau. Afin de réduire la taille du domaine on considère le faisceau confiné sur ses bords latéraux. La géométrie du faisceau est représentée sur la figure 2.5. La longueur  $L$  et la hauteur  $H$  du domaine de calcul sont des paramètres importants.

La hauteur est prise égale à la hauteur du faisceau (espacement compris) soit  $6 \times 1.7$ . Afin de minimiser l'impact des bords latéraux du domaine sur l'écoulement au sein du

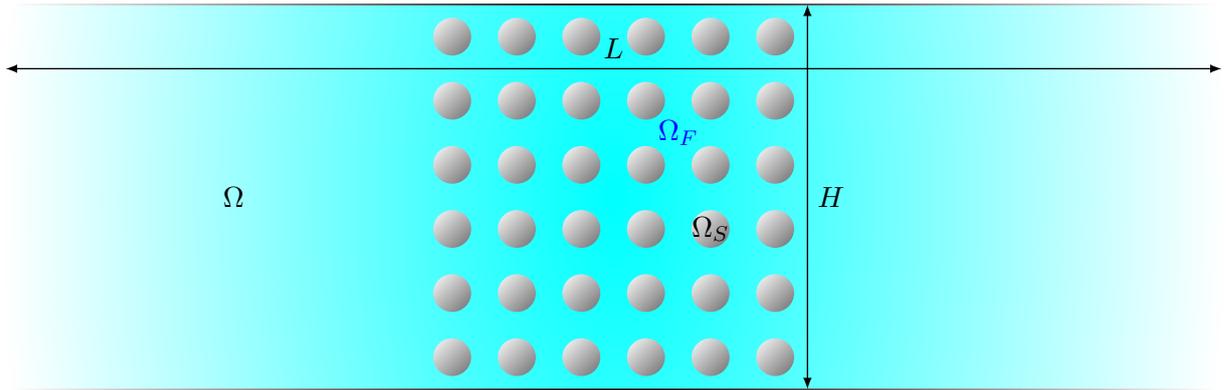


FIGURE 2.5 – Faisceau de tubes confiné sur ses bords latéraux dans une cuve rectangulaire.

faisceau et pour ne pas avoir à considérer un faisceau de trop grande taille, on applique une condition de glissement sans frottement sur ces bords.

La longueur du domaine doit être suffisamment grande afin d’avoir des vitesses de fluide nulles aux extrémités du domaine. En effet, on utilise une formulation ALE pour décrire notre système d’équation. A chaque pas de temps, on prend une vitesse de maille égale à la vitesse du faisceau et on ne remaille pas le domaine. Il est expliqué en section 2.2 que l’erreur ainsi commise n’impacte pas la physique de l’écoulement si les vitesses de fluide aux extrémités sont nulles. On choisit pour cela une longueur de domaine égale à 5 largeurs de faisceau. Une condition limite d’adhérence pour la vitesse est appliquée sur les extrémités du domaine. Une vitesse nulle  $y$  est imposée.

#### 2.5.4 Validation des choix de paramètres numériques

On valide à présent le choix des paramètres numériques des simulations qui seront réalisées au chapitre suivant. Les paramètres pouvant influencer les résultats des simulations sont la longueur  $L$ , le pas de temps  $\Delta t$ , la discrétisation spatiale  $\Delta x$  au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes. La longueur  $L$  est prise suffisamment large pour ne pas influencer les calculs. Le pas de temps  $\Delta t$  est dépendant de la discrétisation spatiale  $\Delta x$ .

On réalise une brève étude de sensibilité par rapport au pas d’espace  $\Delta x$ . Dans les simulations qui seront réalisées on souhaite estimer correctement les forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau tout en minimisant les temps de calculs nécessaires. On réalise des simulations pour des discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.0375$  et  $\Delta x = 0.025$ . Les pas de temps adaptés respectifs sont utilisés selon la condition CFL évoquée précédemment.

On se place dans une configuration d’écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ . Les figures 2.6 et 2.7 représentent les forces de trainée et de portance exercées par le fluide sur les 36 tubes du faisceau dans le cas de discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de  $\Delta x = 0.05$  (—),  $\Delta x = 0.0375$  (—) et  $\Delta x = 0.025$  (—) pour un même laps de temps de simulation. Ces figures montrent que la discrétisation d’espace n’influence que très légèrement la précision du calcul. On distingue des différences qui sont l’effet de perturbations mieux captées par les simulations plus raffinées. Cependant la précision obtenue n’est pas assez significative par rapport aux augmentations des temps de calculs générés.

On valide ainsi le choix de la discrétisation  $\Delta x$  fait précédemment.

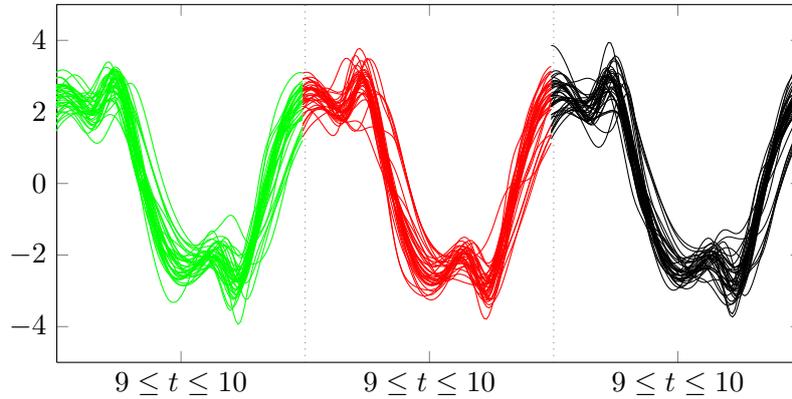


FIGURE 2.6 – Comparaison des forces de trainée calculées sur les 36 tubes du faisceau pour une configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$  et des discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de  $\Delta x = 0.05$  (—),  $\Delta x = 0.0375$  (—) et  $\Delta x = 0.025$  (—) pour un même laps de temps de simulation.

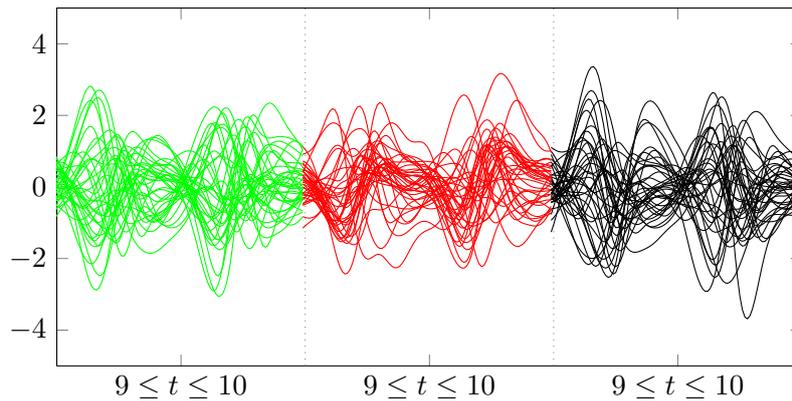


FIGURE 2.7 – Comparaison des forces de portance calculées sur les 36 tubes du faisceau pour une configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$  et des discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de  $\Delta x = 0.05$  (—),  $\Delta x = 0.0375$  (—) et  $\Delta x = 0.025$  (—) pour un même laps de temps de simulation.

Afin de conclure ce chapitre, on présente le schéma de couplage que nous utiliserons pour réaliser les simulations des problèmes d'interaction fluide-structure lorsque le mouvement du faisceau ne sera pas forcé et sera régi par une dynamique propre.

## 2.6 Les schémas de couplages

Dans cette section on présente les méthodes de couplages pour la résolution de problèmes d'interaction fluide-structure. Ces outils seront utilisés afin de réaliser les simulations de référence du chapitre 5.

Le couplage fluide-structure se définit comme un échange instantané de quantité de mouvement et d'énergie à chaque instant via l'interface fluide-structure. Les déplacements

de l'interface induisent une perturbation de l'écoulement, et réciproquement une variation de l'écoulement fluide modifie les efforts appliqués à la structure. Dans le système (2.5), p.19, l'interaction fluide-structure est exprimée par l'application de la force exercée par le fluide sur chaque tube dans l'équation de dynamique du faisceau et par la condition d'adhérence et d'égalité des vitesses sur l'interface fluide-structure. Si dans le cas général on considère un milieu continu fluide et un milieu continu structure, l'interaction fluide-structure se traduit sur l'interface fluide-structure par une condition limite d'égalité des tenseurs des contraintes des deux milieux selon la normale à cette interface et une condition limite d'égalité de la dynamique de cette interface du point de vue des deux milieux.

Numériquement, on distingue deux familles de méthodes pour traiter ce couplage. La première est la famille des méthodes d'intégrations simultanées, également appelé couplage monolithique. Le principe de l'intégration simultanée consiste à écrire les équations décrivant les deux milieux dans un unique système. Cette approche est donc numériquement exacte. Elle respecte la conservation de l'énergie. Cependant l'intégration simultanée du fluide et de la structure n'est pas simple à réaliser. Le nombre d'inconnues peut devenir très important et engendrer des matrices mal conditionnées. Cette approche est donc réservée en pratique aux géométries simples et aux systèmes comportant peu de degrés de libertés. De plus, dans le cas de fortes non linéarités ces méthodes restent hors de portée pratique.

La seconde famille de méthodes, les plus couramment utilisées, est l'approche partitionnée. Cette approche consiste à résoudre les équations des systèmes fluide et solide de façon séparée en tenant compte de conditions à l'interface entre les deux parties. L'avantage de cette approche est que l'on peut prendre en compte des méthodes de résolutions différentes et surtout adaptées pour les systèmes solide et fluide. Les difficultés liées à la conservation de l'énergie, lors des passages d'informations entre les codes fluide et structure, doivent alors être gérées. Cependant la mise en place plus simple et le côté flexible de l'approche font qu'elle est préférée à l'approche monolithique. Le lien et les échanges d'informations réciproques entre les solveurs fluide et solide sont assurés par des algorithmes de couplage.

Les algorithmes de couplages de l'approche partitionnée prennent en compte deux aspects : le couplage en espace et le couplage en temps.

Dans le cas général d'un couplage entre un domaine fluide et un domaine solide, il est fréquent que la discrétisation du premier domaine soit beaucoup plus raffinée que la discrétisation du second. Les maillages employés dans l'un ou l'autre des domaines sont adaptés à la physique des milieux considérés. Ainsi il est peu probable que les discrétisations de l'interface du point de vue des deux domaines soient numériquement égales. Des projections des efforts fluide sur l'interface fluide-structure du domaine solide et des projections du champ de déplacement du solide sur l'interface fluide-structure du domaine fluide sont nécessaires. Des exemples d'algorithmes de couplage en espace sont donnés dans [25]. Dans nos travaux, le couplage en espace passe par l'application de la force exercée par le fluide sur chaque tubes dans l'équation de dynamique du faisceau et par la condition d'adhérence et d'égalité des vitesses sur l'interface fluide-structure. On ne rencontre donc pas de difficulté liée au couplage en espace.

Le second aspect des algorithmes de couplage est la stratégie de couplage en temps. A chaque instant les déplacements de la structure vont perturber l'écoulement du fluide. Instantanément celui-ci va imposer des efforts sur l'interface fluide-structure modifiant la

dynamique de la structure. L'emploi de solveurs séparés pour le fluide et la structure pose problème. En effet, le solveur fluide, pour avancer du temps  $t^n$  au temps  $t^{n+1}$  nécessite la connaissance de la dynamique du solide à l'instant  $t^{n+1}$ . De même le solveur structure pour avancer du temps  $t^n$  au temps  $t^{n+1}$  nécessite la connaissance des distributions de pression sur l'interface fluide-structure au temps  $t^{n+1}$ . Ce décalage en temps entre les deux résolutions est représenté sur la figure 2.8.

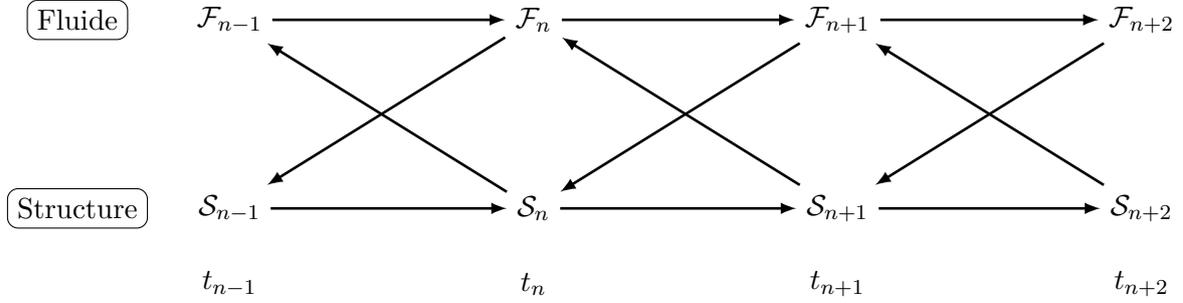


FIGURE 2.8 – Décalages temporels entre les résolutions des systèmes fluide et solide.

Des stratégies de couplages existent afin de gérer ces décalages en temps. On distingue 3 catégories [50] :

- Les algorithmes décalés, pour lesquels chaque sous-système est avancé en temps successivement. Des prédictions sur les informations échangées sont effectuées permettant de respecter au mieux la conservation de l'énergie,
- les algorithmes parallèles, pour lesquels les deux sous-systèmes sont avancés en temps parallèlement. Des prédictions sur les informations échangées sont également effectuées,
- les algorithmes itérés, pour lesquels chaque pas de temps peut donner lieu à plusieurs calculs afin d'assurer la convergence vers la conservation de l'énergie du système ou la satisfaction du principe d'action-réaction. La stratégie de chaque sous itérations peut être similaire à l'un des deux algorithmes précédent.

Les schémas de couplages les plus utilisés sont les algorithmes décalés. Leur simplicité à mettre en œuvre est la raison de leur succès. Les résolutions des équations du fluide et du solide se font l'une après l'autre. Le premier exemple d'algorithme décalé est l'algorithme de couplage explicite synchrone, introduit par [25]. On le détaille car c'est celui que nous utiliserons pour réaliser les simulations de référence du chapitre 5. L'algorithme est résumé dans la figure 2.9 et se déroule comme suit :

1. Partant du temps  $t^n$ , une prédiction est effectuée pour estimer la dynamique de la structure au pas de temps suivant. La position de l'interface est ainsi extrapolée à partir de la position courante. Notons  $X_{\Gamma_{F/S}}$  cette position. Sa prédiction au pas de temps suivant est donnée sous sa forme générale par

$$X_{\Gamma_{F/S}}^p = X_{\Gamma_{F/S}}^n + \alpha \Delta t \dot{X}_{\Gamma_{F/S}}^n + \beta \Delta \left( \dot{X}_{\Gamma_{F/S}}^n - \dot{X}_{\Gamma_{F/S}}^{n-1} \right). \quad (2.58)$$

L'ordre du schéma dépend du choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Par exemple avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$  le schéma est d'ordre 1 et pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = \frac{1}{2}$  celui-ci est d'ordre deux [51].

Dans notre cas, l'influence de la dynamique de la structure sur l'écoulement fluide

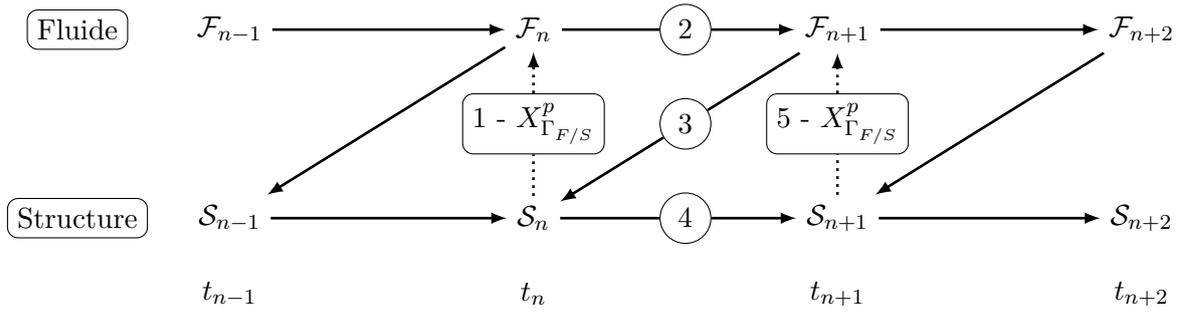


FIGURE 2.9 – Schéma représentant le déroulement de l'algorithme de couplage explicite synchrone.

passer par la condition limite imposée en vitesse sur l'interface fluide structure. Ainsi on réalise plutôt une prédiction sur la vitesse de l'interface en dérivant par rapport au temps la formule (2.58) d'ordre deux. On obtient la prédiction sur la vitesse suivante :

$$\dot{X}_{\Gamma_{F/S}}^p = \dot{X}_{\Gamma_{F/S}}^n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{X}_{\Gamma_{F/S}}^n. \quad (2.59)$$

2. Le sous-système fluide est résolu en prenant en compte les valeurs de la prédiction pour la dynamique de la structure.
3. À partir de cet état du système fluide au temps  $t^{n+1}$ , on calcule les forces exercées par le fluide sur la structure au temps  $t^{n+1}$ .
4. Le sous-système structure est à son tour résolu. Celui-ci se résume dans notre cas à une équation d'oscillateur soumis à des efforts externes et est résolu à l'aide d'un schéma de Newmark.
5. Le système est ainsi résolu au temps  $n + 1$ . On passe au pas de temps suivant.

On choisit ce schéma de couplage car notre sous-système structure est un système linéaire, facile à prédire et dont la résolution est immédiate.

Lorsque les discrétisations temporelles requises entre les deux sous-systèmes diffèrent, par exemple si le sous-système structure demande un pas de temps moins exigeant que le sous-système fluide mais que les temps de calculs engendrés par sa résolution sont importants, on peut utiliser un schéma de couplage similaire au schéma explicite synchrone et introduire des sous-itérations pour le sous-système fluide [49].

Parmi les schémas de couplage décalés on trouve également le schéma explicite asynchrone. Son principe consiste à considérer des pas de temps intermédiaires, aux  $t^{n+\frac{1}{2}}$ . Le sous-système fluide est résolu sur cette échelle de temps. La résolution du problème se fait alors par saut d'un système à un autre. Ce schéma de couplage peut donner une précision d'ordre 3 sur la conservation de l'énergie mais uniquement dans des conditions bien particulières (détaillées dans [51]). De plus, le décalage des pas de temps impose de prédire l'état des forces exercées par le fluide sur la structure à chaque pas de temps, ce que le schéma explicite synchrone ne demande pas. C'est pourquoi on ne choisit pas ce schéma de couplage.

La seconde catégorie de schémas de couplage regroupe les schémas parallèles. Des exemples de schémas sont donnés dans [49]. L'utilisation de ces schémas se fait surtout lorsque les résolutions des deux sous-systèmes à chaque pas de temps génèrent des temps

de calculs importants et que l'on souhaite en économiser. Ainsi le choix de deux résolutions simultanées (sur des calculateurs différents) trouve ses motivations. En dehors de ces conditions, le schéma n'a pas un bon ordre de précision et les méthodes proposées pour l'améliorer complexifient la mise en place de ce schéma.

Enfin, la dernière catégorie de schémas de couplage concerne les schémas itératifs semi-implicite ou implicite. Dans le cas de ces schémas, des sous-itérations sont introduites à chaque pas de temps de sorte que les vitesses et les contraintes à l'interface soient égales. Dans le cas du schéma semi-implicite la prédiction de l'interface se fait au début du pas de temps et n'est pas modifiée par la suite. Les sous-itérations se font alors sur la résolution du sous-système fluide et solide. Dans le cas du schéma implicite, les sous-itérations concernent également la prédiction de la position de l'interface. Si les critères de convergence ne sont pas satisfait, alors celle-ci est améliorée. Des descriptions de ces schémas sont données dans [11].

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les outils numériques de résolution des systèmes d'équations pour la simulation d'un problème d'interaction fluide-structure. Le problème adimensionné d'un faisceau de tube en présence d'un fluide visqueux et soumis à une sollicitation externe a été posé. On a introduit la formulation ALE servant à décrire les équations du problème. La résolution du système fluide est ensuite décrite. Les équations sont discrétisées en utilisant un schéma en temps implicite dit Euler rétrograde d'ordre 2. Un algorithme de projection-correction est utilisé afin de résoudre en temps le système. Les termes non-linéaires sont traités par sous-itération grâce à une méthode du point fixe relaxée. Les simulations sont réalisées sous le code de calcul CAST3M. Ce code utilise une formulation éléments finis. Le problème matriciel à résoudre est détaillé. Les choix des paramètres de calcul sont ensuite expliqués. Ces outils serviront à la réalisation de simulations numériques d'un faisceau de tubes oscillant dans un domaine de fluide et de vibration d'un faisceau de tubes en présence de fluide. Pour ce dernier cas, le couplage fluide-structure est modélisé par une approche partitionnée et un algorithme explicite synchrone sera utilisé pour le couplage en temps.

## Chapitre 3

# Dynamique de l'écoulement dans un faisceau oscillant

Ce chapitre présente les résultats des simulations effectuées dans le cas d'un faisceau oscillant dans un domaine de fluide confiné. Les travaux réalisés dans la littérature sur l'oscillation d'un tube seul dans un large domaine de fluide sont présentés afin de montrer la dépendance de l'écoulement envers les paramètres adimensionnels du système. On se focalise sur la plage de paramètres  $0 < Kc \leq 10$  et  $0 < Re \leq 500$ . On se restreint à un  $Kc$  maximum de 10 car ce paramètre diminue le pas de temps nécessaire aux simulations et augmente ainsi les temps de calcul. On se restreint également à un  $Re$  maximum de 500 afin de ne pas se placer dans des configurations d'écoulements turbulents. Le cas du faisceau est plus complexe du fait d'un nombre plus important de paramètres. Une classification sommaire des écoulements est réalisée dans le cas de l'oscillation d'un faisceau dans un domaine confiné de fluide. Les comportements des forces exercées par le fluide sur le faisceau sont présentés et discutés.

L'écoulement induit par les oscillations est fortement dépendant des paramètres  $Kc$  et  $Re$ , mais aussi de l'espacement entre deux tubes. Dans cette analyse le rapport entre espacement et diamètre d'un tube est fixé à  $e = 1.7$ . Les applications industrielles (cœurs de réacteurs) mettent en jeu des faisceaux de tubes plus serrés (de l'ordre de 1.32 pour un assemblage REP). Cependant, on trouve dans la littérature des travaux sur des faisceaux (oscillant ou sous écoulement) concernant des espacement plus large ( $1.44 \leq e \leq 4$  [6, 16, 56, 40, 5, 41, 21]). Si les tubes sont trop rapprochés au sein du faisceau, certains mécanismes pourraient devenir prédominant devant d'autre, ce qui les masqueraient. Pour plus de généralités, on fait le choix d'un espacement légèrement plus aéré de notre faisceau.

### 3.1 Cylindre isolé oscillant dans un large domaine de fluide

La plage de paramètres  $0 < Kc \leq 10$  et  $0 < Re \leq 500$  a déjà fait l'objet de recherche dans la littérature dans le cas d'un cylindre seul oscillant dans un large domaine de fluide. Tatsuno et Bearman [59] visualisent expérimentalement les écoulements et leurs structures détaillées (bidimensionnelles et tridimensionnelles) issus de l'oscillation d'un cylindre dans une cuve de fluide pour une plage de  $Kc$  situé entre 1.6 et 15 et des valeurs de  $\beta$  entre 5 et 160, où le  $\beta = \frac{Re}{Kc} = \frac{D^2}{\nu T}$  est le nombre de Stokes. Ce nombre représente l'ordre de grandeur de l'aire de l'obstacle sur l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite. Ces expérimentations se placent principalement dans notre domaine d'intérêt. Elles ont permis d'établir une cartographie des écoulements dans le plan  $\beta - Kc$  que l'on peut transcrire

dans le plan  $Kc-Re$ , représenté en figure 3.1. Ils identifient 8 régimes d'écoulements ( $A^*$ ,  $A$  à  $G$ ). Ces régimes sont représentés sur la figure 3.3.

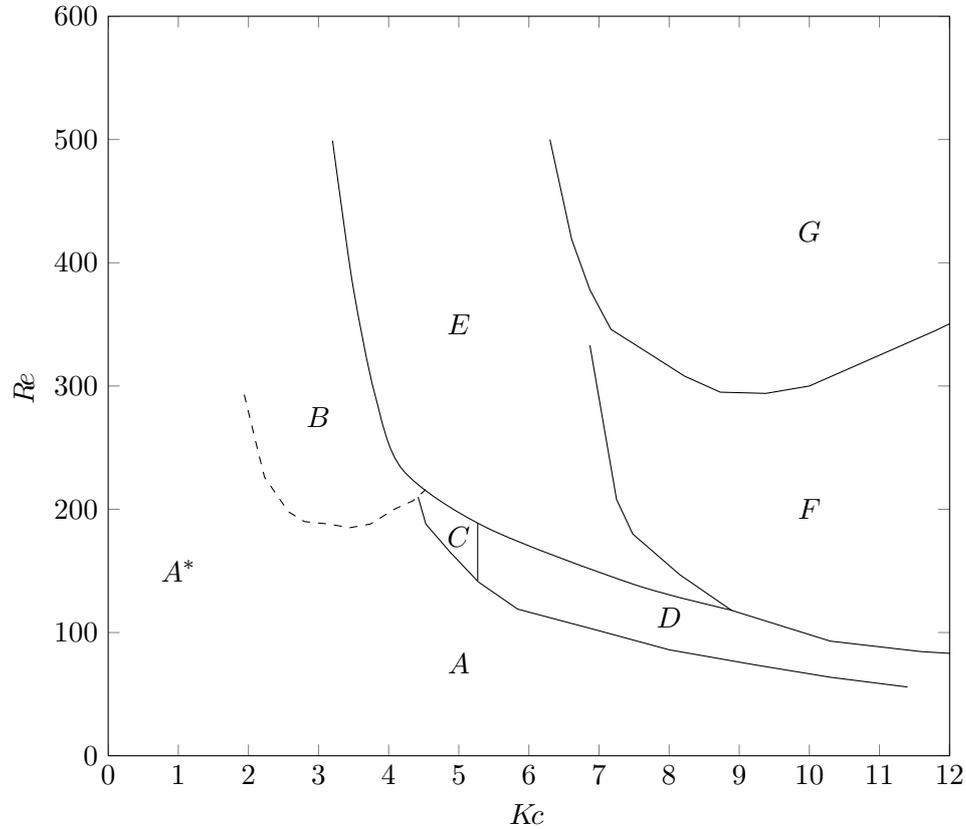


FIGURE 3.1 – Cartographie des régimes d'écoulements dans le plan  $Kc-Re$  définis dans [59].

Les régimes  $A^*$  et  $A$  désignent respectivement les écoulements symétriques sans lâcher tourbillonnaire et avec lâcher tourbillonnaire. Ces écoulements sont bidimensionnels.

Le régime  $B$  est un régime tridimensionnel. Il est semblable aux régimes  $A^*$  et  $A$  dans le plan mais des structures tourbillonnaires apparaissent le long du cylindre. Elles sont identifiées comme structures de Honji (*streaked flow*) [36].



FIGURE 3.2 – Exemples de structures de Honji observées dans le plan perpendiculaire à la direction des oscillations du cylindres par Tatsuno et Bearman dans le régime  $B$ . Figure extraite de [59].

Le régime  $C$  est tridimensionnel et voit apparaître dans le plan des tourbillons similaires aux allées de Von-Karman en écoulement permanent mais ayant des sens de rotations inverses, qui les éloignent de l'axe d'oscillation du cylindre.

Les régimes  $D$  et  $E$  présentent des structures tourbillonnaires en V. Les tourbillons s'éloignent du cylindre en suivant une direction diagonale et sont symétriques par rapport à l'axe transverse des oscillations. Ces régimes sont différenciés car des basculements de l'écoulement dans l'un ou l'autre des demi plans, définis par l'axe des oscillations, sont

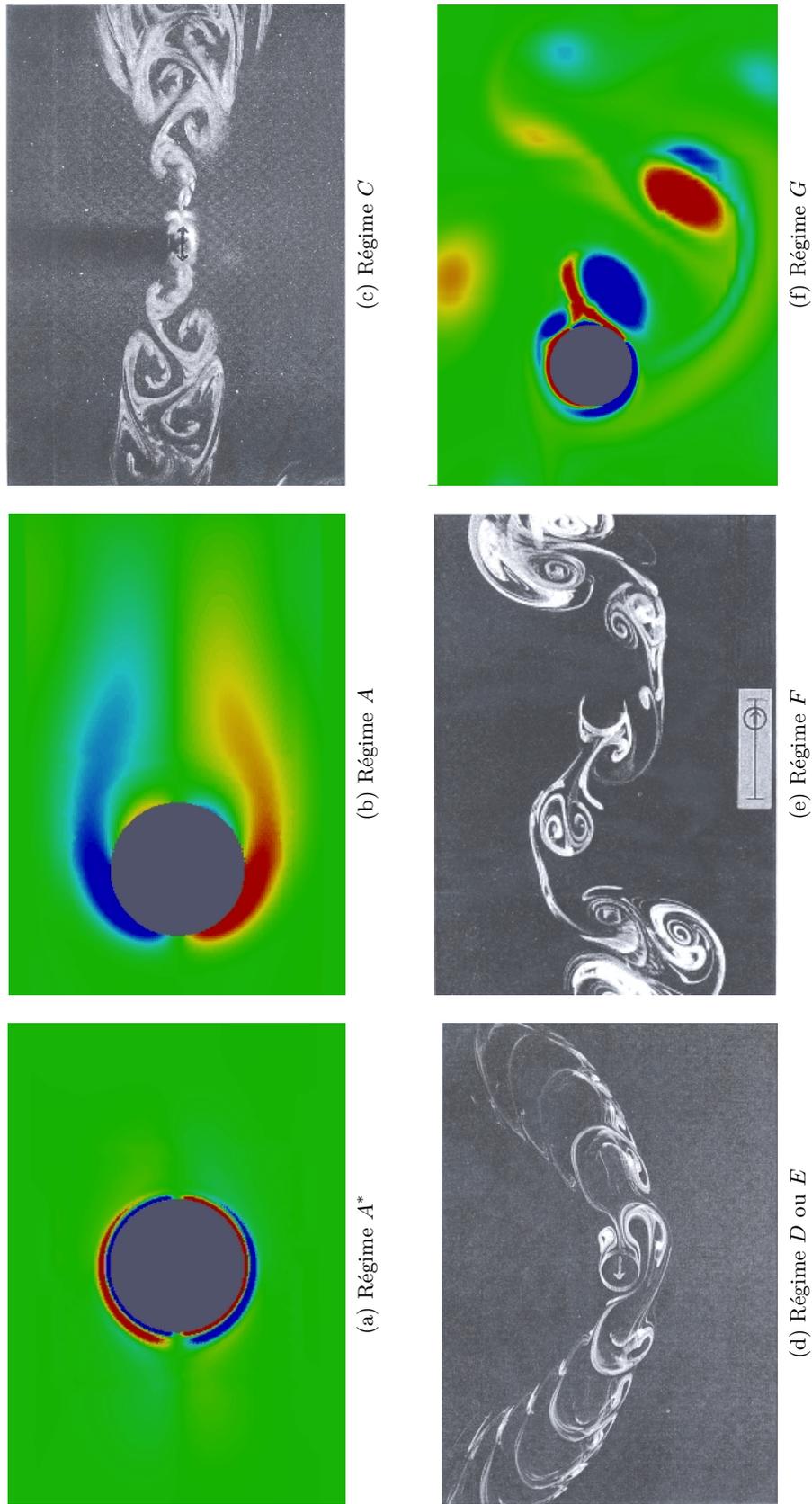


FIGURE 3.3 – Représentation des écoulements selon les différents régimes d'écoulements observés par [59]. Les figures (a), (b) et (f) sont issues d'un calcul par éléments finis comme décrit dans le chapitre 2. Les figures (c), (d) et (e) sont extraites de [59].

observés pour le régime  $E$ . Cependant cette différenciation des régimes est discutée notamment par [38] et [60] qui n'obtiennent pas numériquement ces basculements et [46] qui les obtient pour les deux régimes.

Le régime  $F$  fait apparaître des structures tourbillonnaires par paire qui sont convectées selon l'une des diagonales. À l'aide de simulations numériques bidimensionnelles et tridimensionnelles, Nehari *et al.* [46] montrent que les structures tourbillonnaires des régimes  $D$ ,  $E$  et  $F$  ainsi que les basculements entre ces régimes sont le fait d'instabilités uniquement bidimensionnelles puisque reproductibles par des calculs plans.

Enfin, le régime  $G$  est défini par la création de structures tourbillonnaires importantes dont la direction de propagation change par intermittence. L'écoulement est tridimensionnel mais sans structures régulières.

On constate que dans le cas du cylindre oscillant isolé dans un large domaine de fluide l'écoulement est fortement dépendant des paramètres utilisés. Le cas du faisceau de cylindres oscillant dans du fluide est lui aussi dépendant de ces paramètres. La section suivante présente des résultats en ce sens.

## 3.2 Écoulements dans un faisceau oscillant

Peu de travaux ont été effectués sur le cas d'un faisceau oscillant dans la plage de  $Kc-Re$  en question. En effet, en plus des ces deux paramètres déjà présent pour le cas du cylindre seul, les paramètres d'espacement et d'agencement (disposition en maille triangulaire ou carré, inclinaison) entrent en jeu. Le cas de deux cylindres oscillant dans un large domaine de fluide selon différentes inclinaisons a été étudié [64] pour des valeurs d'espacement compris entre 1 et 5, de  $Kc$  allant de 7 à 55 et  $\beta = 255$ . Le cas d'un faisceau de quatre tubes, disposés en carré, oscillant dans un large domaine de fluide est étudié par [22] (donc les résultats sont synthétisés dans [6]) pour des valeurs d'espacement de 2 à 5, des valeurs de  $Kc$  comprises entre 0.2 et 10 et un paramètre  $\beta$  fixé à 50.

Dans ce chapitre, le faisceau oscille dans le domaine décrit en sous-section 2.5.4 selon l'axe horizontal. Sa vitesse vaut  $\dot{\mathbf{X}} = \sin(2\pi t)\mathbf{e}_x$ .

Les analyses qui suivent n'ont pas pour but de dresser une cartographie complète des écoulements au sein du faisceau. En effet, cela demanderait de réaliser un nombre bien plus important de simulations que celles présentes dans ce chapitre. Cependant on souhaite en donner un aperçu. Les régimes observés sont classés sommairement en deux catégories : les régimes symétriques et les non-symétriques.

### 3.2.1 Régimes symétriques

La zone du plan  $Kc-Re$  que l'on considère correspondant aux régimes symétriques s'étend des écoulements induits par des très faibles déplacements pour toute la gamme de Reynolds aux écoulements induits par des déplacements importants pour des Reynolds faibles. La caractéristique commune à ces configurations est que les forces de portance sont nulles sur tous les tubes constituant le faisceau.

#### Configurations d'écoulements en très faibles déplacements : $Kc \ll 1, \forall Re$

On s'intéresse d'abord aux écoulements induits par les très faibles déplacements, c'est à dire aux configurations de  $Kc \ll 1$ . Les simulations pour les couples de  $Kc-Re$  représentés

sur la figure 3.4 ont été réalisées.

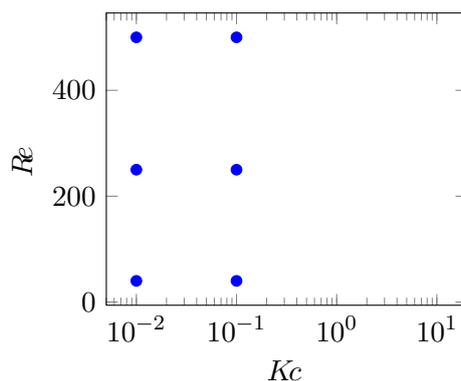


FIGURE 3.4 – Configurations d’écoulements en très petits déplacements.

Dans ces configurations de  $Kc$ - $Re$  on obtient des écoulements symétriques autour des cylindres, figure 3.5. Ces écoulements sont identiques dans tout le faisceau.

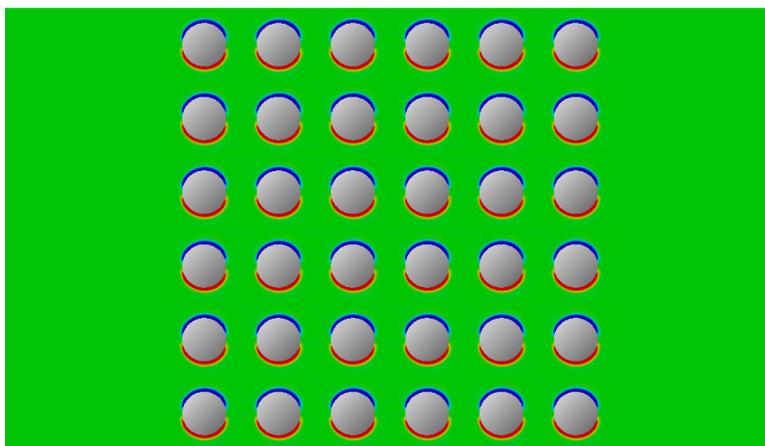


FIGURE 3.5 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de très faibles déplacements à  $t = 19.37$ . Configuration d’écoulement de  $Kc = 0.1$  et  $Re = 40$ .

Les forces inertielles sont prédominantes dans ces configurations. On représente en figure 3.6 les forces exercées par le fluide sur chacun des tubes du faisceau dans le cas d’une configuration de  $Kc = 0,01$  et  $Re = 40$ .

Dans cette figure, et celles qui suivent, sont représentées les forces exercées sur chacun des 36 tubes du faisceau. Celui-ci oscille selon l’axe horizontal. Les comportements des forces exercées sur les tubes de la première et dernière colonnes (alternativement au cours des oscillations) peuvent différer par la présence de fluide libre. Ainsi on distingue ces courbes en les représentant en traits pointillés ( $\cdots$ ) et en traits discontinus ( $- - -$ ). De même, on s’assure que les bords latéraux du domaine n’influencent pas le comportement des forces en représentant par des couleurs différentes les lignes inférieures et supérieures de tubes du faisceau.

On remarque que ces forces sont bien identiques dans tout le faisceau. La géométrie du faisceau n’influence pas les forces. De plus elles sont sinusoïdales et en phase avec l’accélération. On est donc dans des régimes d’écoulements fortement inertiels. L’ampli-

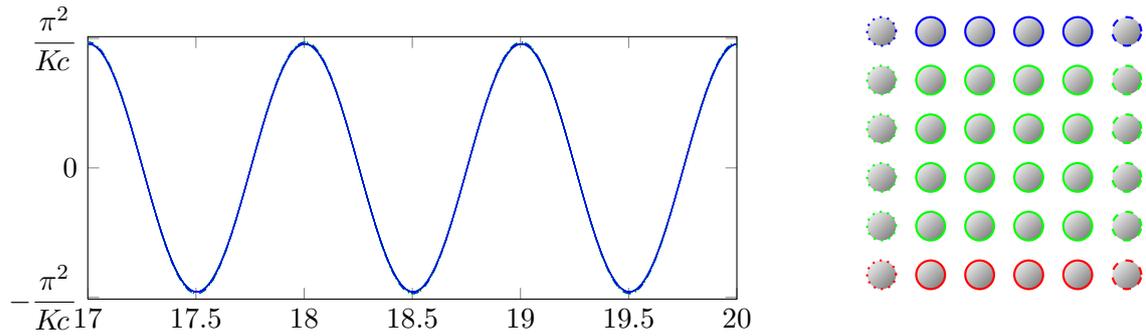


FIGURE 3.6 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de très faibles déplacements. Configuration d'écoulement de  $Kc = 0.01$  et  $Re = 40$ .

tude des forces exercées par le fluide sur chaque tube du faisceau est de l'ordre de  $\frac{\pi^2}{Kc}$ . Dans les configurations présentes le  $Re$  a une influence très réduite sur les forces et une augmentation de ce paramètre réduit faiblement l'amplitude des ces forces.

### Régime symétrique intermédiaire $Kc = 1, \forall Re$

On quitte le domaine des écoulements induits par de très faibles déplacements mais on ne s'intéresse pas de suite aux grands déplacements. En effet, entre ces deux régimes on se place dans un domaine intermédiaire pour des  $Kc$  de l'ordre de 1 et pour toutes valeurs de  $Re$ , figure 3.7.

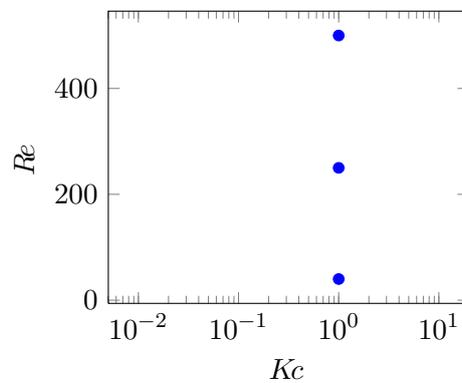


FIGURE 3.7 – Configurations d'écoulements pour des ordres de grandeurs de déplacements intermédiaire ( $Kc = 1$ ).

Les écoulements sont symétriques. Dans le régime précédent, la couche limite restait collée aux cylindres. Ici un décollement de cette couche limite est observé, comme montré en figure 3.8.

Les forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau sont toujours sinusoïdales. L'amplitude de ces forces est ici aussi de l'ordre de  $\frac{\pi^2}{Kc}$  bien qu'elles varient sensiblement en fonction du  $Re$ , figure 3.9. Elles sont de plus déphasées par rapport à l'accélération du faisceau. Les régimes ne sont plus principalement inertiels. La vitesse du faisceau entre en jeu.

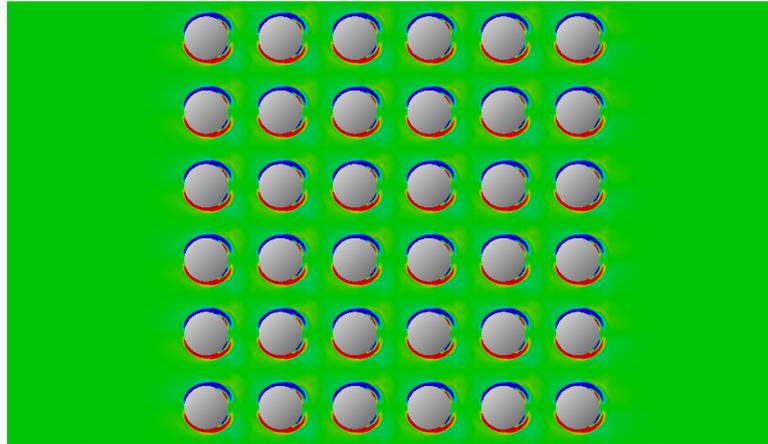


FIGURE 3.8 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de faible déplacement à  $t = 19.37$ . Configuration d'écoulement de  $Kc = 1$  et  $Re = 250$ .

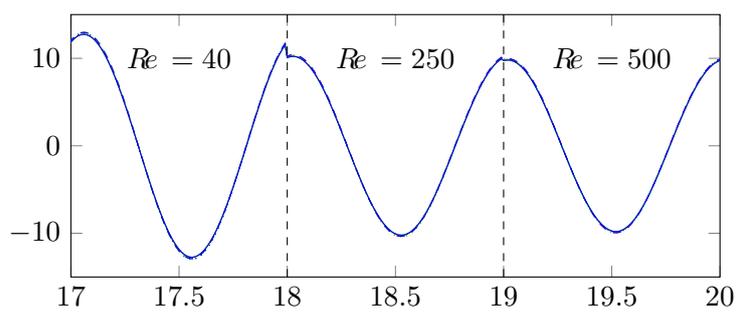
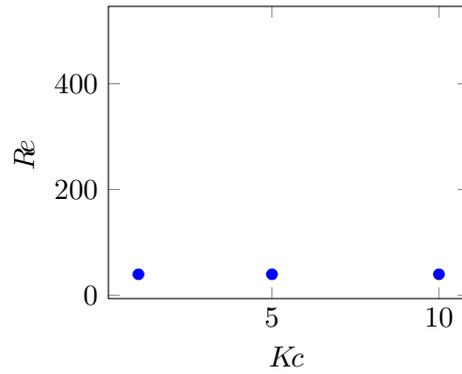
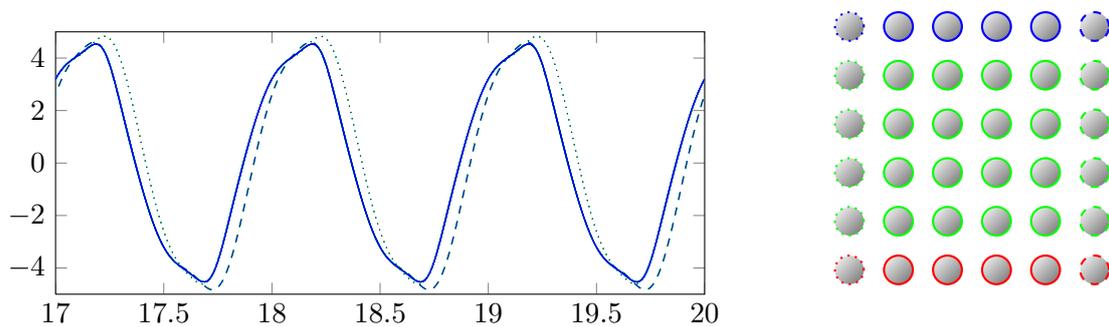


FIGURE 3.9 – Forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau pour un régime symétrique intermédiaire ( $Kc = 1$ ). L'effet du  $Re$  est représenté avec des valeurs croissantes à chaque périodes d'oscillations.

FIGURE 3.10 – Configuration de grands déplacements pour des  $Re$  faibles.FIGURE 3.11 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un grand déplacement à faible  $Re$ . Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 40$ . **$Re$  faible,  $1 \leq Kc \leq 10$** 

Lorsque l'on augmente davantage le  $Kc$  pour des valeurs de  $Re$  faibles, figure 3.10, on reste dans des régimes symétriques. Les forces exercées par le fluide sur chacun des tubes ne sont cependant plus sinusoïdales, figures 3.11 et 3.12 mais restent périodiques. Le déphasage par rapport à l'accélération est accentué. On observe une fluctuation de la force au niveau d'une harmonique de la fréquence de forçage. Cette fluctuation est l'effet du fluide mis en mouvement par le déplacement antérieur de la structure qui influence le faisceau.

Les forces sont périodiques, de plus elles sont symétriques du fait des oscillations des tubes (décalées d'une demi-période). On représente en figure 3.13 l'écoulement au sein du faisceau au cours de la  $n^{\text{ième}}$  demi-période pour 4 instants donnés :

$$t_1 = nT, \quad t_2 = nT + \frac{1}{8}T, \quad t_3 = nT + \frac{1}{4}T, \quad t_4 = nT + \frac{3}{8}T.$$

En  $t_1$  les cylindres sont à leur maximum de déplacement, à l'arrêt, et leur accélération est maximale (en valeur absolue, car elle est négative). Le fluide, entrainé au cours de la demi-période précédente s'écoule autour des tubes et exerce sur la structure une force positive. En  $t_2$  le cylindre reprend de la vitesse (négative), il se déplace vers sa position centrale. La structure pour se déplacer doit mettre en mouvement le fluide se trouvant sur son chemin. Celui-ci exerce donc une force positive sur les tubes du faisceau. Ils subissent encore à cet instant l'écoulement du fluide issu de la demi-période précédente. On a donc une augmentation de la valeur de la force de trainée. Pour les tubes qui ne sont pas situés en 1<sup>ère</sup> colonne (par rapport au sens de déplacement du faisceau) la force exercée par le

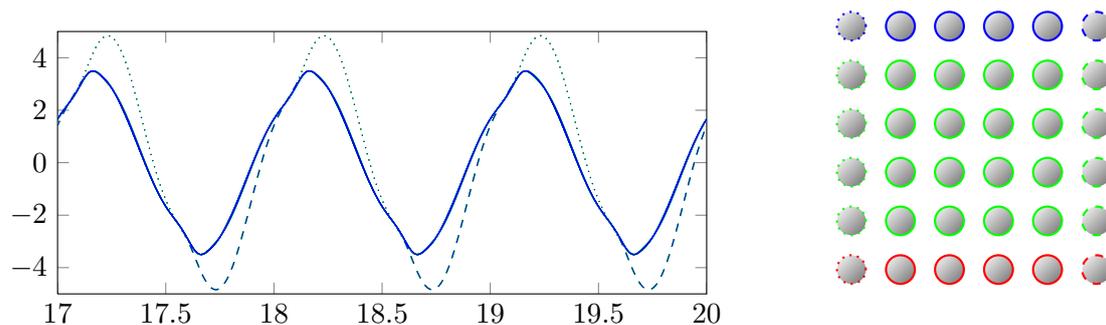


FIGURE 3.12 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un grand déplacement à faible  $Re$ . Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 40$ .

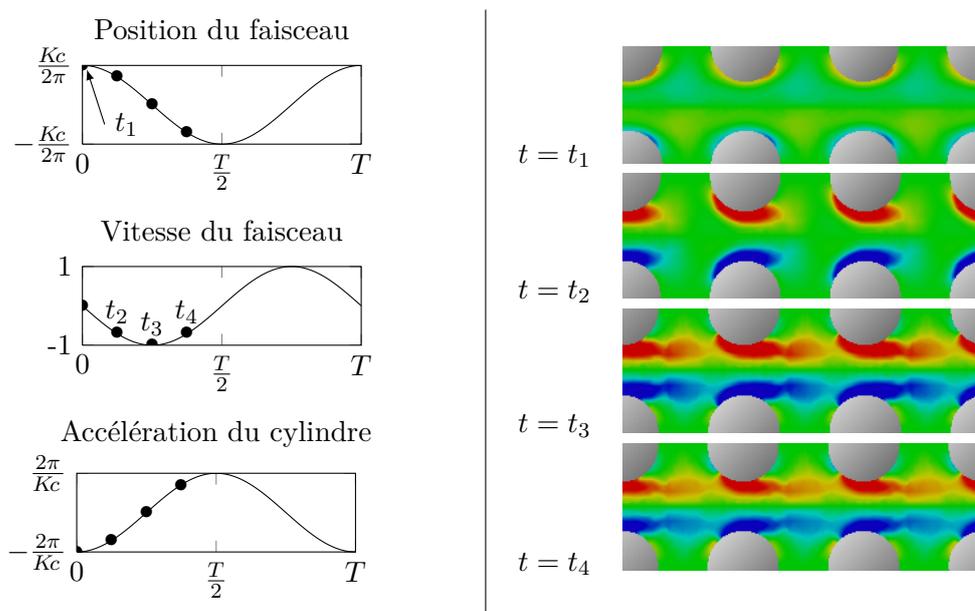


FIGURE 3.13 – Vorticité du champ de vitesse fluide au cours d'une demi-oscillation de faisceau.

fluide sur la structure est maximale en cet instant. En  $t_3$  l'accélération du tube est nulle, l'amplitude de sa vitesse est au maximum. Le faisceau passe par sa position centrale. Le fluide a déjà été mis en mouvement. Les tubes non situées en 1<sup>ère</sup> colonne bénéficient ainsi de l'aspiration de leur prédécesseur. Le fluide recircule majoritairement entre les lignes de tubes du faisceau et impacte moins ceux-ci. Ainsi les forces s'exerçant dessus décroissent. Ce n'est pas cependant le cas des tubes situés en 1<sup>ère</sup> colonne. Eux ne bénéficient pas de cet effet. Ils mettent en mouvement la totalité du fluide se trouvant devant eux. La force exercée par le fluide sur la structure est plus importante pour ces tubes et devient maximale en cet instant (où l'amplitude de la vitesse du faisceau est maximale). En  $t_4$  le faisceau décélère (en valeur absolue) réduisant ainsi les forces exercées par le fluide.

Dans ces configurations l'ordre de grandeur de la vitesse devient équivalent ou supérieur à celui de l'accélération. L'amplitude de la vitesse vaut 1 quelle que soit la configuration. Celle de l'accélération est facteur de l'inverse du  $Kc$ . Ainsi pour les grandes valeurs de  $Kc$  l'amplitude des forces reste du même ordre de grandeur.

Dans ces configurations de très grands déplacement à faibles  $Re$ , les forces exercées

par le fluide sur le faisceau au cours du temps sont identiques dans le cœur du faisceau.

### 3.2.2 Régime non symétrique

Pour des configurations à larges déplacements et à  $Re$  modérés (mais non faibles), comme représentés en figure 3.14, on perd la symétrie de l'écoulement autour des tubes. Ces écoulements génèrent donc des forces de portances.

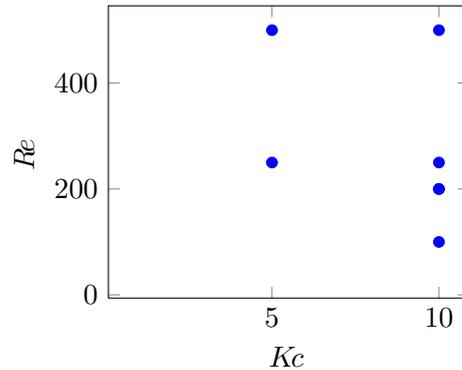


FIGURE 3.14 – Configurations d'écoulement à  $Re$  modérés et pour des grands déplacements de faisceau.

#### Du symétrique au non-symétrique, $Re = 100$

L'écoulement issu de l'oscillation du faisceau à  $Kc = 10$  et  $Re = 100$  illustre bien le passage du régime symétrique au non symétrique. Dans cette configuration, l'écoulement présente un motif presque identique de tube à tube, figure 3.15, p.51. Quelques différences se remarquent tout de même. Dans la figure le faisceau est à l'arrêt, il est à sa position droite maximale. Il vient d'effectuer une traversée du domaine de gauche à droite et s'apprête à repartir dans l'autre sens. L'écoulement situé dans la partie droite du faisceau présente de légères perturbations en comparaison avec le motif observé au cœur du faisceau. La colonne à droite du faisceau a dû au cours de la période précédente mettre en mouvement le fluide se trouvant sur son passage, contrairement aux autres colonnes. Les mouvements de fluide autour des cylindres de cette colonne sont donc plus importants. La viscosité ne pouvant plus assurer la symétrie de l'écoulement, des structures tourbillonnaires non symétriques sont alors générées. Ces structures tourbillonnaires se propagent jusqu'à la colonne de cylindres suivante. L'effet de ces structures sur les cylindres s'observe à travers les forces de trainée et de portance appliquée par le fluide, figures 3.16, p.51 et 3.17, p.51. Les forces de trainée s'appliquant sur les cylindres au cœur du faisceau sont quasiment toutes identiques bien que de légères variations commencent à apparaître. Les courbes s'exerçant sur les colonnes aux extrémités se démarquant comme pour les configurations de grands déplacements et faibles  $Re$ . Les allures de forces observées dans ces configurations d'écoulement symétrique se retrouvent encore dans la configuration actuelle. Cependant la figure 3.17 montre l'apparition de forces de portances non négligeables puisque que leurs amplitude moyenne est de l'ordre du quart de celle des forces de trainée. Ce cas illustre donc bien la transition entre les régimes d'écoulements symétriques et les régimes non symétriques.

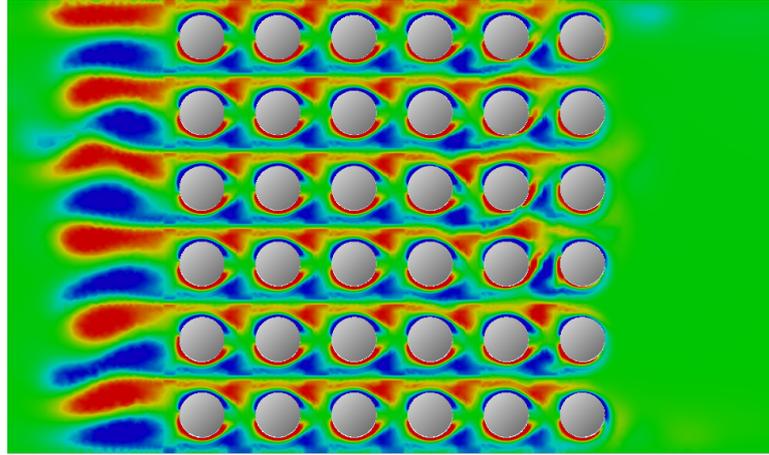


FIGURE 3.15 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 100$ .

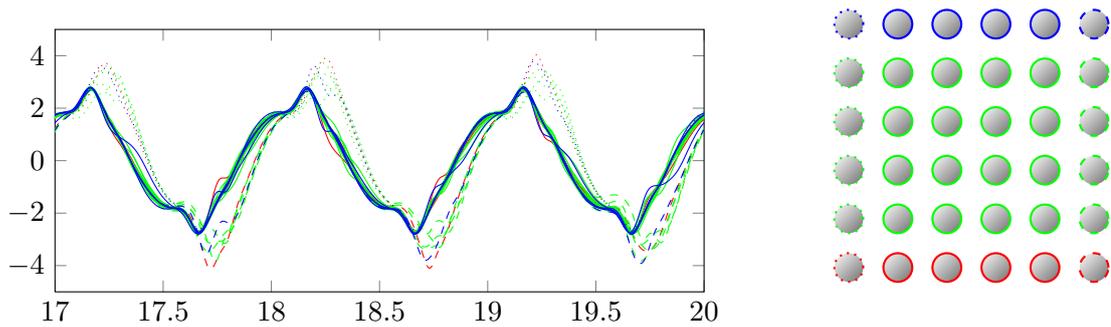


FIGURE 3.16 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 100$ .

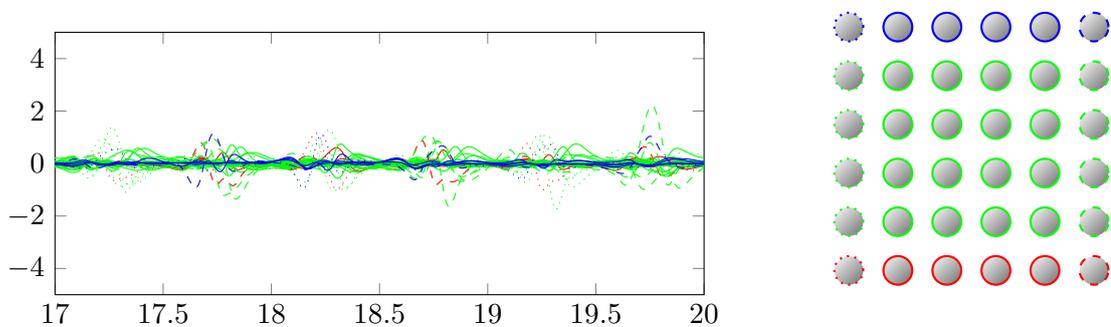


FIGURE 3.17 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 100$ .

$Re = 200, Re = 250$

Pour les configurations aux  $Re$  un peu plus importants, on observe un comportement général du fluide s'écoulant autour des tubes comme montré sur les figures 3.18, p.53, 3.21, p.54 et 3.24, p.55. Ces figures représentent les champs de vorticité de fluide au même instant. Chaque cylindre est entouré d'une couche limite inférieure de vorticité positive et d'une couche limite supérieure de vorticité négative. Une paire de tourbillons de rotations opposées est observée sur la gauche de chaque cylindre. On retrouve le motif similaire au cas  $Re = 100$  où les structures tourbillonnaires non symétriques se seraient propagées à l'ensemble du faisceau. Les figures 3.19, p.53, 3.22, p.54 et 3.25, p.55 représentent les forces de trainées pour les 3 configurations d'écoulement à  $Re = 200$  et  $Re = 250$ . Les variations de ces forces tubes à tubes restent modérées par rapport à la variation globale. Cette variation globale est périodique (correspondant à la période de forçage). On retrouve les harmoniques de la fréquence de forçage au sein de cette variation globale décrites précédemment dans les configurations de  $Kc$   lev s. Les forces s'exerçant sur les colonnes latérales (représentées en traits pointillés (- - -), ou traits discontinus ( $\cdots$ )) se démarquent également des autres courbes.

Les forces de portance gagnent en amplitude dans ces configurations. Les figures 3.20, p.53, 3.23, p.54, 3.26, p.55 représentent leur évolution au cours du temps. Chacune de ces forces varie de façon complexe, mais leur comportement global reste nul. On remarque que l'amplitude des forces de portance est plus importante pour  $Kc = 5$  que pour  $Kc = 10$ . Les grands déplacements de faisceau génèrent de grands mouvements de fluide, ce fluide circule principalement entre les lignes de tubes du faisceau ce qui stabilise la portance des cylindres.

$Re = 500$

Pour les valeurs les plus importantes de  $Re$ , on n'observe pas de comportement global du point de vue de l'écoulement, figures 3.27, p.56 et 3.30, p.57. Mais les mêmes remarques s'appliquent pour les comportements globaux des forces de trainée et de portance. Les variations des forces de trainée d'un tube à un autre deviennent très importantes mais restent inférieures à leur variation globale, figures 3.28, p.56 et 3.31, p.57. La variation globale est toujours périodique (correspondant à la période de forçage). Dans le cas  $Kc = 5$  on retrouve les harmoniques de la fréquence de forçage au sein de la variation globale des forces de trainée. Pour  $Kc = 10$  ce phénomène est trop faible devant les variations de tube à tube des forces. On ne distingue plus les effets de bords des colonnes aux extrémités du faisceau. Pour ces hauts  $Re$  les amplitudes maximales des forces de portance sont de l'ordre de celle des forces de trainée, figure 3.29, p.56 et 3.32, p.57.

### 3.3 Conclusion

Les écoulements de fluide dans le cas d'un cylindre ou d'un faisceau de cylindres oscillant dans un domaine de fluide initialement au repos sont fortement dépendants des paramètres du système. Lorsqu'il s'agit du cylindre, de nombreux types d'écoulements différents sont observés en fonction des configurations de  $Kc$  et  $Re$  employés. Pour le cas du faisceau oscillant la géométrie de celui-ci est à prendre en compte. Aux paramètres  $Kc$  et  $Re$  viennent s'ajouter la dépendance au paramètre d'espacement entre les cylindres, mais aussi la dépendance à l'agencement du faisceau (c'est à dire à la forme de la maille du faisceau) et enfin à l'angle d'incidence de cette maille. Dans ces travaux le paramètre

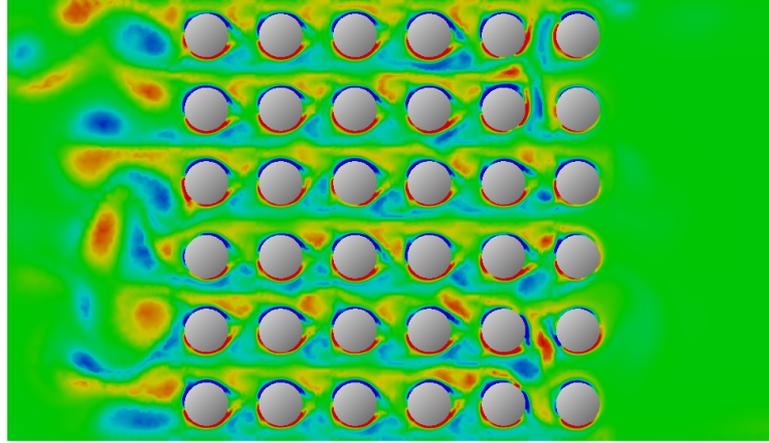


FIGURE 3.18 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 200$ .

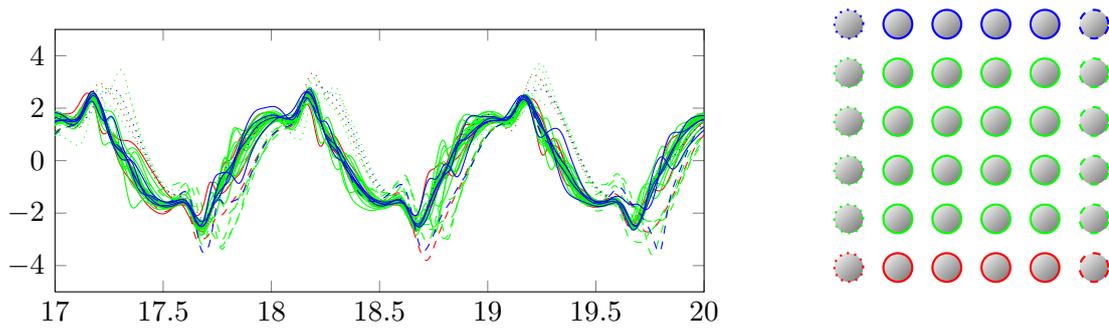


FIGURE 3.19 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 200$ .

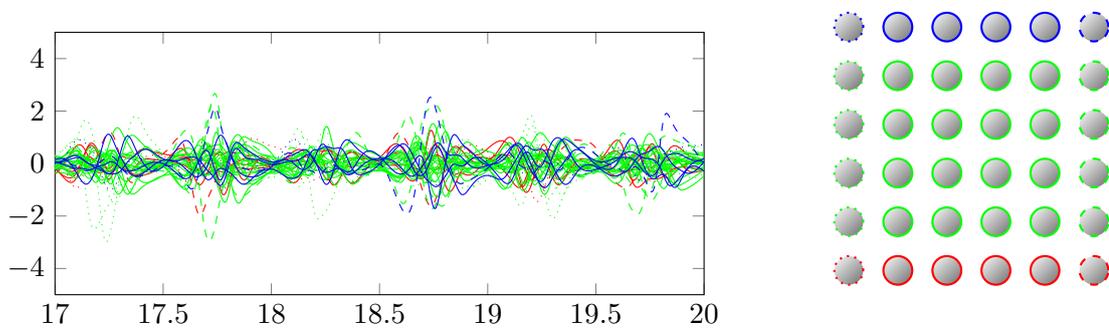


FIGURE 3.20 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 200$ .

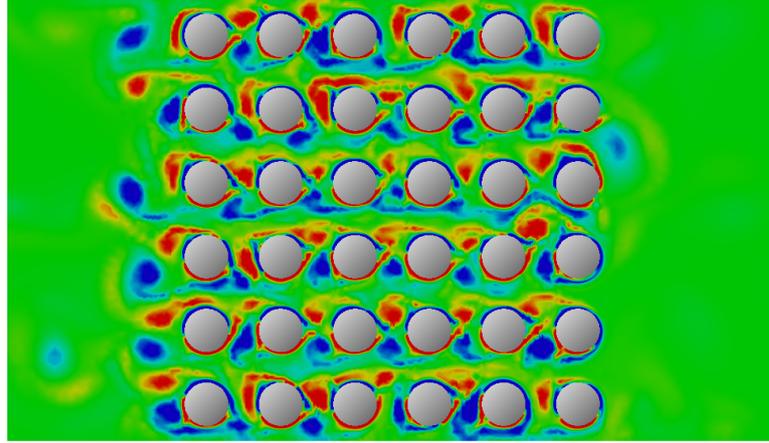


FIGURE 3.21 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ .

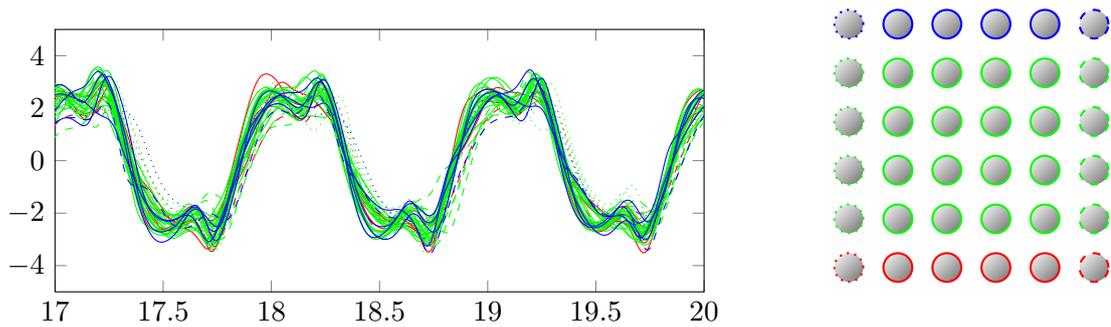


FIGURE 3.22 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ .

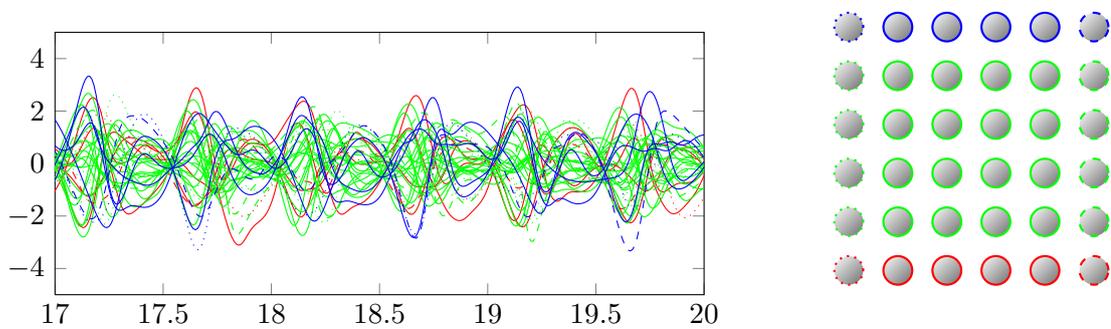


FIGURE 3.23 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ .

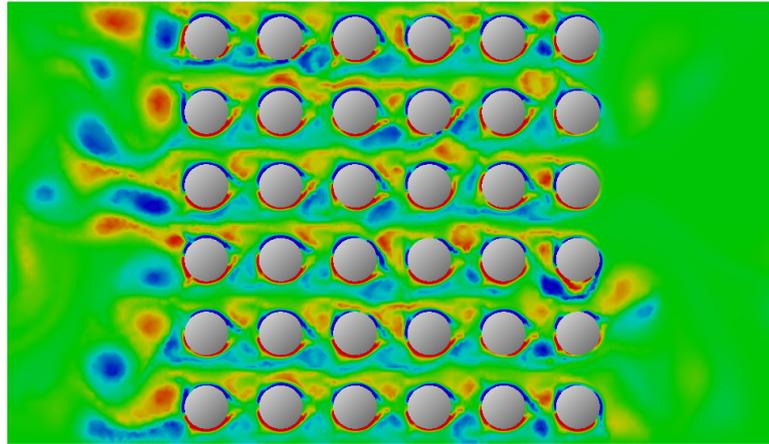


FIGURE 3.24 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 250$ .

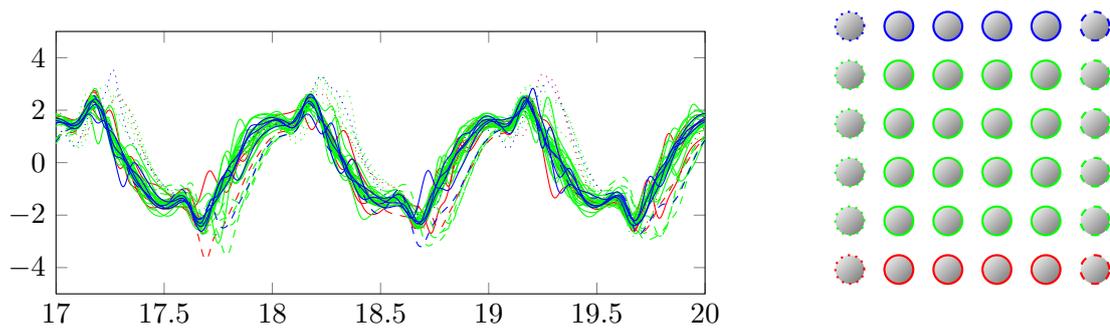


FIGURE 3.25 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 250$ .

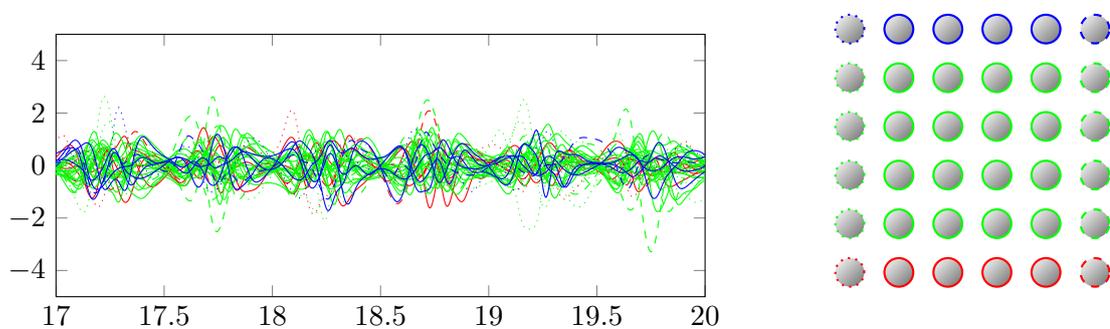


FIGURE 3.26 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 250$ .

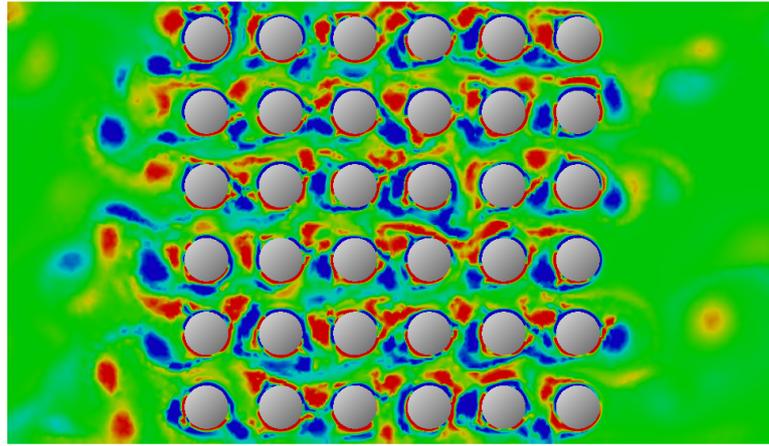


FIGURE 3.27 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 500$ .

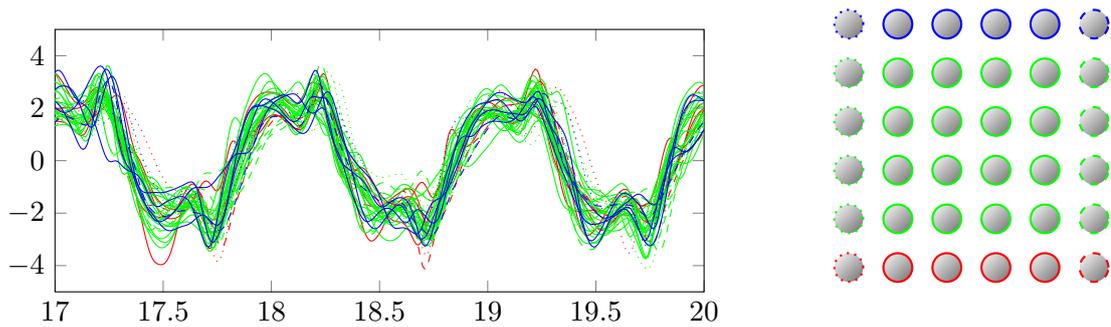


FIGURE 3.28 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 500$ .

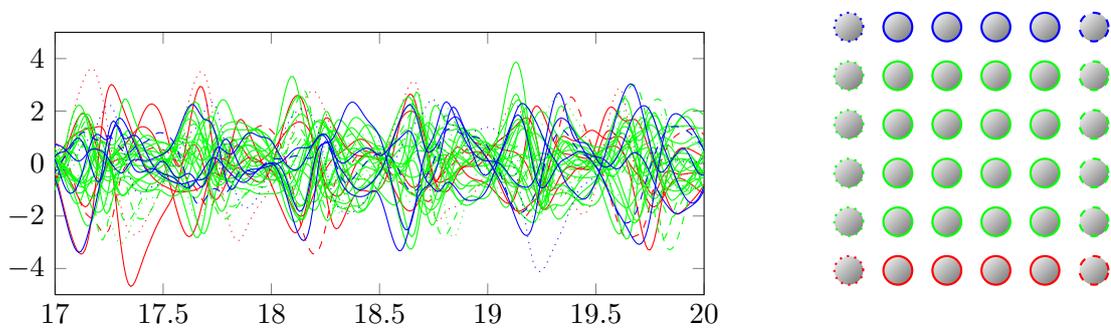


FIGURE 3.29 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 500$ .

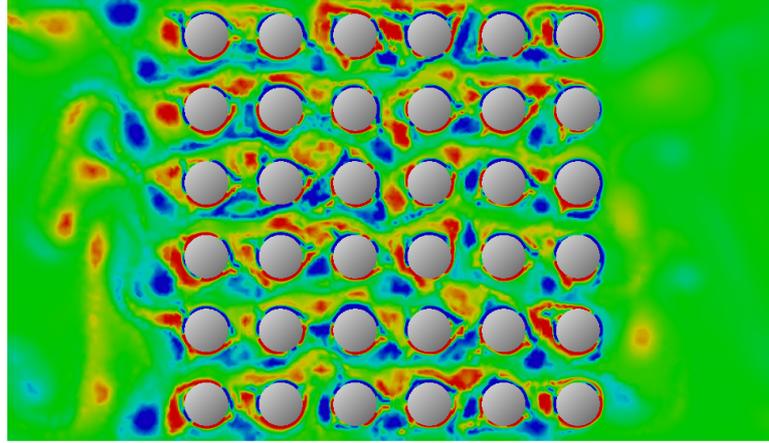


FIGURE 3.30 – Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 500$ .

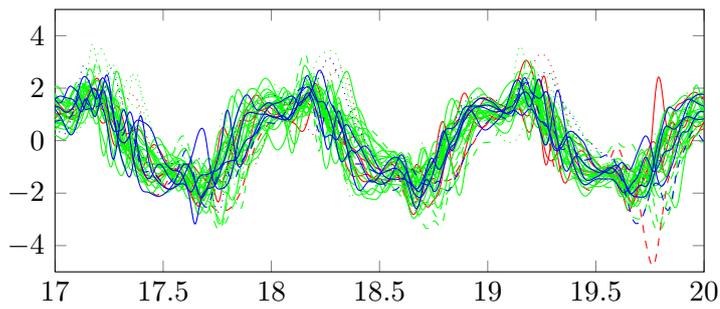


FIGURE 3.31 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 500$ .

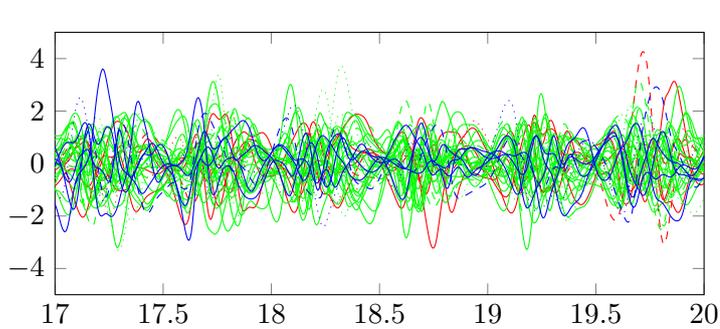


FIGURE 3.32 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à  $Re$  modéré. Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 500$ .

d'espacement est fixé. L'agencement du faisceau se fait en mailles carrées et l'angle d'incidence est nul. Les écoulements se classent sommairement en deux catégories : les régimes symétriques et les régimes non symétriques. Les premiers sont caractérisés par des forces de portances nulles dans tout le faisceau. Les seconds par des forces de portances non négligeables. La classification des écoulements n'est pas aussi détaillée que dans le cas du cylindre isolé pour la plage de  $Kc$  et  $Re$  considérée car les mouvements du faisceau contraignent l'écoulement et ne permettent pas aux structures tourbillonnaires d'évoluer librement dans le fluide. Ainsi la présence ou non de nombreux régimes d'écoulements différents semble liée au paramètre géométrique d'espacement du faisceau. Ici, les écoulements observés au sein des régimes non symétriques sont de forme similaire sauf pour les configurations aux  $Re$  les plus élevés où aucun comportement global n'est observé dans la totalité du faisceau. Les forces de trainée exercées sur les tubes du faisceau suivent quand à elles une évolution globale pour toutes les configurations considérées. Pour les très faibles  $Kc$ , elles sont identiques quelque soit le  $Kc$ . Pour des grands  $Kc$  et faibles  $Re$  elles sont identiques sauf pour les colonnes de tubes situées aux bords du faisceau où elles sont plus importantes à certains instants. Enfin pour des grands  $Kc$  et  $Re$  elles ont un comportement global apparent. Dans ces dernières configurations les forces de portance exercées par le fluide sur les cylindres du faisceau sont non nulles, mais leur comportement moyen l'est. Ce comportement moyen est important car d'un point de vue global cela montre que l'on peut considérer que le faisceau n'est pas soumis à des instabilités issues des écoulements générés par ses oscillations.

## Chapitre 4

# L'homogénéisation dans le cas non visqueux linéarisée

Le système étudié est un milieu hétérogène composé d'une phase fluide et d'une phase solide. Parmi les outils de modélisation pour la simulation de ces systèmes on trouve les méthodes d'homogénéisation. Elles s'appliquent à de larges domaines d'études. On s'intéresse dans notre cas aux méthodes s'appliquant à l'interaction fluide-structure. Dans ce chapitre l'homogénéisation est appliquée au comportement d'un faisceau de tubes soumis à une excitation externe en présence d'un fluide non visqueux. Les déplacements du faisceau sont supposés très faibles devant les dimensions du faisceau. Dans un premier temps, on décrit la méthode d'homogénéisation des développements asymptotiques (ou méthode des échelles multiples). On présente ensuite une vision physique de l'homogénéisation. L'équivalence entre les deux approches est explicitée. Afin d'illustrer la méthode, un cas d'application est présenté. L'identification du cadre de validité de cette méthode nous permet d'évaluer les difficultés de la construction d'une méthode d'homogénéisation plus générale basée sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide.

### 4.1 La méthode des échelles multiples

La méthode des échelles multiples [12] est appliquée au problème bidimensionnel d'un faisceau de tubes baigné dans un fluide non visqueux soumis à une excitation externe [34]. Les déplacements du faisceau sont supposés d'amplitudes faibles devant les dimensions d'un tube et du faisceau. Le fluide est décrit par les équations d'Euler linéarisées. Il est initialement au repos. Le faisceau est constitué de  $N$  cylindres à section circulaire disposés en mailles carrés. Les tubes de diamètre  $D$  sont espacés d'une longueur  $E$ . La taille caractéristique du faisceau  $G$  correspond au diamètre équivalent de ce faisceau. La figure 4.1 donne une représentation du problème considéré.

Le domaine total  $\Omega$  du système est constitué d'une phase fluide  $\Omega_F$  et d'une phase solide  $\Omega_S$ . L'interface entre le fluide et les cylindres est noté  $\Gamma_{F/S}$ . La normale  $\mathbf{n}$  à cette frontière est orientée du fluide à la structure. La géométrie est périodique. On définit une cellule élémentaire représentative de cette géométrie, représentée en figure 4.2. Cette cellule est un carré de côté  $E$  centrée sur un cylindre. Le domaine  $\omega$  de la cellule est constitué d'une phase fluide  $\omega_F$  et d'une phase solide  $\omega_S$ . La frontière contenu dans cette cellule entre le fluide et le solide est notée  $\gamma_{F/S}$ . La frontière extérieure de la cellule élémentaire est notée  $\gamma_{ext}$ . La frontière du domaine fluide  $\omega_F$  de la cellule élémentaire est de normale sortante  $\mathbf{n}$ .

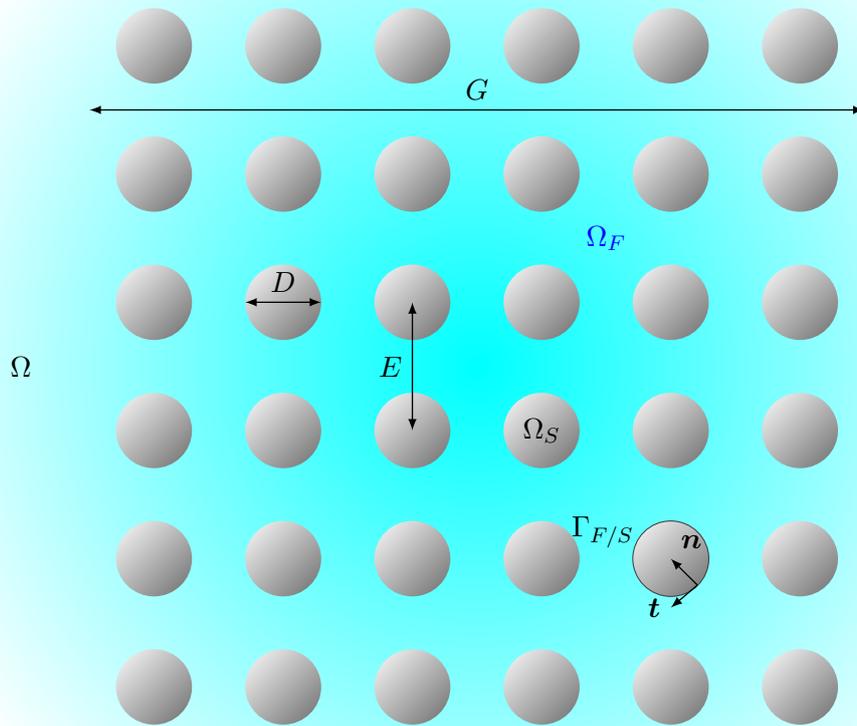


FIGURE 4.1 – Faisceau de  $N$  tubes immergés dans un fluide initialement au repos.

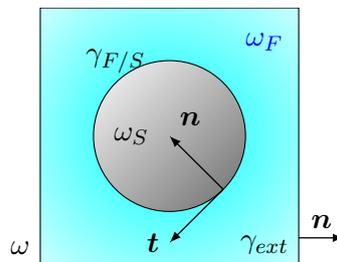


FIGURE 4.2 – Cellule élémentaire du système à homogénéiser.

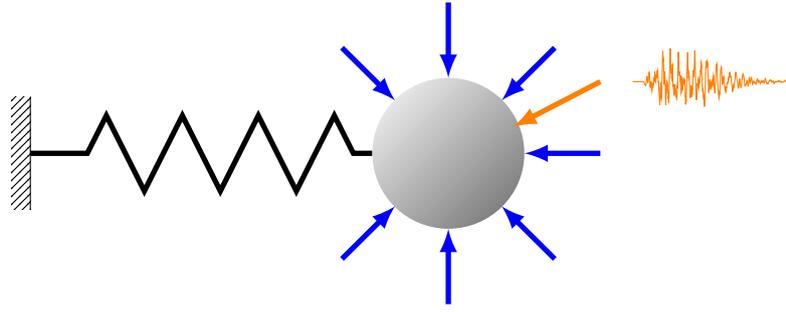


FIGURE 4.3 – Système masse ressort représentant un cylindre du faisceau soumis aux forces exercées par le fluide ainsi qu'à une sollicitation externe.

Chaque cylindre est assimilé à un oscillateur à deux degrés de libertés de masse  $m$  et de raideur  $k$ , figure 4.3. Le  $l^{\text{ième}}$  cylindre est référencé par l'indice  $l$  variant de 1 à  $N$ . On note  $\gamma_{F/S,l}$  la frontière  $\gamma_{F/S}$  de la cellule élémentaire centrée sur le cylindre  $l$ . Un cylindre est soumis à la force exercée par le fluide ainsi qu'à une excitation externe d'accélération  $\mathbf{a}$  uniforme sur le faisceau.

Le problème est décrit par le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega_F, \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla p & \text{dans } \Omega_F, \\ m \ddot{\mathbf{X}}_l - k \mathbf{X}_l = - \int_{\gamma_{F/S,l}} p \mathbf{n} d\gamma + m \mathbf{a} & \text{pour } l = 1, \dots, N, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{X}}_l \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \gamma_{F/S,l}. \end{cases} \quad (4.1)$$

La méthode des échelles multiples s'appuie sur la géométrie périodique du système étudié. Elle s'applique lorsque cette période est très petite devant la longueur caractéristique  $G$  du faisceau (ici le diamètre équivalent). En ce cas, on définit un paramètre  $\varepsilon$  lié à la période du faisceau. L'idée de la méthode est de rechercher les solutions du problème sous la forme de développements asymptotiques à doubles échelles par rapport à  $\varepsilon$ .

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_0(x, y, t) + \varepsilon \mathbf{v}_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(x, y, t) + \dots, \quad (4.2)$$

où  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  représente la position du point dans la cellule élémentaire. La dépendance des fonctions en la variable  $y$  représente la fluctuation à l'échelle des variations rapides. La dépendance des fonctions en la variable  $x$  représente les variations à l'échelle lente. Cela implique qu'au sein de deux cellules élémentaires voisines, deux points homologues ayant la même coordonnée  $y$  prendront des valeurs presque identiques. Cependant il peut exister de fortes variations de valeur entre deux points d'une même cellule, ou de deux cellules voisines ayant des positions  $y$  différentes du fait de la dépendance en cette variable des échelles de variations rapides. De même, deux points situés dans des cellules éloignées et ayant une même position  $y$  dans la cellule élémentaire auront des valeurs différentes du fait de la dépendance en la variable  $x$  des échelles de variations lentes. Les variables  $x$  et  $y$  sont considérées indépendantes. En appliquant cette hypothèse aux opérateurs présents dans les équations à résoudre, on obtient par exemple pour le gradient

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y. \quad (4.3)$$

On introduit cet opérateur dans le système d'équation (4.1) et on identifie ensuite les systèmes aux différents ordres en  $\varepsilon$  obtenus. On obtient ainsi les équations du milieu homogène équivalent au premier ordre ainsi que des équations correctrices d'ordres plus élevés. Ces termes d'ordres supérieurs sont généralement le produit d'une fonction périodique en  $y$  et d'une fonction en  $x$  dont la moyennisation sur une cellule élémentaire permet de résoudre le système.

Les déplacements des tubes du faisceau ont des variations lentes. En effet, les déplacements varient faiblement d'une cellule à une autre. On veut homogénéiser le problème en considérant les déplacements  $\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_l(t), \dots, \mathbf{X}_N(t)$  comme un champ continu par morceau, variant sur l'échelle lente que l'on notera  $\mathbf{u}(x, t)$ . L'homogénéisation nécessite de considérer la dynamique des tubes comme étant régie par une équation de milieu déformable sur le domaine solide. Cette équation est de la forme

$$\rho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(x, t) + \frac{4k}{\pi D^2} \mathbf{u}(x, t) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(x, t) + \rho_s \mathbf{a} \quad \text{dans } \Omega_S, \quad (4.4)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes solide, complétée par la condition limite sur le bord du cylindre d'égalité entre le tenseur des contraintes de l'équation structure et la pression du fluide

$$\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_{F/S}. \quad (4.5)$$

Pendant les cylindres sont des milieux indéformables. Le tenseur des déformations au sein des tubes est donc pris nul afin d'empêcher toute déformation. Ceci est représenté par la relation

$$\nabla \mathbf{u}(x, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega_S. \quad (4.6)$$

Le système (4.1) devient donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} & = 0, & \text{dans } \Omega_F, \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} & = -\nabla p, & \text{dans } \Omega_F, \\ \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u} & = -\frac{4k}{\pi D^2} \mathbf{u} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho_s \mathbf{a}, & \text{dans } \Omega_S, \\ \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} & = 0, & \text{dans } \Omega_S, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} & = \frac{d}{dt} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma_{F/S}, \\ \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} & = -p \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma_{F/S}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

On recherche les solutions de ce problème sous la forme des développements asymptotiques suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_0(x, y, t) + \varepsilon \mathbf{v}_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(x, y, t) + \dots \\ p(x, t) = p_0(x, y, t) + \varepsilon p_1(x, y, t) + \varepsilon^2 p_2(x, y, t) + \dots \\ \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(x, y, t) + \varepsilon \mathbf{u}_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(x, y, t) + \dots \\ \underline{\underline{\sigma}}(x, t) = \underline{\underline{\sigma}}_0(x, t) + \varepsilon \underline{\underline{\sigma}}_1(x, t) + \varepsilon^2 \underline{\underline{\sigma}}_2(x, t) + \dots, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

En appliquant les opérateurs (4.3) des équations du système (4.7) aux développements ci-dessus, on obtient par identification, pour les termes en  $\varepsilon^{-1}$ ,  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$ ,

– pour l'équation de conservation de la masse,

$$\text{dans } \Omega_F \begin{cases} \nabla_y \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \\ \nabla_x \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \\ \nabla_x \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

– pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\text{dans } \Omega_F \begin{cases} 0 = -\nabla_y p_0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\nabla_x p_0 - \nabla_y p_1, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -\nabla_x p_1 - \nabla_y p_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

– pour les conditions aux limites sur la vitesse et sur les contraintes aux parois solides,

$$\text{sur } \Gamma_{F/S} \begin{cases} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \\ \underline{\sigma}_0 \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}, \\ \underline{\sigma}_1 \mathbf{n} = -p_1 \mathbf{n}, \end{cases} \quad (4.11)$$

– pour l'équation du mouvement des tubes,

$$\text{dans } \Omega_S \begin{cases} 0 = \nabla_y \cdot \underline{\sigma}_0 d\Omega \\ \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_0 = -\frac{4k}{\pi D^2} \mathbf{u}_0 + \nabla_x \underline{\sigma}_0 + \nabla_y \underline{\sigma}_1 + \rho_s \mathbf{a}, \\ \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_1 = -\frac{4k}{\pi D^2} \mathbf{u}_1 + \nabla_x \underline{\sigma}_1 + \nabla_y \underline{\sigma}_2, \end{cases} \quad (4.12)$$

– et pour le tenseur de déformation des tubes,

$$\text{dans } \Omega_S \begin{cases} \nabla_y \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_0 = 0, \\ \nabla_x \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_x \mathbf{u}_0 + \nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_1 = 0, \\ \nabla_x \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_x \mathbf{u}_1 + \nabla_y \mathbf{u}_2 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_2 = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

De ces équations, on déduit

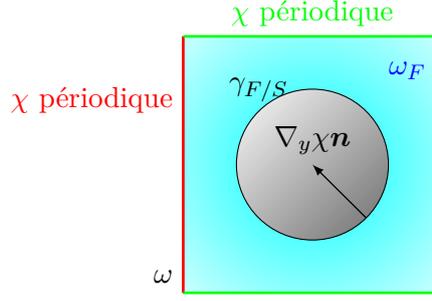
- que la fluctuation de pression  $p_0$  est indépendante de la variable des échelles rapides,
- que l'écoulement moyen  $\mathbf{v}_0$  est à divergence nulle au niveau de la cellule élémentaire. Cette condition d'incompressibilité entraîne une relation sur la vitesse des tubes à satisfaire

$$\int_{\omega_F} \nabla_y \cdot \mathbf{v}_0 d\omega = \int_{\gamma_{F/S}} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} d\gamma = \int_{\gamma_{F/S}} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0 \quad (4.14)$$

- et que la déformation du faisceau à l'ordre 0 est indépendante de la variable des échelles rapides. Le déplacement des tubes est donc bien indépendant vis à vis de cette même variable.

On obtient alors le système d'équations principales de la méthode

$$\begin{aligned} & \text{dans } \Omega_F \begin{cases} \nabla_x \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\nabla_x p_0 - \nabla_y p_1, \end{cases} \\ & \text{dans } \Omega_S \begin{cases} \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_0 = -\frac{4k}{\pi D^2} \mathbf{u}_0 + \nabla_x \underline{\sigma}_0 + \nabla_y \underline{\sigma}_1 + \rho_s \mathbf{a}, \\ (\nabla_x \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_x \mathbf{u}_0) + (\nabla_y \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \mathbf{u}_1) = 0, \end{cases} \\ & \text{sur } \Gamma_{F/S} \begin{cases} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \\ \underline{\sigma}_0 \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

FIGURE 4.4 – Problème cellulaire portant sur les vecteurs  $\chi$ .

De l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système précédent on trouve

$$\begin{cases} \rho \nabla_y \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right) = -\nabla_y \cdot \nabla_x p_0 - \nabla_y \cdot \nabla_y p_1 \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \rho \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \cdot \mathbf{n} = -\nabla_x p_0 \cdot \mathbf{n} - \nabla_y p_1 \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.16)$$

soit,

$$\begin{cases} \Delta_y p_1 = 0 \\ \nabla_y p_1 \cdot \mathbf{n} = -\nabla_x p_0 \cdot \mathbf{n} - \rho \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.17)$$

On fait l'hypothèse de séparation des variables. La pression  $p_1$  peut s'écrire comme un produit de fonctions dépendant l'une de  $x$ , l'autre de  $y$ . On cherche donc une solution de  $p_1$  sous la forme

$$p_1(x, y, t) = -\chi(y) \cdot \left( \nabla_x p_0 + \rho \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 \right) + C(x), \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{U}_0$  est une fonction dépendant de la variable de variation lente  $x$ , constante par cellule élémentaire définie comme

$$\mathbf{U}_0(x) = \frac{1}{\omega_S} \int_{\omega_S} \mathbf{u}_0(x) d\omega. \quad (4.19)$$

Le vecteur  $\chi$  est solution du problème cellulaire

$$\begin{cases} \Delta_y \chi = 0 & \text{dans } \omega_F, \\ \nabla_y \chi \mathbf{n} = \mathbf{n} & \text{sur } \gamma_{F/S}, \end{cases} \quad (4.20)$$

représenté en figure 4.4. Les fonctions  $\chi$  sont périodiques sur la cellule et définies à une constante près qui est prise afin d'avoir une moyenne nulle sur la cellule élémentaire.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient donc

$$\rho \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = - \left( \underline{Id} - {}^t \nabla_y \chi \right) \nabla_x p_0 + \rho {}^t \nabla_y \chi \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 \quad \text{dans } \Omega_F. \quad (4.21)$$

Afin de résoudre le système on fait la prise de moyenne fluide de la cellule élémentaire suivante

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \bullet d\omega \quad (4.22)$$

En appliquant cet opérateur, la conservation de la masse nous donne, du fait de la périodicité des fonctions  $v_k(x, y, t)$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla_x \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_1 d\omega = \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v}_0 d\omega \right) + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} d\gamma, \quad (4.23)$$

soit en posant  $\mathbf{V}_0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v}_0 d\omega$ ,

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla_x \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_1 d\omega = \nabla_x \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} d\gamma. \quad (4.24)$$

À l'aide des égalités de conditions limites sur  $v_1$  et après application du théorème de la divergence on obtient,

$$\frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla_x \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla_y \cdot \mathbf{v}_1 d\omega = \nabla_x \cdot \mathbf{V}_0 - \frac{1}{\omega} \int_{\omega_S} \nabla_y \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 d\omega. \quad (4.25)$$

On remarque que

$$\nabla_y \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} Tr \left( \nabla_y \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_y \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 \right) = \frac{1}{2} Tr \left( \nabla_y \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 + {}^t \nabla_y \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \right) = \nabla_x \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0, \quad (4.26)$$

d'après l'équation du tenseur des déformations du système (4.15).

Ainsi on obtient l'équation de conservation de la masse du système homogénéisé

$$\nabla_x \cdot \mathbf{V}_0 - \frac{\omega_S}{\omega} \nabla_x \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{U}_0 = 0, \text{ dans } \Omega. \quad (4.27)$$

La prise de moyenne de la conservation de la quantité de mouvement donne

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt} V_0 &= -\frac{A}{\omega} \nabla_x p_0 + \rho \frac{B}{\omega} \frac{d^2}{dt^2} U_0, \text{ dans } \Omega. \\ B &= \int_{\omega_F} \nabla_y \chi d\omega \\ A &= \omega_F \underline{\underline{Id}} - B \end{cases} \quad (4.28)$$

$A$  et  $B$  sont des matrices et  $B$  est symétrique définie positive [19]. Cependant la géométrie de la cellule élémentaire fait que ces matrices sont diagonales et que les termes diagonaux sont égaux. On les note à présent  $A \underline{\underline{Id}}$  et  $B \underline{\underline{Id}}$  où  $A$  et  $B$  sont des scalaires.

Enfin l'intégration de l'équation de mouvement des tubes sur la partie solide de la cellule élémentaire donne

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + k \mathbf{U}_0 + \int_{\omega_S} \nabla_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 d\omega + \int_{\gamma_{F/S}} -p_1 \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (4.29)$$

soit

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + k \mathbf{U}_0 + \omega_S \nabla_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 + (\nabla_x p_0 + \rho \frac{d}{dt} U_0) \int_{\gamma_{F/S}} \chi \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0 \quad (4.30)$$

ou encore

$$\left( m \underline{\underline{Id}} + \rho B \right) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + k \mathbf{U}_0 + \omega_S \nabla_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_0 + B \nabla_x p_0 = 0 \quad (4.31)$$

Le tenseur des contraintes au sein des tubes est artificiel. Il a été introduit afin de manipuler une équation continue définie sur le domaine solide. Le tenseur doit satisfaire le système

$$\begin{cases} \nabla_y \underline{\underline{\sigma}}_0 = 0 & \text{dans } \Omega_S, \\ \underline{\underline{\sigma}}_0 \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_{F/S}. \end{cases} \quad (4.32)$$

On définit alors le champ scalaire de pression  $P_0(x)$  tel que

$$\begin{cases} P_0(x) \underline{\underline{Id}} = \underline{\underline{\sigma}}_0(x), & \text{dans } \Omega_S, \\ P_0(x) = p_0(x), & \text{dans } \Omega_F. \end{cases} \quad (4.33)$$

Ce champ de pression satisfait le système (4.32). L'équation (4.31) devient

$$(m + \rho B) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + k \mathbf{U}_0 + (\omega_S + B) \nabla_x P_0 = 0, \text{ dans } \Omega. \quad (4.34)$$

Dans cette équation, l'effet du fluide est représenté par deux termes. Un terme de masse ajoutée  $\rho B$ , et un terme de gradient de pression correspondant à l'action due au mouvement global de fluide.

Finalement le système homogénéisé est le suivant,

$$\text{dans } \Omega, \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}_0 = \frac{\omega_S}{\omega} \nabla \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{U}_0, \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_0 = -\frac{A}{\omega} \nabla P_0 + \rho \frac{B}{\omega} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0, \\ (m + \rho B) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + k \mathbf{U}_0 + (\omega_S + B) \nabla P_0 = 0, \\ B \underline{\underline{Id}} = \int_{\omega_F} \nabla_y \chi \, d\omega, \\ A = \omega_F - B. \end{cases} \quad (4.35)$$

où  $\mathbf{V}_0$ ,  $P_0$  et  $\mathbf{U}_0$  sont des fonctions dépendant des variables  $(x, t)$  et définies sur le domaine  $\Omega$ .

La convergence du système initial lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers le système homogénéisé est montré dans [34]. Dans le système obtenu, un certain nombre de changements de variables sont nécessaires afin d'obtenir la signification physique de chaque terme. De plus la mise en place de cette méthode d'homogénéisation hors du cadre des équations d'Euler linéarisées pose des problèmes, en particulier lorsque l'on considère de grands déplacements avec l'apparition d'un terme non-linéaire. Afin de mieux comprendre les mécanismes d'homogénéisation, nous nous intéressons à une méthode d'homogénéisation équivalente mais construite à partir de considérations physiques.

## 4.2 Approche physique de l'homogénéisation

On veut mettre en place une méthode d'homogénéisation équivalente à la méthode présentée précédemment mais dont les mécanismes soient facilement identifiables. La méthode exposée dans cette section repose sur des considérations physiques. L'approche est la même que pour la méthode de la prise de moyenne. Dans un premier temps on présente l'analyse d'un cas test simple dont les solutions analytiques de champs de vitesse et de pression sont connues. Les principaux mécanismes de l'homogénéisation sont détaillés. La méthode est ensuite appliquée au cas de la cellule élémentaire du problème (4.1). L'équivalence entre les systèmes homogénéisés obtenus est détaillée. Enfin un cas d'application de la méthode est réalisé.

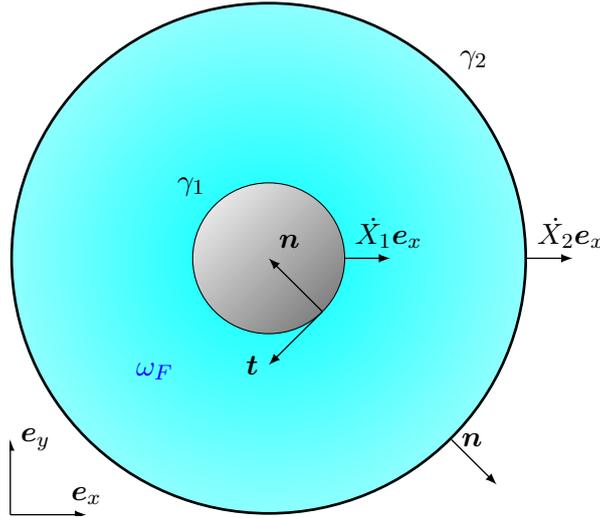


FIGURE 4.5 – Cas d'étude à solution analytique étudié dans [27].

### 4.2.1 Système à solution analytique

Afin d'identifier et de comprendre au mieux les processus d'homogénéisation, il est utile de s'intéresser à un système simple. On considère le cas d'un cylindre plein de rayon  $r_1$  contenu dans du fluide parfait incompressible lui-même contenu dans un cylindre externe creux de rayon  $r_2$ , comme décrit dans [27] et représenté en figure 4.5. On note  $X_1$  la valeur du déplacement du cylindre interne de frontière  $\gamma_1$  et  $X_2$  celle du déplacement du cylindre externe de frontière  $\gamma_2$ . Les déplacements des deux cylindres se font selon une même direction (dans cet exemple on suppose que cet axe est l'axe horizontal). On suppose le déplacement relatif de ces tubes très faible devant l'épaisseur de l'anneau fluide. L'écoulement est décrit par les équations d'Euler linéarisées.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \omega_F, \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla p, & \text{dans } \omega_F, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \dot{X}_i (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}), & \text{sur } \gamma_i. \end{cases} \quad (4.36)$$

On considère dans ce cas de déplacements très faibles devant les dimensions du système. Le système peut donc être décrit sur une géométrie fixe. On peut réécrire le système (4.36) en une équation de Laplace pour la pression.

$$\begin{cases} \Delta p = 0, & \text{dans } \omega_F, \\ \nabla p \mathbf{n} = -\rho \ddot{X}_i (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}), & \text{sur } \gamma_i. \end{cases} \quad (4.37)$$

Le champ de pression solution de ce problème est donné par

$$p(r, \theta) = -\rho \left[ \frac{\ddot{X}_2 r_2^2 - \ddot{X}_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} \right] \cos \theta, \quad (4.38)$$

et le champ de vitesse fluide associé est

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \left[ \frac{\dot{X}_2 r_2^2 - \dot{X}_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \right] \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= - \left[ \frac{\dot{X}_2 r_2^2 - \dot{X}_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.39)$$

La composante horizontale de la force exercée par le fluide sur le cylindre interne se calcule comme

$$\begin{aligned}
F_{f \rightarrow \Gamma_1} \cdot \mathbf{e}_x &= \int_{\Gamma_1} p(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x \, d\Gamma \\
&= \int_{r=r_1, \theta} p(r, \theta) (-\cos \theta) r \, d\theta \\
&= \rho \left[ \frac{\ddot{X}_2 r_2^2 - \ddot{X}_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r_1^2 + \frac{(\ddot{X}_2 - \ddot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \int_{\theta} \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= -\rho \pi r_1^2 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ddot{X}_1 + \rho \pi r_1^2 \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ddot{X}_2 \\
&= -\rho \pi r_1^2 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ddot{X}_1 + \rho \pi r_1^2 \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 \right) \ddot{X}_2
\end{aligned} \tag{4.40}$$

On reconnaît  $m_d = \rho \pi r_1^2$  la masse d'eau déplacé par le fluide. Cette masse multiplié par le coefficient géométrique  $\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$  donne la masse ajoutée par le fluide [27]. La masse ajoutée est une notion qui représente l'énergie utilisée par le système pour mettre en mouvement le fluide environnant. La force exercée par le fluide sur le cylindre interne s'exprime donc comme

$$\begin{cases} F_{f \rightarrow \Gamma_1} \cdot \mathbf{e}_x = -m_a \ddot{X}_1 + (m_a + m_d) \ddot{X}_2 \\ \text{où} \quad m_a = m_d \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \quad \quad m_d = \rho \pi r_1^2. \end{cases} \tag{4.41}$$

On s'intéresse à la vitesse globale de fluide, également appelée vitesse de Darcy  $\mathbf{V}_D$ , comme étant la vitesse moyenne sur les deux phases fluide et solide du système. On définit la vitesse de Darcy dans le cas présent comme

$$\mathbf{V}_D = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v} \, d\omega + \frac{\omega_S}{\omega} \ddot{X}_1 \mathbf{e}_x. \tag{4.42}$$

Alors la composante selon l'axe  $\mathbf{e}_x$  de la vitesse de Darcy vaut

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x &= \frac{1}{\pi r_2^2} \left[ \pi r_1^2 \dot{X}_1 + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} v(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_x r \, dr \, d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi r_2^2} \left[ \pi r_1^2 \dot{X}_1 + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{X}_2 r_2^2 - \dot{X}_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r \, dr \, d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi r_2^2} \left[ \pi r_1^2 \dot{X}_1 + \pi (\dot{X}_2 r_2^2 - \dot{X}_1 r_1^2) + \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\
&= \dot{X}_2,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

et la composante selon l'axe  $\mathbf{e}_y$  vaut

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_y &= \frac{1}{\pi r_2^2} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} v(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_y r \, dr \, d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi r_2^2} \left[ - \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} (2 \sin \theta \cos \theta) r \, dr \, d\theta \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Ainsi la vitesse de Darcy est égale à la vitesse de bord du domaine.

$$\mathbf{V}_D = \ddot{X}_2 \mathbf{e}_x. \quad (4.45)$$

Elle représente l'effet du mouvement global de fluide, initié par le cylindre externe. La vitesse de Darcy est une notion utilisée en milieux poreux [20]. Elle représente le débit hydraulique sur une cellule élémentaire. On retrouve bien cette notion dans l'équation (4.45).

En remplaçant la vitesse de bord par la vitesse de Darcy et en notant  $X$  la valeur du déplacement du cylindre interne, l'expression de la force exercée par le fluide sur la structure devient

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \mathbf{e}_x = -m_a \ddot{X} + (m_a + m_d) \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x). \quad (4.46)$$

L'expression de la force ne dépend donc que de la dynamique du cylindre interne et d'un mouvement global de fluide. En utilisant les mêmes notations, on exprime le champ de pression comme

$$p(r, \theta) = -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) r_2^2 - \ddot{X} r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{\left( \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X} \right) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} \right] \cos \theta, \forall r_1 \leq r \leq r_2. \quad (4.47)$$

Le champ de pression ci-dessus et son gradient ne sont pas définis au sein du cylindre interne. De plus, ils dépendent des variables d'espace du domaine. L'analyse sur le cas simplifié veut mettre en évidence une relation entre des grandeurs définies sur le domaine et vérifiée sur tout ce domaine. On construit alors un champ de pression équivalent, noté  $P_H$ , à partir de la valeur du champ de pression sur le bord mais défini sur tout le domaine. Le gradient de ce champ de pression équivalent est supposé constant et satisfait

$$\begin{cases} \nabla P_H = \mathbf{C}, & \text{dans } \omega, \\ P_H(r_2, \theta) = p(r_2, \theta), & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.48)$$

L'intégrale du gradient de cette pression sur le domaine donne

$$\int_{\omega} \nabla P_H \, d\omega = \omega \mathbf{C},$$

or

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \nabla P_H \, d\omega &= \int_{\Gamma_2} P_H(r_2, \theta) \mathbf{n} \, d\gamma, \\ &= \int_{\Gamma_2} p(r_2, \theta) \mathbf{n} \, d\gamma, \\ &= -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) r_2^2 - \ddot{X} r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r_2 + \frac{\left( \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X} \right) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r_2} \right] \int_{2\pi} \cos \theta r_2 \, d\theta, \\ &= -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) r_2^2 - \ddot{X} r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r_2^2 + \frac{\left( \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X} \right) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \pi \mathbf{e}_x, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ce qui donne la valeur du gradient de pression équivalente

$$\begin{aligned}\nabla P_H &= -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \mathbf{e}_x, \\ &= -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] (\cos(\theta)\mathbf{e}_r - \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta).\end{aligned}\quad (4.50)$$

Le champ de pression équivalente est le champ de pression satisfaisant le système

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} P_H \\ \frac{\partial}{r\partial\theta} P_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \cos\theta \\ \rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \sin\theta \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

qui a pour solution

$$\begin{aligned}P_H &= -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] r \cos\theta + K, \\ &= p(r_2, \theta) \frac{r}{r_2} + K,\end{aligned}\quad (4.52)$$

qui satisfait la condition limite sur le bord du domaine  $P_H(r_2, \theta) = p(r_2, \theta)$  pour  $K = 0$ . Le champ de pression  $P_H$  est construit sur tout le domaine du cas d'étude et son gradient est constant.

On remarque d'après la relation (4.50) que

$$\nabla P_H \cdot \mathbf{e}_x = -\rho \left[ \frac{\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x)r_2^2 - \ddot{X}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) - \ddot{X}\right)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right], \quad (4.53)$$

ce qui se réécrit comme

$$\rho \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) = - \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right) \nabla P_H \cdot \mathbf{e}_x + \rho \left( \frac{2r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right) \ddot{X}. \quad (4.54)$$

De l'analyse de ce cas simplifié, on tire les deux relations (4.46) et (4.54) sur la cellule

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \mathbf{e}_x &= -m_a \ddot{X} + (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x \\ \rho \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_x) &= - \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right) \nabla P_H \cdot \mathbf{e}_x + \rho \left( \frac{2r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right) \ddot{X}. \end{cases} \quad (4.55)$$

La première relation donne un modèle de la force exercée par le fluide environnant sur le cylindre. La seconde relation est une équation proche de la conservation de la quantité de mouvement du système. Elle donne un exemple de la forme que prend l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'un système homogénéisé basé sur les équations d'Euler linéarisées. Ces deux relations sont établies pour tout le domaine du cas considéré. À partir de ces observations on réalise à présent l'analyse d'une cellule élémentaire du faisceau.

### 4.2.2 Analyse sur une cellule élémentaire

L'analyse faite dans le cas précédent est généralisée au cas d'une cellule élémentaire d'un faisceau de tube. Les mouvements sont supposés très faibles devant la taille d'une cellule élémentaire. Le fluide est supposé incompressible et décrit par les équations d'Euler linéarisées. Dans le cas d'un faisceau à mailles carrés, la cellule élémentaire est définie par un cylindre entouré par un volume de fluide au bord extérieur carré comme représenté en figure 4.2, p.60.

Par analogie avec le cas précédent, on suppose que la force exercée par le fluide sur la structure est de la forme

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -m_a \ddot{\mathbf{X}} + (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D \quad (4.56)$$

avec  $\mathbf{X}$  le déplacement du tube de la cellule élémentaire et  $\mathbf{V}_D$  la vitesse de Darcy. Il s'agit du modèle de l'expression de la force exercée par le fluide sur le cylindre (4.55) obtenue dans le cas précédent et généralisé à l'espace 2D.

Toujours par analogie, on cherche l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système homogénéisé de la forme de (4.55) généralisée au cas 2D. La vitesse de Darcy est définie comme

$$\mathbf{V}_D = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v} \, d\omega + \frac{\omega_S}{\omega} \dot{\mathbf{X}}. \quad (4.57)$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D &= \rho \frac{d}{dt} \int_{\omega_F} \mathbf{v} \, d\omega + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}}, \\ &= \int_{\omega_F} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \, d\omega + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

car la géométrie est fixe au cours du temps. L'expression du terme de dérivée temporelle est remplacée selon l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (4.1),

$$\begin{aligned} \rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D &= \int_{\omega_F} -\nabla p \, d\omega + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}}, \\ &= \int_{\gamma_{ext}} -p\mathbf{n} \, d\gamma + \int_{\gamma_{F/S}} -p\mathbf{n} \, d\gamma + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}}, \\ &= \int_{\gamma_{ext}} -p\mathbf{n} \, d\gamma - \mathbf{F}_{f \rightarrow s} + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

La force exercée par le fluide sur le cylindre  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$  est remplacée par son expression (4.56),

$$\rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = \int_{\gamma_{ext}} -p\mathbf{n} \, d\gamma + m_a \ddot{\mathbf{X}} - (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D + \rho\omega_S \ddot{\mathbf{X}},$$

soit,

$$[\rho\omega + (m_a + m_d)] \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = \int_{\gamma_{ext}} -p\mathbf{n} \, d\gamma + [m_a + \rho\omega_S] \ddot{\mathbf{X}}. \quad (4.60)$$

Le terme d'intégrale de la pression sur le bord extérieur est une différence de pression sur les bords de la cellule élémentaire. À l'instar du cas de l'anneau de fluide précédent, on introduit une pression équivalente  $P_H$  tel que

$$\int_{\gamma_{ext}} -p\mathbf{n} \, d\gamma = -\omega \nabla P_H. \quad (4.61)$$

Le cas d'analyse précédent a montré que cette pression pouvait être construite lorsque des solutions analytiques existaient. Elle n'est pas explicitée dans le cas de la cellule élémentaire. Ainsi l'équation (4.60) devient

$$\begin{aligned} [\rho\omega + (m_a + m_d)] \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D &= \omega \nabla P_H + [m_a + \rho\omega_S] \ddot{\mathbf{X}}, \\ \text{soit,} & \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D &= -\frac{\omega}{\rho\omega + (m_a + m_d)} \nabla P_H + \frac{m_a + \rho\omega_S}{\rho\omega + (m_a + m_d)} \ddot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Le confinement du tube dans la cellule élémentaire est représenté par le paramètre  $J$  définit comme

$$J = \frac{m_a + \rho\omega_S}{m_a + \rho(\omega_S + \omega)}, \quad (4.63)$$

et la relation (4.62) devient

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = -(1 - J) \nabla P_H + J \ddot{\mathbf{X}}. \quad (4.64)$$

Cette équation est la généralisation de l'équation (4.55) au cas de la cellule élémentaire et en 2D. Le cas limite  $J = 0$  est le cas où aucune structure n'est présente. On obtient alors une équation moyennée de la conservation de la quantité de mouvement  $\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = -\nabla P_H$ . Le cas  $J = 1$  est le cas limite inverse. La structure occupe tout l'espace de la cellule élémentaire et  $\mathbf{V}_D = \dot{\mathbf{X}}$ .

On complète cette équation de conservation de la quantité de mouvement, par une équation de conservation de la masse. On applique l'opérateur divergence à la vitesse de Darcy,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_D &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v} \, d\omega + \frac{\omega_S}{\omega} \ddot{\mathbf{X}} \right), \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \mathbf{v} \, d\omega + \frac{1}{\omega} \int_{\omega_S} \ddot{\mathbf{X}} \, d\omega \right), \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\omega + \frac{1}{\omega} \int_{\omega_S} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{X}} \, d\omega - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma. \end{aligned} \quad (4.65)$$

La condition limite sur les vitesses normales annule les deux intégrales de contour. De plus la divergence de la vitesse fluide est nulle dans le domaine fluide et la vitesse du cylindre est uniforme dans le domaine solide. On obtient une équation de la conservation de la masse exprimée en vitesse de Darcy comme

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0. \quad (4.66)$$

Cette équation définie sur chaque cellule élémentaire est également vraie sur tout le faisceau. Elle assure le lien des vitesses de Darcy entre les différentes cellules élémentaires.

Enfin, en considérant qu'un cylindre (de masse  $m$  et de raideur  $k$ ) d'une cellule élémentaire est un oscillateur soumis aux forces exercées par le fluide et est également soumis à une sollicitation externe, l'équation régissant son mouvement s'exprime en utilisant l'expression de la force (4.56)

$$(m + m_a) \ddot{\mathbf{X}} + k \ddot{\mathbf{X}} = (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D + m \mathbf{a}. \quad (4.67)$$

Le système homogénéisé pour une cellule élémentaire s'écrit

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = -(1 - J) \nabla P_H + J \ddot{\mathbf{X}}, \\ (m + m_a) \ddot{\mathbf{X}} + k \ddot{\mathbf{X}} = (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D + m \mathbf{a}, \\ J = \frac{m_a + \rho \omega_S}{m_a + \rho(\omega_S + \omega)}. \end{cases} \quad (4.68)$$

### 4.2.3 Équivalence des formulations de la méthode d'homogénéisation

La méthode des développements asymptotiques et l'approche physique donne des systèmes de formes similaires. Ces méthodes sont équivalentes, cependant les liens entre les formulations ne sont pas évidents. Ces liens se montrent à travers l'équivalence de deux relations. On les détaille dans ce qui suit.

La méthode des développements asymptotiques donne l'équation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_0 = -\frac{\omega_F - B}{\omega} \nabla P_0 + \rho \frac{B}{\omega} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.69)$$

Dans cette équation l'opérateur de dérivation temporelle est appliqué à la vitesse moyenne de la phase fluide  $\mathbf{V}_0$ . On réalise le lien avec l'équation de conservation de quantité de mouvement (4.64) de l'approche physique en considérant la vitesse de Darcy où

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_0 + \frac{\omega_S}{\omega} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0. \quad (4.70)$$

L'équation (4.69) devient

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = -\frac{\omega_F - B}{\omega} \nabla P_0 + \rho \frac{B + \omega_S}{\omega} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0. \quad (4.71)$$

En posant les expressions

$$\begin{aligned} J &= \frac{B + \omega_S}{\omega}, \\ 1 - J &= \frac{\omega_F - B}{\omega}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

on obtient

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = -(1 - J) \nabla P_0 + \rho J \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0. \quad (4.73)$$

Les deux formulations sont donc équivalentes pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

L'équation (4.34) de la dynamique du faisceau du système obtenue avec la méthode des développements asymptotiques est une équation d'oscillateur définie sur le domaine où le champ de force appliqué par le fluide sur le faisceau est

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{f \rightarrow s}(x, t) &= -\rho B \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 - (\omega_S + B) \nabla P_0, \\ &= -\rho \omega J \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + \rho \omega_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 - \omega \nabla P_0 + \omega(1 - J) \nabla P_0, \end{aligned} \quad (4.74)$$

d'après l'expression de  $J$  ci-dessus. On reconnaît dans une partie de cette expression le membre de droite de l'équation (4.73). La force exercée par le fluide sur le faisceau s'arrange en

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s}(x, t) = -\rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D + \rho\omega_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 - \omega \nabla P_0, \quad (4.75)$$

soit,

$$-(1 - J) \nabla P_0 = \frac{1 - J}{\omega} \left[ \mathbf{F}_{f \rightarrow s} + \rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D - \rho\omega_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 \right], \quad (4.76)$$

que l'on réinjecte dans (4.73). On obtient alors

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D = \frac{1 - J}{\omega} \left[ \mathbf{F}_{f \rightarrow s} + \rho\omega \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D - \rho\omega_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 \right] + \rho J \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0. \quad (4.77)$$

On en extrait l'expression de la force

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = \rho\omega \frac{J}{1 - J} \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D + \left[ \rho\omega_S - \rho\omega \frac{J}{1 - J} \right] \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0. \quad (4.78)$$

En notant

$$\begin{cases} m_a = \rho\omega \frac{J}{1 - J} - \rho\omega_S = \rho\omega \frac{J}{1 - J} - m_d, \\ m_a + m_d = \rho\omega \frac{J}{1 - J}, \end{cases} \quad (4.79)$$

on retombe sur l'expression de la force exercée par le fluide sur le faisceau

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -m_a \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{U}_0 + (m_a + m_d) \frac{d}{dt} \mathbf{V}_D. \quad (4.80)$$

On établit également la relation entre la masse ajoutée dans le cadre des équations d'Euler linéarisées et le coefficient géométrique  $B$  par

$$m_a = \rho \left[ \omega \frac{B + \omega_S}{B + \omega_S - \omega} - \omega_S \right]. \quad (4.81)$$

L'équivalence des deux relations constituant les systèmes obtenus par la méthode des développements asymptotiques et par l'analyse physique est donc montrée. Une différence existe entre les deux formulations, la méthode des échelles multiples définit des équations continues sur tout le domaine à homogénéiser. L'analyse physique réalisée ici donne ces mêmes équations par cellule élémentaire. Cela revient à appliquer la méthode de la prise de la moyenne aux centres des ces cellules. Les équations ainsi obtenues sont donc généralisables à tout le domaine.

Afin d'appliquer la méthode, le coefficient  $J$  doit être déterminé. Il peut être calculé à partir de la valeur de la masse ajoutée  $m_a$ . Si l'on souhaite déterminer la masse ajoutée, on peut résoudre par exemple le problème suivant définie sur la cellule élémentaire 4.2, p.60,

$$\begin{cases} \Delta p = 0, & \text{dans } \omega_F, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = -\rho \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \gamma_{F/S}, \\ p \text{ périodique sur les bords de la cellule.} \end{cases} \quad (4.82)$$

L'intégration du champ de pression solution de ce problème sur le bord du cylindre donne la force appliquée par le fluide sur celui-ci. De plus, le champ de pression permet de connaître le champ de vitesse dans le domaine fluide de la cellule. La vitesse de Darcy est alors calculée et avec l'expression de la force (4.56), on détermine la masse ajoutée. Il a été montré que le coefficient  $J$  peut également être déterminé géométriquement. L'expression (4.72) de ce coefficient ne dépend que la valeur de  $B$  qui se détermine par la résolution du problème cellulaire portant sur les fonctions  $\chi$  (4.20),

$$\begin{cases} \Delta\chi = 0, & \text{dans } \omega_F, \\ \nabla\chi\mathbf{n} = \mathbf{n} & \text{sur } \gamma_{F/S}, \\ \chi \text{ périodique sur les bords de la cellule.} \end{cases} \quad (4.83)$$

On remarque que les composantes du vecteur  $\chi$  sont les pressions correspondantes aux problèmes cellulaires sur les pressions ci-dessus avec comme conditions limites d'accélération unitaires selon les différents axes du système.

#### 4.2.4 Application de la méthode et résultats

La méthode est validée par la comparaison de l'analyse dynamique du modèle avec une résolution du système basée sur les équations d'Euler linéarisées pour le fluide [58]. Le système considéré pour cette validation est un faisceau carré de 100 tubes à sections circulaires ( $10 \times 10$ ), plongé dans un fluide incompressible et confiné dans une cuve rigide circulaire. Le système est représenté en figure 4.6. Pour première comparaison, des analyses

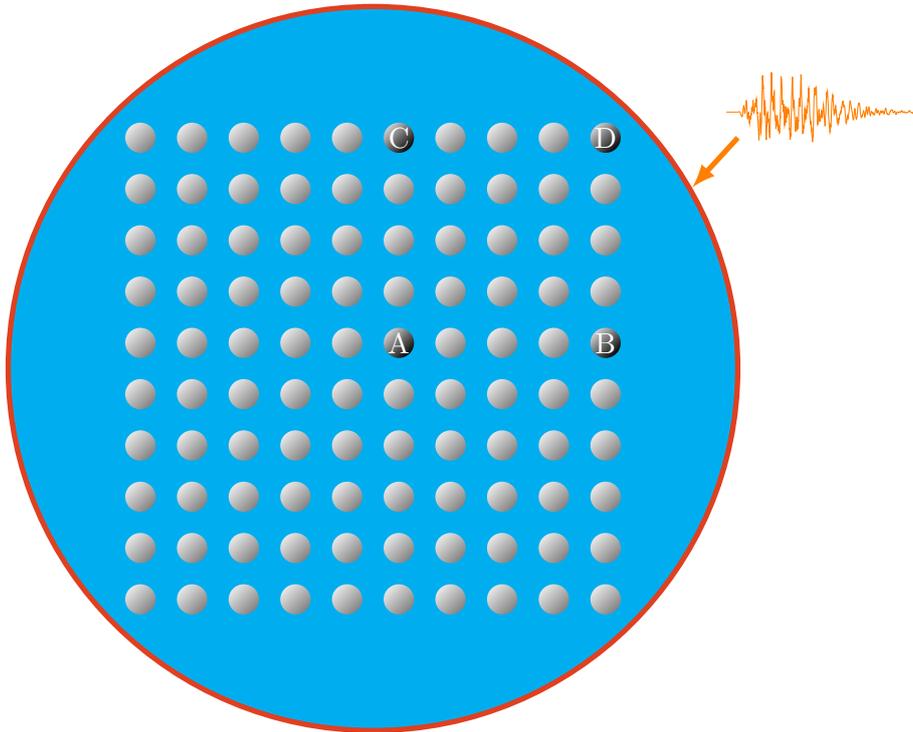


FIGURE 4.6 – Faisceau de 100 tubes confiné dans une cuve rigide et soumis à une sollicitation externe.

modales sont réalisées sur le système homogénéisé et sur le système basé sur les équations d'Euler linéarisées. La seconde validation s'intéresse à la réponse du faisceau soumis à

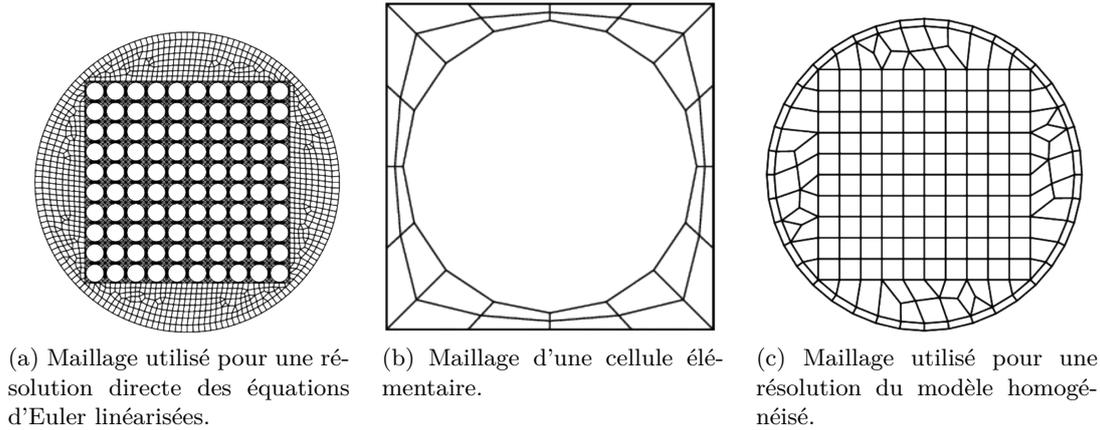


FIGURE 4.7 – Comparaison des maillages employés pour la résolution du cas d'application. Figures extraites de [58].

une sollicitation sismique. La figure 4.7 compare les maillages utilisés pour la résolution numérique de chaque méthode. La résolution des équations d'Euler linéarisées requiert un maillage plus fin. Dans le cas présent celui-ci contient 6700 nœuds. Le maillage utilisé pour le modèle ne compte que 660 nœuds, soit une réduction de plus de 90% de la taille du calcul.

### Analyse modale

Les tubes du faisceau sont tous identiques. La fréquence propre dans le vide des tubes du faisceau est  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ . En air les tubes ne sont pas couplés. Une analyse modale donnerait donc 200 modes à  $f_0$ . L'immersion du faisceau dans le fluide va coupler les tubes entre eux. Du point de vue du faisceau, la masse ajoutée par le fluide va "alourdir" le faisceau. La conséquence est une baisse des fréquences des tubes. De plus, la masse ajoutée est une expression de l'énergie transmise au fluide par la structure. Ainsi les modes de vibrations qui maximisent l'énergie transmise au fluide sont plus "alourdis" par le fluide et connaissent des baisses de fréquences plus importantes. Les analyses modales du système basé sur les équations d'Euler linéarisées et du modèle homogénéisé sont réalisées pour déterminer les modes propres et leurs fréquences propres associés. L'analyse modale utilise la méthode  $(U, P, \Phi)$ . La figure 4.8 représente et compare les masses modales cumulées et les nombres de modes obtenus en fonction de la fréquence réduite  $\beta$ , où  $\beta_n = \frac{f_n}{f_0}$  pour le  $n^{\text{ième}}$  mode. Les 200 modes extraits de l'analyse modale ne concernent que le faisceau et le fluide (les modes comprenant la cuve sont exclus). C'est pourquoi les masses modales cumulées culminent à 50%. Les fréquences propres réduites minimale et maximale sont bien retrouvées par le modèle. Le mode prédominant à  $\beta^*$  en terme de masse modale est également bien retrouvé (et sa masse modale  $\mu^*$  correctement évaluée). Un nombre important de modes sont modélisés à la fréquence propre maximale. Il s'agit de modes où les mouvements de tubes sont tous en phase. Les mouvements induits de fluide sont donc limités et une périodicité des conditions limites au niveau des cellules élémentaires apparaît. Le modèle ne peut les distinguer. Ces modes ont des masses modales très faibles voir nulles.

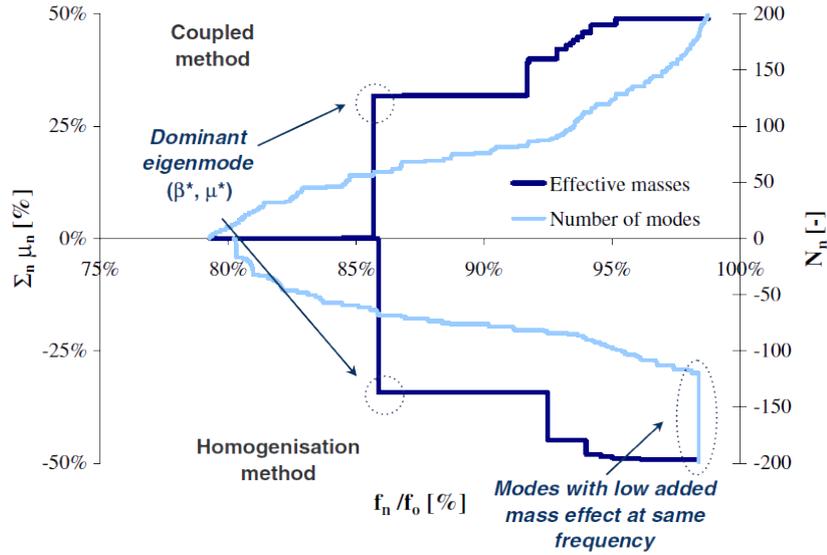


FIGURE 4.8 – Masses modales cumulées  $\left(\sum_n \mu_n\right)$  et nombres de modes cumulés ( $N_n$ ) en fonction de la fréquence réduite  $\beta_n$  issus de l'analyse modale du système basé sur les équations d'Euler linéarisées et du modèle homogénéisé. Figure extraite de [58].

### Réponse du système à une sollicitation sismique

Le faisceau est à présent soumis à une sollicitation sismique, représentée en figure 4.9. Le contenu fréquentiel de la sollicitation contient la fréquence de résonance du faisceau. La réponse en déplacement d'un tube situé dans le cœur du faisceau (tube A sur la figure 4.6) obtenue par le modèle et la résolution des équations d'Euler linéarisées est représentée sur la figure 4.10. Le déplacement d'un tube dans le vide est également représenté sur la figure. Les déplacements du tube obtenus par les deux méthodes sont quasiment identiques. Quelques différences s'observent pour les tubes B, C et D de la figure 4.6 avec une différence d'amplitude maximale de déplacement allant jusqu'à 6%. Cependant la valeur moyenne sur le faisceau du déplacement maximum est correctement évaluée. Le modèle homogénéisé basé sur le cas non visqueux pour le fluide donne de bon résultats en comparaison à la résolution des équations d'Euler linéarisées couplées à la dynamique des tubes.

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une méthode d'homogénéisation utilisée pour modéliser le problème d'interaction fluide-structure de la vibration d'un faisceau de tubes immergé dans un fluide non-visqueux, dans l'approximation des très petits déplacements pour les cylindres. La méthode des développements asymptotiques utilisée est un outil mathématique s'appliquant au système d'équation considéré. En se basant sur des analyses physiques de cellules élémentaire, on montre que l'on peut retrouver le même système d'équation. Les deux approches sont équivalentes.

Dans le cas d'un fluide visqueux et en considérant des déplacements de solide non négligeables pour la structure, l'approche mathématique devient complexe à mettre en place. En effet, le système devient non-linéaire dans cette configuration. Cependant, une

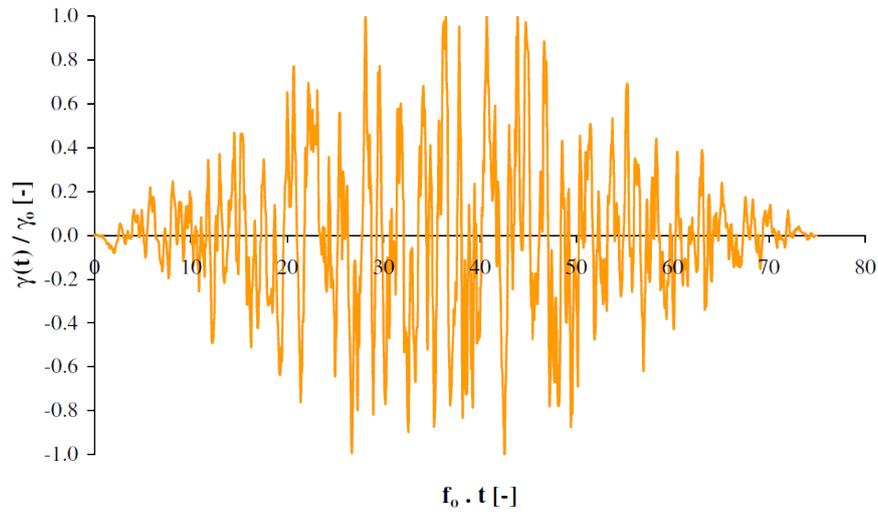


FIGURE 4.9 – Accélération de la sollicitation sismique imposée. Figure extraite de [58].

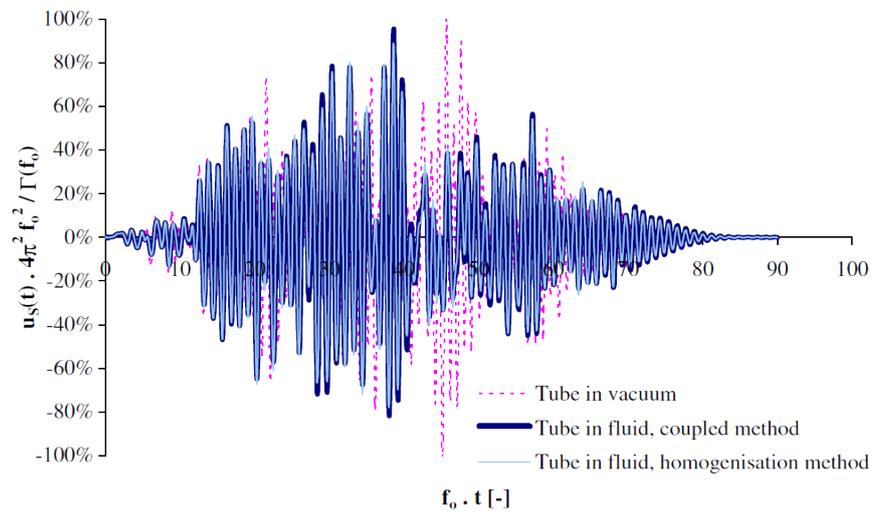


FIGURE 4.10 – Comparaison du déplacement du tube A soumis à la sollicitation sismique calculé par la résolution des équations d'Euler linéarisées (—), par le modèle homogénéisé (—) et dans le vide (- - -). Figure extraite de [58].

analyse physique inspirée de celle présentée dans ce chapitre est envisageable.



## Chapitre 5

# Le modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes

La méthode employée pour développer un modèle homogénéisé dans le cas non visqueux linéarisé a été présentée dans le chapitre précédent. Cette méthode est basée sur les équations d'Euler linéarisées pour le fluide. Elles ne prennent pas en compte la viscosité du fluide, ni les grands déplacements de structure. Dans ce chapitre est détaillée la construction d'un modèle homogénéisé permettant de prendre en compte ces grands déplacements de structures ainsi que la viscosité du fluide. La méthode proposée se base sur la notion de vitesse de Darcy. L'esquisse d'un premier modèle est obtenue. Les termes le composant sont analysés. L'expression de la force exercée par le fluide sur le faisceau est un élément clef de la méthode. Une approximation de cette force est construite. Les coefficients de cette approximation sont discutés. Ceux-ci pilotent le modèle final. Un modèle final est introduit et est mis en pratique à travers plusieurs cas test. Il est validé par la comparaison avec des simulations directes d'interaction fluide-structure.

### 5.1 Mise en place du modèle

Le problème bidimensionnel à homogénéiser est un faisceau de tubes baigné dans un fluide visqueux soumis à une excitation externe. La géométrie du problème est identique au problème considéré dans le chapitre précédent à la section 4.1. La figure 5.1 donne une représentation du système considéré. Le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Il est de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$  et est initialement au repos. Le faisceau est constitué de  $N$  cylindres à section circulaire disposés en mailles carrés. Les tubes de diamètre  $D$  sont espacés d'une longueur  $E$ . Le domaine total  $\Omega$  du système est constitué d'une phase fluide  $\Omega_F$  et d'une phase solide  $\Omega_S$ . L'interface entre le fluide et les cylindres est noté  $\Gamma_{F/S}$ . La normale  $\mathbf{n}$  à cette frontière est orientée du fluide à la structure.

Chaque cylindre est assimilé à un oscillateur à deux degrés de libertés de masse  $m$  et de raideur  $k$  comme représenté en figure 5.2. Le  $l^{\text{ème}}$  cylindre est référencé par l'indice  $l$  variant de 1 à  $N$ . On note  $\Gamma_{F/S,l}$  le bord du cylindre  $l$ . Chaque cylindre est soumis à la force exercée par le fluide ainsi qu'à une excitation externe d'accélération  $\mathbf{a}$  uniforme sur le faisceau.

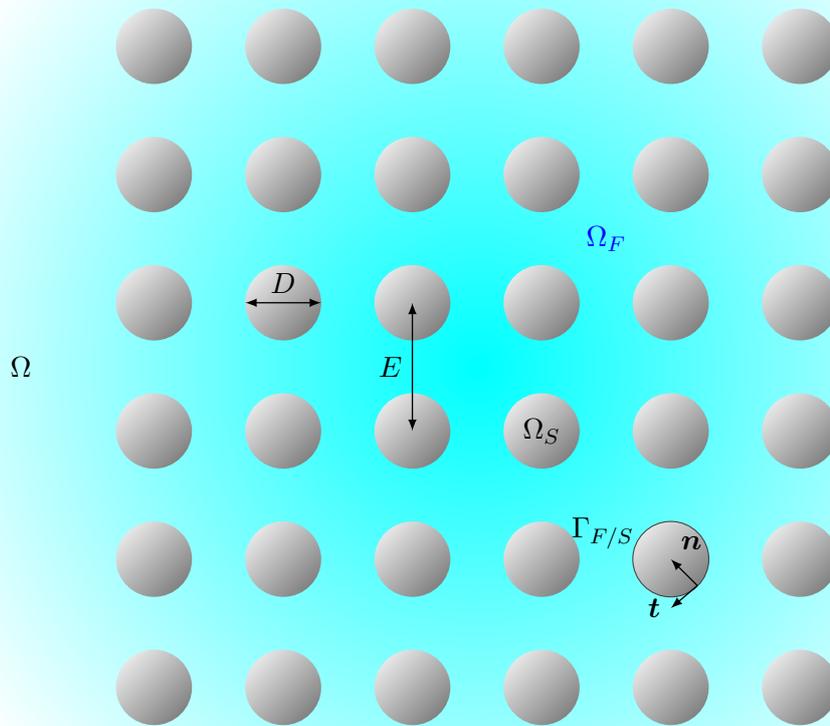


FIGURE 5.1 – Faisceau de  $N$  tubes immergé dans un fluide initialement au repos.

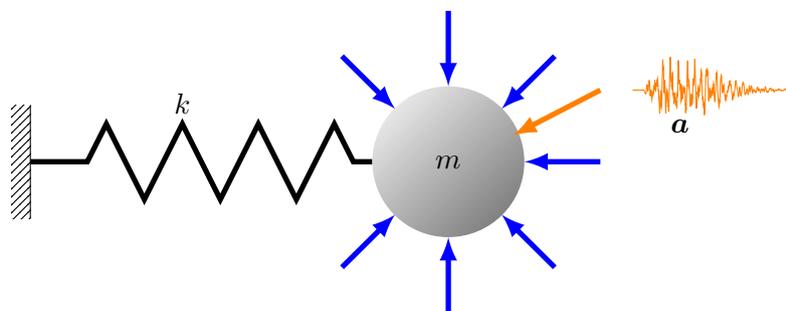


FIGURE 5.2 – Système masse ressort représentant un cylindre du faisceau soumis aux forces exercées par le fluide ainsi qu'à une sollicitation externe.

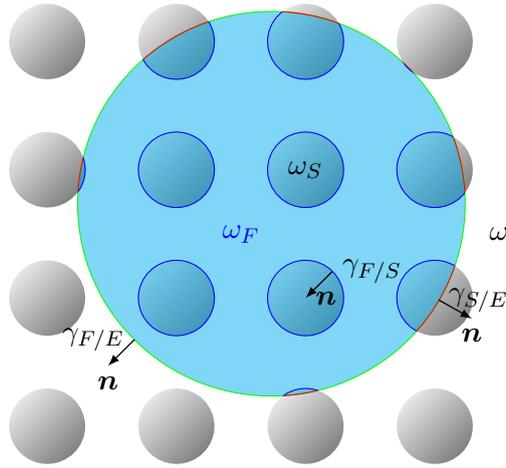


FIGURE 5.3 – Domaine d'intégration  $\omega$  constitué d'une phase fluide  $\omega_F$  et d'une phase solide  $\omega_S$ .

Le problème est décrit par le système d'équation suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega_F, \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} & \text{dans } \Omega_F, \\ m \ddot{\mathbf{X}}_l - k \dot{\mathbf{X}}_l = \int_{\gamma_{F/S,l}} \left( p \underline{Id} - \mu (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \right) \mathbf{n} d\gamma + m \mathbf{a} & \text{pour } l = 1, \dots, N, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}_l & \text{sur } \gamma_{F/S,l}. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Dans le cadre des équations d'Euler linéarisées, la méthode d'homogénéisation présentée au chapitre 4 utilise la notion de vitesse de Darcy. De même, le modèle basé sur les équations de Navier-Stokes utilise cette notion. La vitesse de Darcy se définit à partir de l'intégration sur une portion du domaine total  $\Omega$ . Le volume total contient une partie fluide  $\Omega_F$  et une partie solide  $\Omega_S$ . Dans ce chapitre le domaine d'intégration est noté  $\omega$ . Par abus de notation  $\omega$  désigne le domaine d'intégration et le volume de ce domaine. Ce domaine est défini sur les deux phases fluide et solide. La partie fluide de ce domaine est notée  $\omega_F$  et la partie structure est noté  $\omega_S$ . La frontière entre le fluide et les solides compris dans  $\omega$  est noté  $\gamma_{F/S}$ . Le volume solide correspondant au cylindre  $l$  est noté  $\omega_{S,l}$ . On note  $\gamma_{F/S,l}$  sa frontière avec  $\omega_F$  de normale  $\mathbf{n}$  entrante au solide. Enfin la frontière extérieure  $\gamma_{ext}$  de  $\omega$  est elle aussi composée d'une partie fluide et d'une partie solide que l'on note respectivement  $\gamma_{F/E}$  et  $\gamma_{S/E}$ , de normale  $\mathbf{n}$  sortante au domaine. Pour le moment, on n'assume rien sur la forme et la taille du domaine d'intégration. Un exemple de volume d'intégration est représenté en figure 5.3.

La vitesse de Darcy se définit comme la moyenne des vitesses dans le volume d'intégration, pondérées par les volumes des parties fluide et solide de ce volume d'intégration. On définit les deux fonctions indicatrices suivantes :

$$\begin{array}{l} - \text{l'indicatrice de partie fluide } \mathbf{1}_{\omega_F(x)} : y \in \Omega \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{sur } \omega_F(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ - \text{l'indicatrice de partie solide } \mathbf{1}_{\omega_S(x)} : y \in \Omega \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{sur } \omega_S(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

où  $x$  représente la position du centre du volume  $\omega$ . Alors la vitesse de Darcy s'écrit comme

$$\mathbf{V}_D(x) = \frac{1}{\omega} \int_{y \in \Omega} \mathbf{1}_{\omega_F(x)}(y) \mathbf{v}(y) + \mathbf{1}_{\omega_S(x)}(y) \dot{\mathbf{X}}(y) d\Omega \quad \text{pour } x \in \Omega \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{X}$  est définie sur  $\omega_S$  comme  $\mathbf{X} : y \rightarrow \mathbf{X}_l$  si  $y \in \omega_{S,l}$ . Cette vitesse est une inconnue du système d'équations du modèle à définir.

### 5.1.1 Détermination des équations du modèle

On cherche les équations du modèle homogénéisé sous une forme proche des équations de Navier-Stokes. Les opérateurs présents dans ces équations sont donc appliqués à la vitesse de Darcy.

#### Équation de la conservation de la masse

On cherche à établir une équation homogénéisée de conservation de la masse. L'opérateur divergence est appliqué à la vitesse de Darcy.

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \nabla_x \cdot \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F(x)}(y) \mathbf{v}(y) + \mathbf{1}_{\omega_S(x)}(y) \dot{\mathbf{X}}(y) d\Omega, \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \nabla_x \cdot \left( \mathbf{1}_{\omega_F(x)}(y) \mathbf{v}(y) + \mathbf{1}_{\omega_S(x)}(y) \dot{\mathbf{X}}(y) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La divergence ne s'applique qu'aux fonctions indicatrices. L'intégrale volumique du produit scalaire du gradient de la fonction indicatrice avec un vecteur donne l'intégrale surfacique sur le bord de ce volume du produit scalaire de ce vecteur avec la normale à la surface.

$$\int_{\Omega} \nabla_x \mathbf{1}_{\omega(x)}(y) \cdot \bullet d\omega = \int_{\gamma_{ext}(x)} \bullet \cdot \mathbf{n} d\gamma. \quad (5.4)$$

La divergence de la vitesse de Darcy s'exprime comme la somme des intégrales surfaciques suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{S/E}} \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} d\gamma, \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla_y \cdot \mathbf{v}(y) d\omega. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La divergence de la vitesse fluide est nulle d'après l'équation de conservation de la masse du système (5.1). Les deux intégrales restantes sont une somme d'intégrales de surfaces. Le contour de cette somme d'intégrale est un ensemble de contours fermés. La vitesse des cylindres est constante sur chaque contour fermé. On obtient l'équation de conservation de la masse homogénéisée

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0. \quad (5.6)$$

Par la suite, on omet de mentionner la dépendance d'une grandeur ou d'un opérateur en les variables  $x$  et  $y$ .

On cherche à présent une équation exprimant la conservation de la quantité de mouvement pour le modèle. Les opérateurs des équations de Navier-Stokes sont appliqués à la vitesse de Darcy.

### Terme d'accélération temporelle

L'opérateur de dérivée partielle en temps est appliqué à la vitesse de Darcy.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{1}_{\omega_F} \mathbf{v} + \mathbf{1}_{\omega_S} \dot{\mathbf{X}}) d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{1}_{\omega_F} \mathbf{v} + \mathbf{1}_{\omega_F} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{1}_{\omega_S} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{1}_{\omega_S} \ddot{\mathbf{X}} d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{1}_{\omega_S} \ddot{\mathbf{X}} d\Omega + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} (\dot{\gamma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} d\gamma - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} (\dot{\gamma} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{X}} d\gamma \\
&\quad + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{S/E}} (\dot{\gamma} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{X}} d\gamma,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

où  $\dot{\gamma}$  représente la vitesse de l'interface. Cette vitesse est nulle sur le bord du domaine d'intégration et non nulle sur l'interface fluide-structure où elle suit le déplacement du solide. De plus la vitesse fluide est égale à la vitesse des tubes sur l'interface fluide-structure d'après la condition d'adhérence du système (5.1). Les intégrales de contours s'annulent entre elles. La dérivée par rapport au temps de la vitesse de Darcy vaut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{1}_{\omega_S} \ddot{\mathbf{X}} d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\omega + \left[ \sum_l \eta_l \ddot{\mathbf{X}}_l \right].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Le rapport  $\frac{\omega_{S,l}}{\omega}$  représente le rapport entre le volume du tube  $l$  et le volume d'intégration. Il est noté  $\eta_l$ .

La relation (5.8) montre le lien entre la dérivée temporelle de la vitesse de Darcy et le terme d'accélération temporelle des équations de Navier-Stokes. Un terme dépendant de l'accélération des tubes du faisceau fait son apparition dans la relation. Il est à prendre en compte dans le modèle.

### Terme d'accélération convective

Le terme d'accélération convective est complexe à traiter du fait de sa non-linéarité. On le cherche sous la forme

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}_D \cdot \nabla) \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \mathbf{V}_D \cdot \nabla \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} \mathbf{v} + \mathbf{1}_{\omega_S} \dot{\mathbf{X}} d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \sum_i \mathbf{V}_{Di} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{1}_{\omega_F} \mathbf{v} + \mathbf{1}_{\omega_S} \dot{\mathbf{X}}) d\Omega,
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{V}_{Di} = \mathbf{V}_D \cdot \mathbf{e}_i$ ,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega} \sum_i \mathbf{V}_{Di} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} n_i d\gamma - \frac{1}{\omega} \sum_i \mathbf{V}_{Di} \int_{\gamma_{F/S}} \dot{\mathbf{X}} n_i d\gamma + \frac{1}{\omega} \sum_i \mathbf{V}_{Di} \int_{\gamma_{S/E}} \dot{\mathbf{X}} n_i d\gamma, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}) d\gamma - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \dot{\mathbf{X}} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}) d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{S/E}} \dot{\mathbf{X}} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}) d\gamma.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$\gamma_{F/S} \cup \gamma_{S/E}$  est un ensemble de surfaces fermées. Les termes des deux dernières intégrales de contour sont constants sur ces surfaces fermées. La somme de ces deux intégrales est donc nulle. L'opérateur d'accélération convective appliqué à la vitesse de Darcy se réarrange comme

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}_D \cdot \nabla) \mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} (\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma \\
 &\quad - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} ((\mathbf{V}_D - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \, d\omega.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

La relation entre l'accélération convective en vitesse de Darcy et l'accélération convective du système 5.1 est établie. Un terme supplémentaire apparaît. Il dépend de la vitesse de fluide. On ne peut l'inclure dans le modèle homogénéisé. Ce terme, noté

$$\mathbf{err} = \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} ((\mathbf{v} - \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma \tag{5.11}$$

est évalué dans la sous section 5.3. Son approximation y est discutée.

### Terme de gradient de pression

On cherche un terme représentant le gradient de pression homogénéisé. La variable de pression homogénéisée ne peut se définir comme la vitesse de Darcy. En effet, la pression n'est pas définie dans le domaine solide. Le gradient de pression homogénéisé est donc introduit comme satisfaisant une relation similaire à (4.61), p.71. La différence avec la relation (4.61) est que dans le cas présent le domaine d'intégration n'est pas uniquement pris sur une cellule élémentaire constituée d'un tube central et du fluide environnant. Les variables du modèle sont définies en tout point du domaine. Le domaine d'intégration peut ainsi couper des tubes, figure 5.3. Le bord du domaine possède une partie fluide et une partie solide contrairement au modèle basé sur les équations d'Euler linéarisées. Le gradient de pression équivalente est donc défini comme satisfaisant la relation

$$\nabla P_H = \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/E}} p \mathbf{n} \, d\gamma \tag{5.12}$$

Le contour de l'intégrale de pression n'est pas fermé. Ainsi la relation précédente s'arrange en

$$\nabla P_H = \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/E} \cup \gamma_{F/S}} p \mathbf{n} \, d\gamma - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} p \mathbf{n} \, d\gamma \tag{5.13}$$

Le gradient de pression homogénéisé se résume à une différence de deux intégrales de contour. La première, qui s'exprime aussi comme une intégrale volumique, est l'intégrale du gradient de pression sur le domaine fluide. La seconde représente les efforts locaux de pression sur les interfaces fluide-cylindre. Lorsque les interfaces sont des contours fermés

et compris dans le volume d'intégration, ces efforts correspondent aux forces de pression exercées par le fluide sur les tubes compris dans le domaine d'intégration. Pour les interfaces décrivant des surfaces non fermées, l'intégrale est une somme de forces locales. Le traitement de ce terme est développé dans la sous section 5.2.

### Terme de dissipation visqueuse

L'opérateur du terme de dissipation visqueuse est un laplacien et se traite en deux étapes. En effet, celui-ci peut s'écrire comme  $\nabla \cdot ({}^t\nabla\mathbf{V}_D + \nabla\mathbf{V}_D)$ . On s'intéresse d'abord au terme  $\nabla\mathbf{V}_D$ .

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \nabla (\mathbf{1}_{\omega_F} \mathbf{v} + \mathbf{1}_{\omega_S} \dot{\mathbf{X}}) d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{1}_{\omega_F} \otimes \mathbf{v} + \nabla \mathbf{1}_{\omega_F} \otimes \dot{\mathbf{X}} d\Omega, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} d\gamma - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} \dot{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{n} d\gamma + \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/E}} \dot{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{n} d\gamma, \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} \nabla \mathbf{v} d\Omega.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

De même

$${}^t\nabla\mathbf{V}_D = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} {}^t\nabla \mathbf{v} d\Omega. \tag{5.15}$$

L'opérateur divergence est ensuite appliqué à ce résultat,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla\mathbf{V}_D &= \frac{1}{\omega} \nabla \cdot \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\omega_F} \nabla \mathbf{v} d\Omega \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{1}_{\omega_F} : \nabla \mathbf{v} d\Omega \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S} \cup \gamma_{F/E}} (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{n} d\gamma - \int_{\gamma_{F/S}} (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{n} d\gamma \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\gamma_{F/S}} (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{n} d\gamma
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Au final, on obtient la relation entre le laplacien de la vitesse de Darcy et le laplacien de la vitesse du fluide

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{V}_D &= \nabla \cdot ({}^t\nabla\mathbf{V}_D + \nabla\mathbf{V}_D) \\
&= \frac{1}{\omega} \int_{\omega_F} \nabla \cdot ({}^t\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}) d\omega - \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S}} ({}^t\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}) \mathbf{n} d\gamma
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Multiplié par la viscosité du fluide (considéré comme uniforme dans tout le domaine fluide) un terme correspondant à la contribution des efforts visqueux aux forces exercées par le fluide sur la structure apparaît.



plusieurs tubes, il correspond à la somme des forces exercées sur ces tubes. Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement du modèle ce terme est divisé par le volume du domaine d'intégration. C'est donc une moyenne des forces s'appliquant sur les tubes présents. Il s'agit d'un terme de densité de force que l'on note  $\mathbf{f}_{f \rightarrow s}$ .

Cette densité de force doit être connue en tout point  $x$  du domaine. Elle est définie comme une fonction continue de l'espace.

Pour chaque cylindre  $l$  on note  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s, l}$  la force exercée par le fluide sur ce cylindre. Alors on approxime l'intégrale du tenseur des contraintes sur la frontière  $\gamma_{F/S, l}$  par la valeur de la force exercée par le fluide sur le cylindre  $l$  multipliée par le rapport entre la longueur de l'interface et le contour d'un tube.

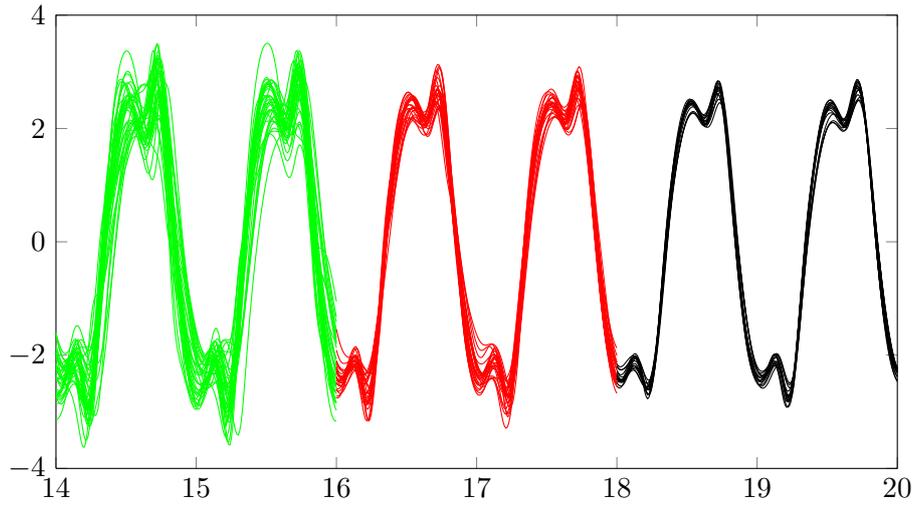
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{f \rightarrow s}(x) &= \frac{1}{\omega} \int_{\gamma_{F/S, l}} \left( p \underline{Id} - \frac{1}{Re} \left( {}^t \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \right) \right) \mathbf{n} \, d\gamma \\ &= \frac{1}{\omega} \sum_l \frac{\gamma_{F/S, l}}{\pi D} \mathbf{F}_{f \rightarrow s, l} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pour les cylindres entièrement compris dans le domaine, il s'agit de la définition de la force appliquée par le fluide sur ces cylindres divisée par le volume d'intégration. Pour ceux partiellement compris dans le domaine, il s'agit d'une moyennisation des efforts locaux sur les bords de ces cylindres. On perd de l'information locale. Cette approximation peut s'intégrer dans la construction d'un modèle homogénéisé. Afin de modéliser cette densité de force, on cherche à l'exprimer en fonction des variables du modèle, le déplacement des cylindres et la vitesse de Darcy. Pour cela, on doit d'abord montrer que cette moyenne peut ne s'exprimer qu'en fonction de ces variables.

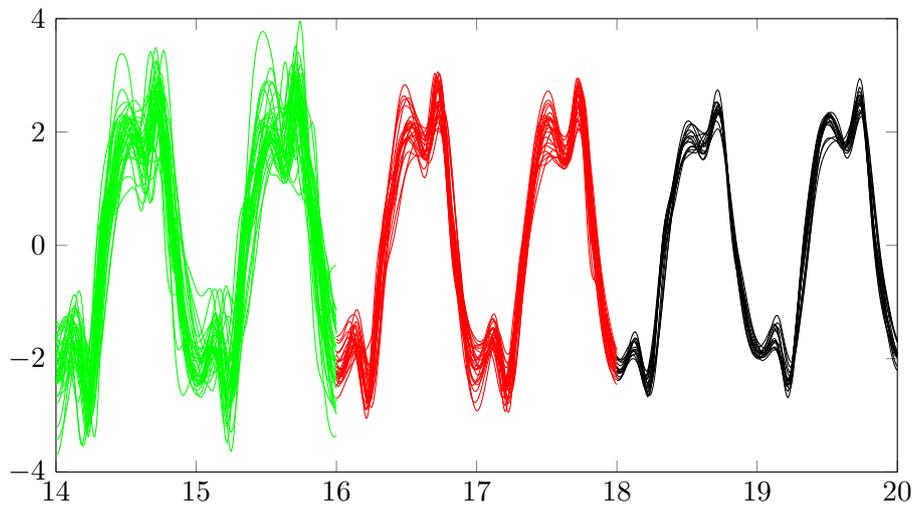
Dans l'analyse des résultats des simulations réalisées au chapitre 3, un comportement moyen des forces de trainée est évoqué. Dans ces simulations la vitesse de Darcy et les déplacements des tubes sont uniformes dans le domaine au cours du temps. La confirmation de l'existence d'un même comportement moyen des forces dans tout le faisceau montre que l'on peut approximer cette moyenne à l'aide de ces deux grandeurs. Dans le cas des régimes symétriques (effets de colonnes de bords mis à part) les forces de trainée sont identiques et les forces de portance nulles. Cette analyse n'a alors pas besoin d'être effectuée. Pour les régimes non symétriques, on réalise la moyenne des forces exercées par le fluide sur les tubes sur les 25 groupes de 4 tubes proches présents dans le faisceau, puis sur les 16 groupes de 9 tubes proches. Les évolutions de ces comportements moyens sont observées pour ces groupes de tubes et comparées aux 36 forces exercées par le fluide sur la structure. Les résultats sont montrés pour la trainée et la portance dans les figures 5.4, 5.5, 5.6 et 5.7 pour les configurations de  $Kc-Re$  des régimes non symétriques représentés en figure 3.14, p.50. On représente dans chaque figure les 36 forces sur deux périodes, puis les 25 forces moyennes sur 4 tubes sur les 2 périodes suivantes, et les 16 forces moyennées sur 9 tubes sur les 2 dernières périodes.

En considérant les groupes de 4 tubes, les forces de trainée moyennes montrent un comportement quasiment identiques dans le faisceau. Cette tendance est confirmée pour les forces de trainées si l'on considère des moyennes sur 9 tubes. Les forces de trainée moyennes peuvent donc être approximées en fonction de la dynamique des tubes du faisceau et de la vitesse de Darcy.

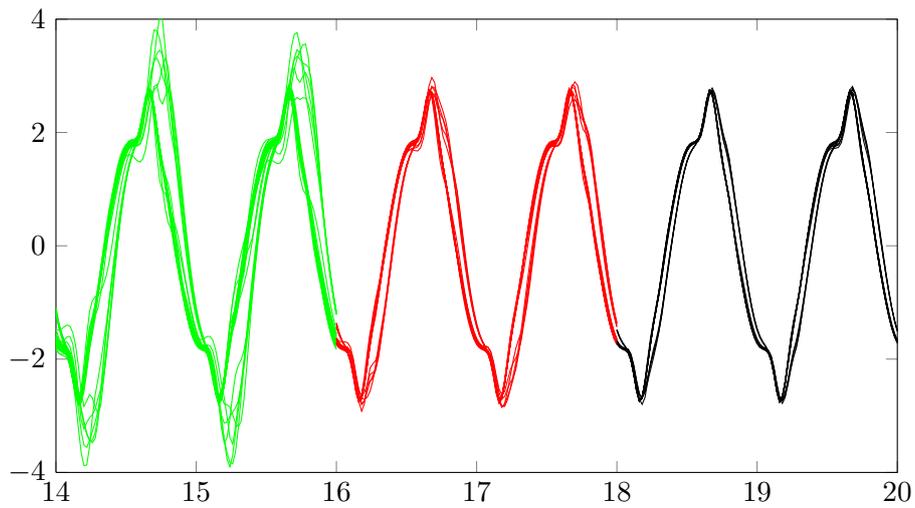
Concernant la portance, les forces varient fortement au sein du faisceau. La prise de moyenne sur 4 tubes réduit fortement les amplitudes de ces forces. Cela montre qu'il n'existe pas de comportement global des forces de portance. Celles-ci varient très fortement d'un tube à l'autre et non selon une dynamique de groupe. Les amplitudes des forces



(a) Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$



(b) Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 500$



(c) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 100$

FIGURE 5.4 – Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches.

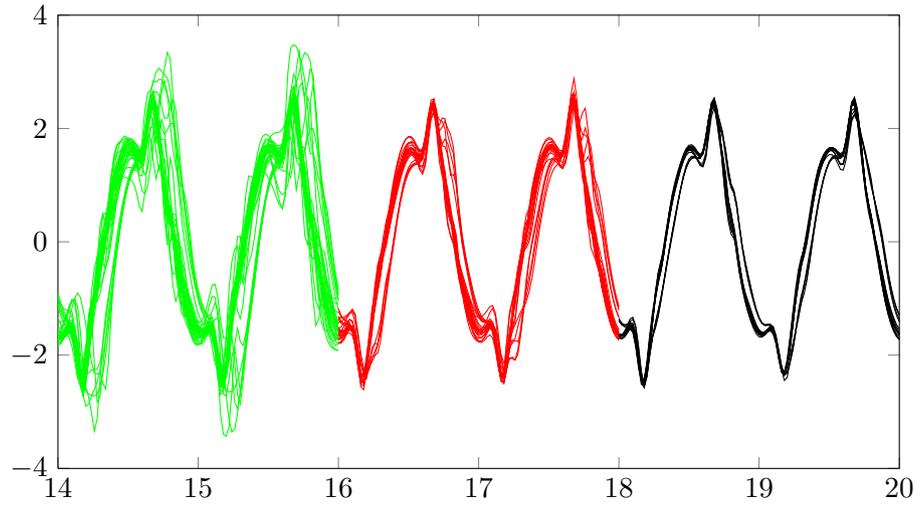
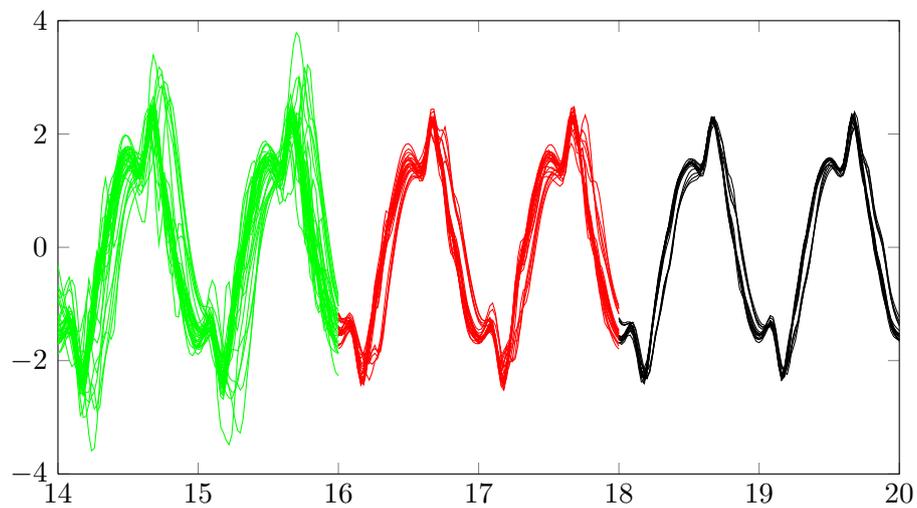
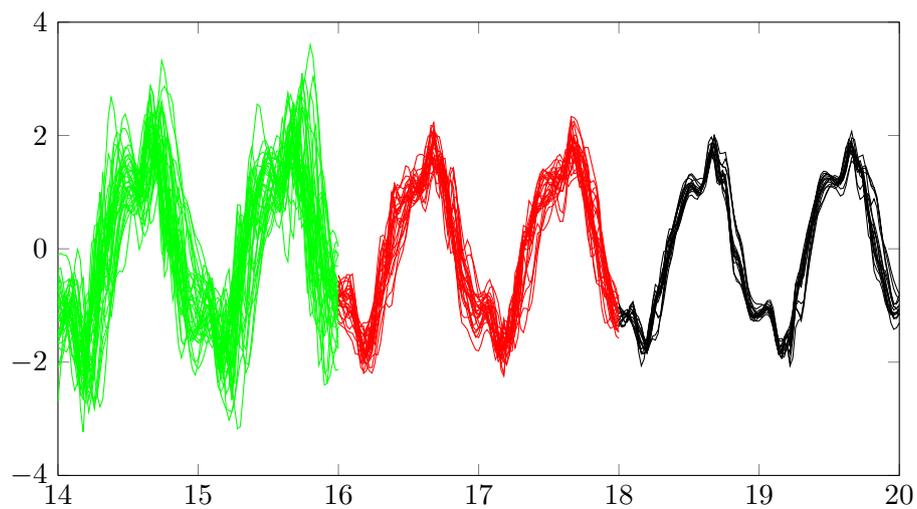
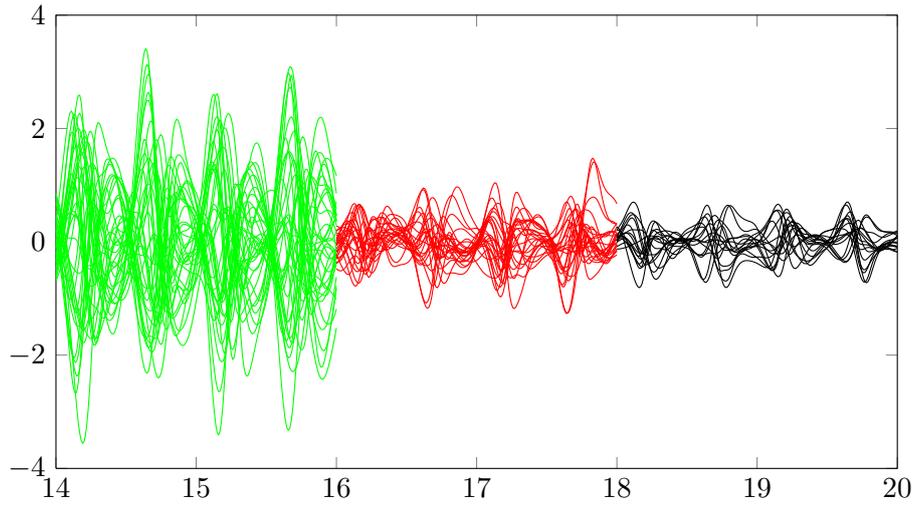
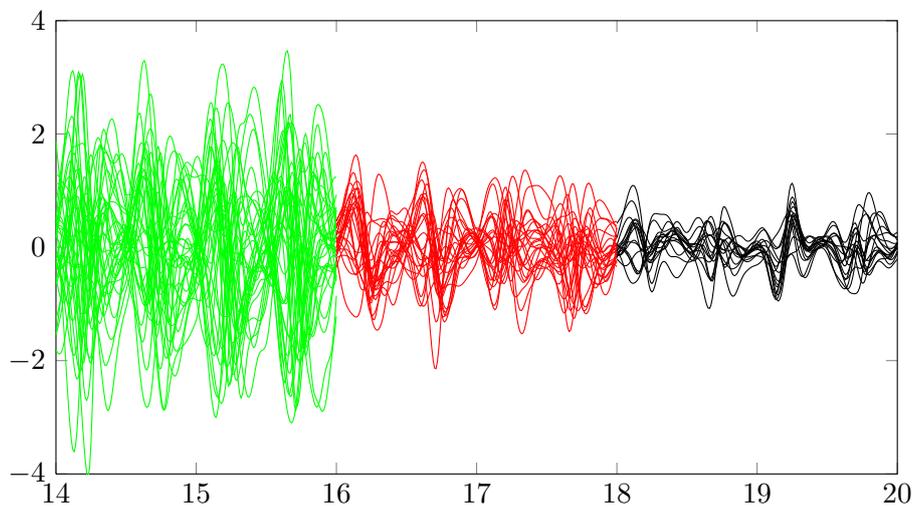
(a) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 200$ (b) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 250$ (c) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 500$ 

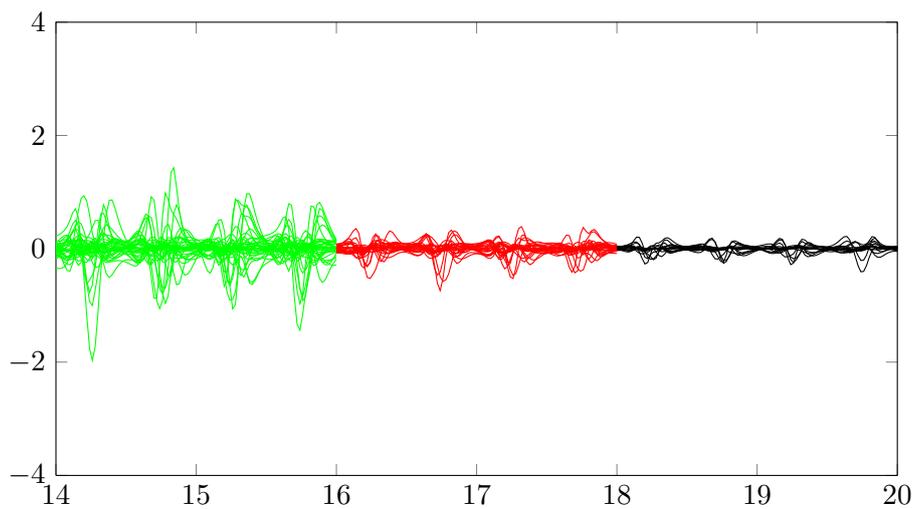
FIGURE 5.5 – Forces de traînée exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches.



(a) Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$



(b) Configuration d'écoulement de  $Kc = 5$  et  $Re = 500$



(c) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 100$

FIGURE 5.6 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches.

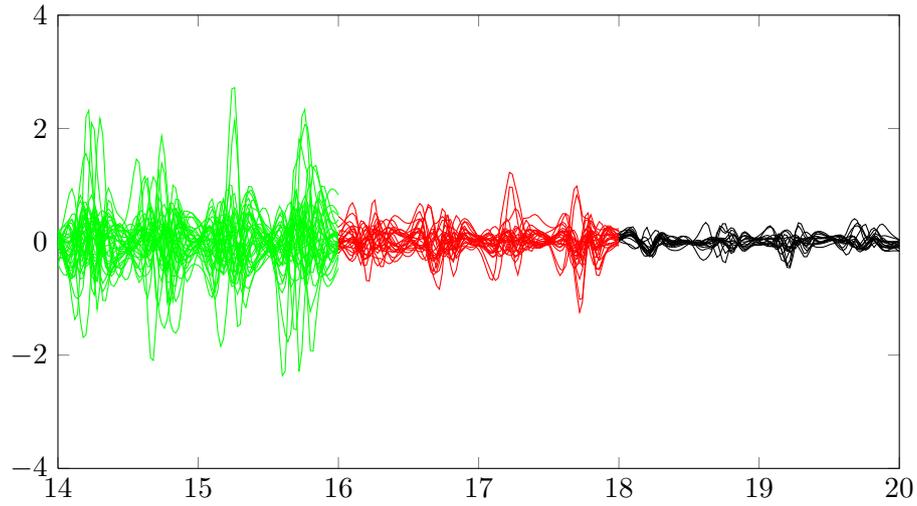
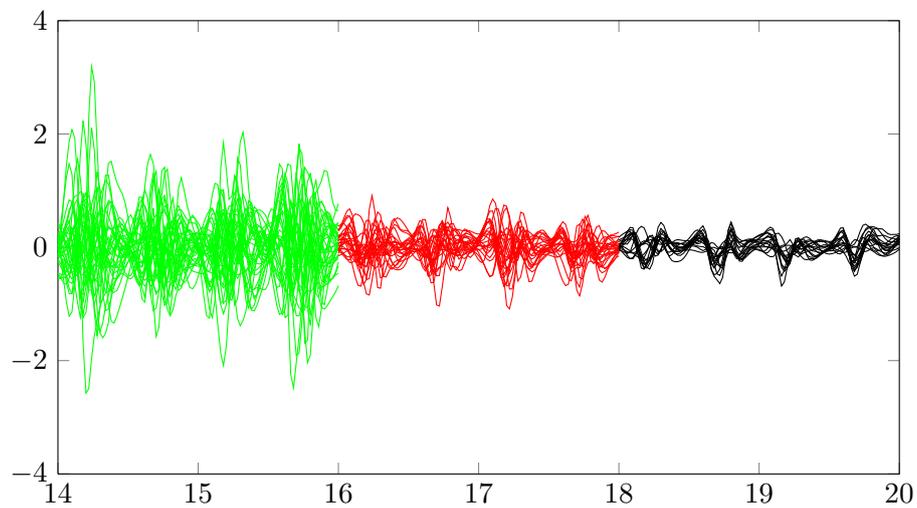
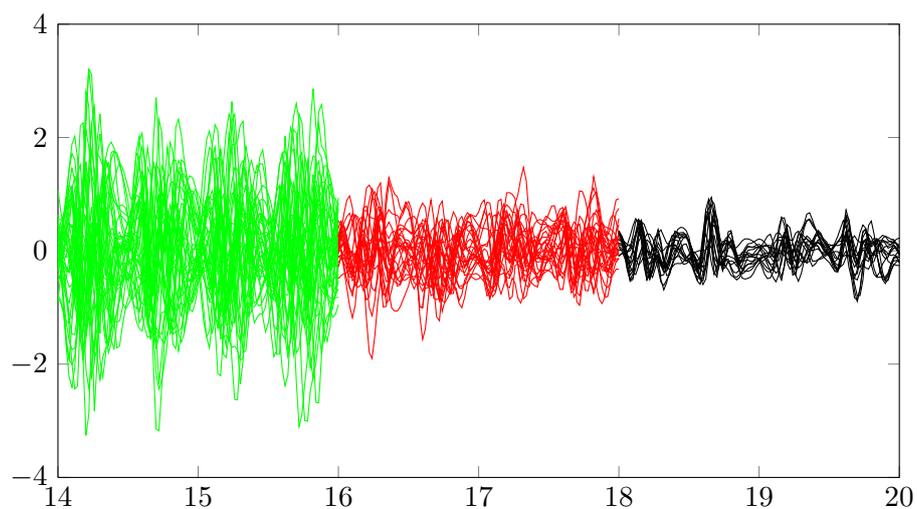
(a) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 200$ (b) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 250$ (c) Configuration d'écoulement de  $Kc = 10$  et  $Re = 500$ 

FIGURE 5.7 – Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches.

moyennes sur 9 tubes sont davantage réduites. Les forces de portance moyennes s'appliquant aux tubes d'un faisceau confiné seront ainsi approximées par des forces de portance moyennes nulles.

On fait donc le choix de remplacer la somme de forces dans l'équation (5.20) par la force moyenne appliquée sur les tubes du volume d'intégration, soit

$$\mathbf{f}_{f \rightarrow s}(x) = \frac{\gamma_{F/S}}{\omega \pi D} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \quad (5.21)$$

Le terme  $\frac{\gamma_{F/S}}{\omega}$  est une donnée géométrique dépendant de la taille et la forme du volume d'intégration. On fait le choix de le remplacer par la valeur qu'il prend dans le cas limite d'un volume d'intégration infini sur un faisceau infini, soit  $\frac{\gamma_{F/S}}{\omega} \rightarrow \frac{\pi D}{E^2}$ . La densité de force moyenne appliqué devient

$$\mathbf{f}_{f \rightarrow s}(x) = \frac{1}{E^2} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \quad (5.22)$$

Il faut à présent faire le choix d'un modèle pour la force de traînée moyenne. Pour cela, les approximations usuelles de ces forces présentes dans la littérature sont rappelées. Elles introduisent celle qui sera utilisée dans le modèle.

### 5.2.2 Expression de la force moyenne de traînée

De nombreux travaux ont été effectués pour le cas d'un cylindre seul oscillant. Des expressions de la force, analytiques ou approchées selon les configurations, ont été introduites. Ces forces dépendent généralement de deux coefficients : un coefficient de masse ajoutée (ou inertiel) et un coefficient dissipatif (ou d'amortissement).

On introduit ces coefficients à travers les travaux effectués sur un cylindre seul oscillant dans un large (ou infini) domaine de fluide. On présente ensuite les spécificités de ces coefficients dans le cas du faisceau oscillant confiné dans une cuve de fluide.

#### Solution du problème de Stokes pour un cylindre seul et $Kc \ll 1$

L'approximation de Stokes est considérée comme la limite, si elle existe, du problème de Navier-Stokes à  $Re \rightarrow 0$  mais non nul. Dans le cas de très faibles oscillations, le terme d'accélération convective peut être négligé. Les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.23)$$

La linéarité de ces équations permet d'obtenir l'expression analytique de la force appliquée par le fluide sur le cylindre [43],

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s}^{stokes} = -C_m \frac{\rho \pi D^2}{4} \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2} \rho D V \dot{\mathbf{X}}, \quad (5.24)$$

avec  $C_m$  et  $C_d$  les coefficients de masse ajoutée et dissipatif,  $D$  le diamètre d'un cylindre et  $V$  l'amplitude de vitesse maximale moyenne des cylindres. Le coefficient de masse ajoutée représente le rapport entre la masse ajoutée par le fluide et la masse de fluide déplacé

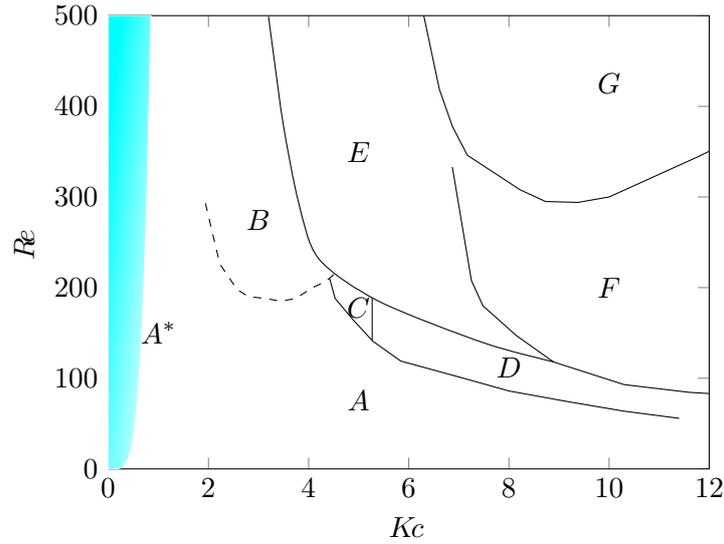


FIGURE 5.8 – Domaine de validité de l’approximation des coefficients (5.25) proposée par Wang [62] dans le plan  $Kc$ - $Re$  considéré.

par le mouvement de la structure, soit  $C_m = \frac{m_a}{m_d}$ . Reprenant les travaux de Wang [62], Sarpkaya explicite ces coefficients sous forme de développements asymptotiques pour des  $Kc \ll 1$ ,  $\beta \gg 1$  et  $Kc \times Re \ll 1$  [55] :

$$\begin{cases} C_m = 1 + 4(\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-3/2} + \dots \\ C_d = \frac{3\pi^3}{2Kc} \left[ (\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-1} - \frac{1}{4}(\pi\beta)^{-3/2} + \dots \right] \end{cases} \quad (5.25)$$

Des travaux ont été effectués pour préciser le domaine de validité des coefficients (5.25). Une analyse asymptotique de la stabilité de la couche limite permet de prédire la valeur de  $Kc$  critique en fonction du  $\beta$  pour laquelle la couche limite se détache du cylindre [33]. Cette valeur critique vaut  $Kc_{cr} = 5.78\beta^{-1/4} (1 + 0.21\beta^{-1/4} + \dots)$ . Cette limite, représentée en figure 5.8 correspond à l’apparition de structures de Honji le long du cylindre (pour les hauts  $Re$ ) [54] et délimite le domaine de validité des coefficients (5.25) de l’expression (5.24).

### Cas des équations d’Euler linéarisées pour un cylindre seul

Les équations d’Euler linéarisées se traitent de façon similaire.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \end{cases} \quad (5.26)$$

Les termes visqueux sont négligés, les forces ne dépendent que de termes inertiels. Une expression de la force exercée par le fluide sur la structure est donnée [27] sous la forme

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s}^{Eul,lin} = -\frac{\rho\pi D^2}{4} \ddot{\mathbf{X}}. \quad (5.27)$$

Dans ce cas la masse ajoutée est égale à la masse d’eau déplacée par le fluide. Il s’agit de la limite lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$  de (5.24), soit les coefficients  $C_m \rightarrow 1$  et  $C_d \rightarrow 0$ .

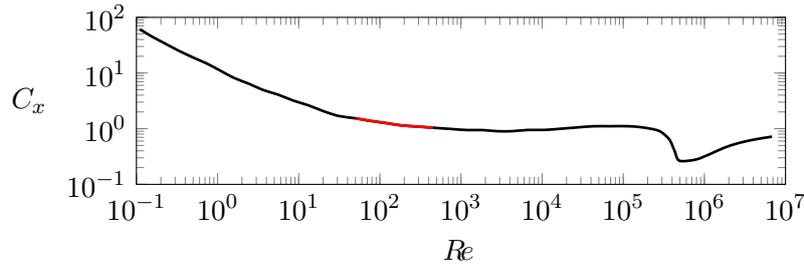


FIGURE 5.9 – Variation du coefficient de trainée  $C_x$  de la force exercée par un écoulement uniforme sur un cylindre en fonction du  $Re$  [35, 17]. La plage de  $Re$  étudié dans nos travaux est tracée en rouge.

### Valeur de la force pour $Kc \rightarrow \infty$

La configuration de  $Kc$  infiniment grand correspond au cas limite d'un cylindre oscillant à une période infinie, soit le cas d'un cylindre se déplaçant à vitesse constante dans un fluide. C'est équivalent à un changement de variable près aux cas d'un cylindre fixe sous écoulement à vitesse constante. De nombreux travaux ont été effectués sur ce cas de configuration permettant d'identifier les différentes structures d'écoulements et les comportements des forces de trainée et de portance en fonction du  $Re$ . Dans le cas limite,  $Re \leq 4$  on trouve des écoulements rampants. Les lignes de courant suivent le contour de l'obstacle et l'écoulement est non décollé. Pour des  $Re$  faibles, dans la plage  $4 \leq Re \leq 48$ , l'écoulement fluide est stable, symétrique et stationnaire. Des zones de recirculations apparaissent. La taille et l'angle de décollement de ces recirculations croissent avec le  $Re$ . Lorsque le  $Re$  augmente et dépasse le premier seuil à  $Re = 48$ , l'écoulement devient instationnaire. Des allées de Von-Karman apparaissent. Le nombre de Strouhal  $Sr = \frac{f_v d}{V}$  représente la fréquence adimensionnée de lâcher des tourbillons. Ces écoulements sont stables et sont observables jusqu'à un second seuil de  $Re$  situé entre  $Re = 190$  et  $Re = 200$ . Passé ce seuil, et jusque  $Re = 260$ , l'écoulement entre dans les régimes instationnaires transitionnels. Des instabilités commencent à apparaître ainsi que de faibles phénomènes tridimensionnels. Pour des  $Re > 260$ , l'écoulement devient faiblement turbulent. Les instabilités tridimensionnelles sont cependant encore assez faibles. La plage de  $Re$  étudié dans ces travaux est à la limite de la modélisation bidimensionnelle de l'écoulement pour les très grands  $Kc$ .

La force de trainée exercée par le fluide sur le tube s'exprime comme

$$F_x = -\frac{1}{2}C_x \rho D V_0^2 \quad (5.28)$$

avec  $C_x$  le coefficient de trainée. La force ne contient qu'une composante fonction de la vitesse puisque l'écoulement fluide est à vitesse constante. Les variations du coefficient de trainée en fonction de  $Re$  sont représentées sur la figure 5.9.

### Cas général

Les approximations précédentes sont utilisées pour des cas de très faibles déplacements (à très faibles ou très grands  $Re$ ) ou des cas de très grands déplacements. Pour des configurations intermédiaires, on utilise des formules de types Morison [45]. Morison propose d'utiliser une expression de la force de trainée utilisant les coefficients de masse ajoutée

$C_m$  et dissipatif  $C_d$ . Un exemple d'approximation de la force peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{f \rightarrow s}^{Morison} &= -C_m \frac{\rho \pi D^2}{4} \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2} \rho D |\dot{\mathbf{X}}| \dot{\mathbf{X}} \\ &= -C_m m_d \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2} \rho D |\dot{\mathbf{X}}| \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les coefficients sont à déterminer empiriquement. Cette formulation est proche de l'expression de la force utilisée dans le cas des équations de Stokes. En effet, l'amplitude maximale moyenne de la vitesse peut remplacer le terme en  $|\dot{\mathbf{X}}|$  dans la formule, ce qui aura pour conséquence de modifier les valeurs du coefficient  $C_d$ . Les formules de type "Morison" correspondent bien à une généralisation des expressions dans les cas décrits précédemment. Lorsque les déplacements sont très faibles la vitesse devient négligeable devant l'accélération et pour des valeurs de  $Re$  très importantes la formule se simplifie en la formule utilisée dans le cadre des équations d'Euler linéarisées. De même lorsque la période d'oscillation est infinie, la vitesse est constante et l'accélération est nulle ce qui correspond à la force de traînée exercée par un écoulement à vitesse constante sur un cylindre immobile.

La décomposition de type Morison trouve son intérêt dans les applications industrielles. Lorsque le déplacement du cylindre  $\mathbf{X}$  est modélisé par une équation d'oscillateur amorti alors le système structure se simplifie en (5.30) en remplaçant la force exercée par le fluide sur la structure par son approximation (5.29).

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{X}} + c \dot{\mathbf{X}} + k \mathbf{X} &= \mathbf{F}_{f \rightarrow s}^{Morison}, \\ m \left(1 + C_m \frac{\rho}{\rho_s}\right) \ddot{\mathbf{X}} + \left(c + C_d \rho D |\dot{\mathbf{X}}|\right) \dot{\mathbf{X}} + k \mathbf{X} &= 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

où  $m$  est la masse du cylindre,  $c$  le coefficient d'amortissement du système dans le vide et  $k$  sa raideur. L'équation (5.30) traduit le fait que la présence de fluide "augmente" la masse du système, ce qui provoque plus précisément une baisse de la fréquence propre du système. Le fluide augmente également l'amortissement du système. De nombreux travaux ont permis de déterminer ces coefficients pour des plages de  $Kc-Re$ , ou  $\beta - Re$  variées (les plages étudiées de ces nombreux travaux sont résumées dans [24]). Les valeurs des coefficients issus des expérimentations de Sarpkaya [53], dont les travaux sont les plus fournis, sont représentées (pour les valeurs de  $Kc$  qui nous intéresse) dans les figures 5.10, p.100 et 5.11, p.103.

### Prise en compte de l'écoulement de fluide

Différentes approximations de la force exercée par le fluide sur un cylindre ont été présentées, dont une formule généralisant les différentes configurations rencontrées. Dans tous les cas, le fluide est mis en mouvement par le cylindre. Ces configurations sont à un changement de variable près similaires au cas d'un tube fixe sous écoulement (avec une vitesse d'écoulement variante ou non).

Le cas d'un cylindre oscillant horizontalement dans un large domaine de fluide et soumis en même temps à un écoulement fluide, dont la vitesse oscille elle aussi, est traité par Anagnostopoulos et Iliadis [7]. Ils proposent une formule de Morison pour représenter la force dans ce cas comme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} &= \frac{1}{2} \rho D C_d (\mathbf{V}_0 - \dot{\mathbf{X}}) |\mathbf{V}_0 - \dot{\mathbf{X}}| + \rho \pi \frac{D^2}{4} \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} + C_m \rho \pi \frac{D^2}{4} \left( \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} - \ddot{\mathbf{X}} \right), \\ &= \frac{1}{2} \rho D C_d (\mathbf{V}_0 - \dot{\mathbf{X}}) |\mathbf{V}_0 - \dot{\mathbf{X}}| + (C_m + 1) \rho \pi \frac{D^2}{4} \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} - C_m \rho \pi \frac{D^2}{4} \ddot{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

où  $V_0$  est la vitesse de l'écoulement fluide.

Cette dernière formulation est très intéressante. En effet, dans le cadre d'un faisceau de tube oscillant dans un domaine de fluide, chaque tube met en mouvement le fluide environnant. Cela implique que le fluide influence les tubes de deux façons :

- Le fluide immobile exerce une force sur le cylindre en mouvement. Cette force correspond à l'effort que doit fournir le tube pour mettre en mouvement le fluide. Il exerce une résistance au déplacement du tube.
- Le fluide est mis en mouvement par un tube. Une partie de ce fluide va recirculer autour de ce cylindre. Le reste va se déplacer en direction d'un cylindre voisin et s'écouler autour exerçant ainsi un effort .

Cette spécificité du faisceau influence la partie inertielle de la force. L'expression de la force explicitée au chapitre 4 est utilisée pour représenter cet effet. Elle est équivalente à la partie inertielle de la formule (5.31) mais à l'échelle plus locale car elle dépend de la vitesse de Darcy et non d'une vitesse d'écoulement externe au faisceau. La partie dissipative concerne les phénomènes liés à la vitesse. Afin de prendre en compte les écoulements de fluide dus au faisceau, on utilise le terme dissipatif de la formule (5.31) mais fonction de la vitesse relative définie comme la différence entre la vitesse du cylindre et la vitesse de Darcy. L'expression de la force s'exerçant par le fluide sur un cylindre du faisceau utilisé dans nos travaux est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} &= -m_a \ddot{\mathbf{X}} + (m_a + m_d) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D - C_d \frac{1}{2} \rho DV (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_D), \\ &= -C_m m_d \ddot{\mathbf{X}} + (C_m + 1) m_d \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D - C_d \frac{1}{2} \rho DV (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_D). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Cette force ne dépend que des variables du modèle (5.18). On l'intègre donc dans le modèle. La densité de force a vocation à être une grandeur continue. Or elle dépend de la vitesse de Darcy et de sa dérivée qui sont des grandeurs continues dans le domaine et de la vitesse et l'accélération des cylindres qui sont des grandeurs discrètes. Afin de contourner cette difficulté, le passage des déplacements discrets  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$  à un champ continu  $\mathbf{U}(x)$  pour  $x \in \Omega$  est réalisé. Ainsi la formule de la force se transforme en

$$\mathbf{f}_{f \rightarrow s} = -C_m \rho \frac{\pi D^2}{4E^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} + (C_m + 1) \rho \frac{\pi D^2}{4E^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D - C_d \frac{1}{2E^2} \rho DV \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} - \mathbf{V}_D \right), \quad (5.33)$$

et peut ainsi être intégrée aux équations continue du modèle. Elle dépend de deux coefficients, le coefficient  $C_m$  de masse ajoutée et le coefficient dissipatif  $C_d$ . De même que les allures des forces moyennes dépendent de la configuration de l'écoulement, ces coefficients en sont également dépendant. Il convient de les estimer afin de connaître leurs ordres de grandeur.

### Ordres de grandeur des coefficients

L'approximation de la force exercée par le fluide sur les tubes du faisceau est donnée en 5.33. Elle dépend de deux paramètres,  $C_m$  le coefficient de masse ajoutée et  $C_d$  le coefficient dissipatif. Afin d'utiliser cette formule dans un modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes, ces coefficients sont estimés. On ne cherche pas dans nos travaux à construire d'abaques complètes des valeurs de ces coefficients.

Les simulations de faisceaux oscillants confinés dans un domaine de fluide présentées au chapitre 3 vont être utilisées pour estimer la valeur de ces coefficients. Pour cela, il est nécessaire de connaître la valeur de l'accélération et la vitesse de Darcy liée à un cylindre.

Dans les simulations le faisceau est confiné sur ses bords latéraux. Les mouvements de fluide hors faisceau sont donc proscrits. De plus le domaine de fluide total est fermé. La vitesse de Darcy est donc nulle à l'échelle du faisceau.

Dans le cas du faisceau confiné en cuve fermée, l'expression de la force appliquée par le fluide sur le faisceau peut se simplifier en

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -C_m N m_d \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2} N \rho D V \dot{\mathbf{X}} \quad (5.34)$$

avec  $N$  le nombre de tube du faisceau et  $m_d$  la masse de fluide déplacée par un tube et  $\mathbf{X}$  le déplacement (uniforme) du faisceau. L'approximation de la densité de force moyenne  $\mathbf{f}_{f \rightarrow s}$  appliquée par le fluide sur le faisceau s'obtient en divisant (5.34) par le volume total occupé par le système composée du faisceau et de son fluide environnant. Ce volume dépend de l'espacement  $E$  et vaut donc, d'après la géométrie du faisceau,  $NE^2$ . La densité de force vaut

$$\mathbf{f}_{f \rightarrow s} = -C_m \frac{m_d}{E^2} \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2E^2} \rho dV \dot{\mathbf{X}} \quad (5.35)$$

Cette densité de force s'adimensionne par  $\frac{\rho V^2}{D}$ , soit

$$\mathbf{f}_{f \rightarrow s} = -C_m \frac{\eta}{Kc} \ddot{\mathbf{X}} - C_d \frac{1}{2e^2} \dot{\mathbf{X}}, \quad (5.36)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{\omega_S}{\omega} = \frac{\pi D^2}{4E^2}.$$

Le faisceau se déplace selon des oscillations de période  $T$  ( $T = 1$  suite à l'adimensionnement du système). La périodicité de la vitesse, et de l'accélération, est utilisée afin de déterminer la valeur des coefficients de masse ajoutée et dissipatif. L'approximation (5.36) est multipliée par la vitesse du faisceau puis intégrée temporellement sur  $n$  périodes.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+nT} \mathbf{f}_{f \rightarrow s} \dot{\mathbf{X}} dt &= -C_m \frac{\eta}{Kc} \int_t^{t+nT} \ddot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} dt - C_d \frac{1}{2E^2} \int_t^{t+nT} \dot{\mathbf{X}}^2 dt \\ &= -C_m \frac{\eta}{Kc} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 \right]_t^{t+nT} - C_d \frac{1}{2E^2} \int_t^{t+nT} \dot{\mathbf{X}}^2 dt \\ &= -C_d \frac{1}{2E^2} \int_t^{t+nT} \dot{\mathbf{X}}^2 dt \end{aligned} \quad (5.37)$$

On obtient le coefficient dissipatif. De la même manière, la multiplication de (5.36) par l'accélération des cylindres permet d'obtenir le coefficient  $C_m$ .

$$\begin{aligned} \int_t^{t+nT} \mathbf{f}_{f \rightarrow s} \ddot{\mathbf{X}} dt &= -C_m \frac{\eta}{Kc} \int_t^{t+nT} \ddot{\mathbf{X}}^2 dt - C_d \frac{1}{2E^2} \int_t^{t+nT} \dot{\mathbf{X}} \ddot{\mathbf{X}} dt \\ &= -C_m \frac{\eta}{Kc} \int_t^{t+nT} \ddot{\mathbf{X}}^2 dt - C_d \frac{1}{2E^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 \right]_t^{t+nT} \\ &= -C_m \frac{\eta}{Kc} \int_t^{t+nT} \ddot{\mathbf{X}}^2 dt \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ces coefficients sont ainsi calculés à partir des simulations réalisées sur un faisceau oscillant et confiné dans une cuve de fluide. Les valeurs des coefficients  $C_m$  et  $C_d$  sont résumées dans les tableaux 5.1 et 5.2 et leurs évolutions sont représentées sur les figures 5.10 et 5.11.

$Kc \backslash Re$	40	200	250	500	$\rightarrow \infty$
$\rightarrow 0$	—				1.7
$10^{-2}$	1.99	—	1.99	1.99	—
$10^{-1}$	2.1	—	2	1.99	
1	2.49	—	2.12	2.06	
5	3.37	—	2.38	2.06	
10	3.67	3.58	3.41	2.57	

TABLE 5.1 – Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée  $C_m$  pour différentes configuration de  $Kc-Re$  .

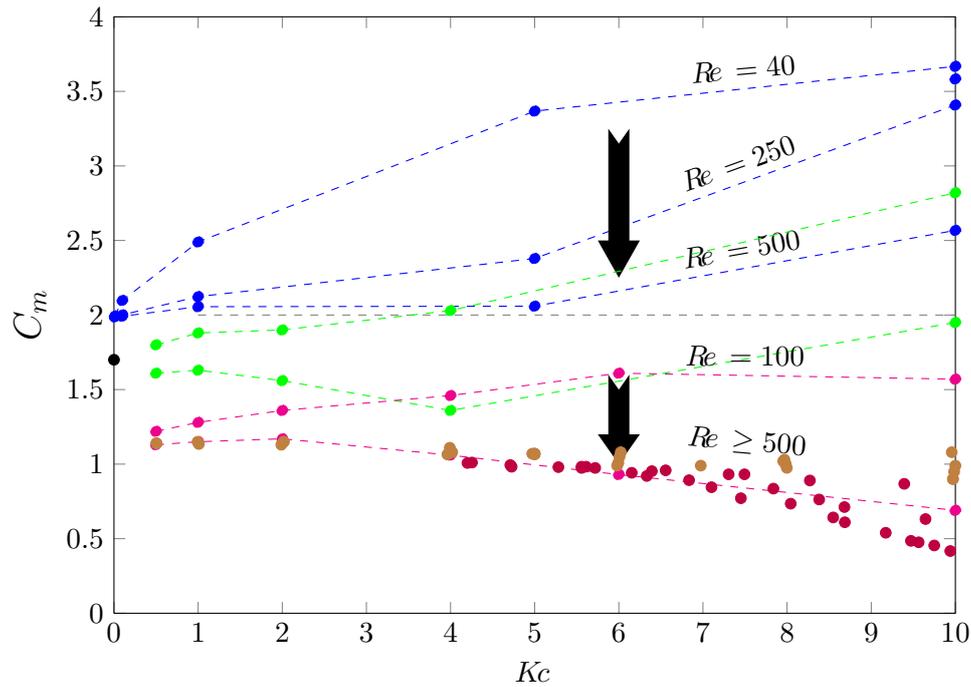


FIGURE 5.10 – Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée  $C_m$  pour différentes configuration de  $Kc-Re$  . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau  $5 \times 5$  et -●- pour un cylindre isolé), à la valeur issue de l'analyse dans le cadres des équations d'Euler linéarisées (●), ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●).

La figure 5.10 représente l'évolution du coefficient de masse ajoutée par rapport au  $Kc$  pour différentes valeurs de  $Re$  (-•-). Pour des faibles  $Kc$  la valeur du  $C_m$  calculée est de l'ordre de grandeur de 2. Plus précisément, pour un  $Re = 40$  et un  $Kc$  décroissant de  $10^{-1}$  à  $10^{-2}$  sa valeur décroît. La pente des courbes d'évolution du  $C_m$  croît fortement avec la décroissance du  $Kc$ . Lorsque le  $Kc$  tend vers 0, la limite est à comparer avec la valeur issue de l'analyse sur une cellule élémentaire dans le cadre des équations d'Euler linéarisées ( $Kc \rightarrow 0$  et  $Re \rightarrow \infty$ ) qui vaut 1.7 (•). Le comportement des valeurs de  $C_m$  est cohérent avec cette limite. Pour des  $Kc \leq 10^{-1}$  le  $Re$  a très peu d'incidence sur la valeur du coefficient. Pour les  $Kc$  plus importants, l'augmentation du  $Re$  fait décroître ces valeurs vers une limite valant 1.99. En fait, les valeurs de  $Re$  ne dépassent pas 500 dans cette analyse. On ne peut donc conclure sur la valeur de la limite lorsque l'on tend vers de très haut  $Re$ . La limite du cas visqueux pour un très haut Reynolds doit se situer entre 1.7 et 1.99.

Les valeurs issues des simulations du chapitre 3 sont comparées aux valeurs des coefficients présents dans la littérature. Des simulations sur l'oscillation d'un faisceau rigide de 5 par 5 tubes en arrangement carré sont réalisées par Duclercq [24]. Il est important de noter que ces simulations ne considèrent pas un faisceau strictement confiné. Des espaces supplémentaires de largeur  $0.4D$  existent entre la rangée supérieure (respectivement inférieure) du faisceau et le bord supérieur (resp. inférieur) du domaine. De plus la condition limite sur ces bords est une condition d'adhérence (la vitesse du bord du domaine étant prise nulle), là où elle est de flux nul selon la normale au domaine dans nos travaux. Ces différences vont avoir une influence, notamment sur la valeur du coefficient de masse ajoutée. Tout d'abord la vitesse de Darcy n'est plus nulle à l'échelle du faisceau. Le fluide peut contourner celui-ci par les minces espaces latéraux, créant ainsi des mouvements de fluide dans le domaine. En notant  $\Omega_{sup}$  et  $\Omega_{inf}$  les domaines de fluide supérieur et inférieur au faisceau, on a l'estimation de la vitesse de Darcy à l'échelle du faisceau,

$$\mathbf{V}_D = - \int_{\Omega_{sup}} v \, d\Omega - \int_{\Omega_{inf}} v \, d\Omega. \quad (5.39)$$

Or le coefficient  $C_m$  dans [24] est calculé sans prendre en compte  $\mathbf{V}_D$ . Il s'agit en réalité d'un  $C'_m$  défini comme le coefficient de masse ajoutée d'un cylindre équivalent au faisceau dans un petit domaine de fluide.

Supposons un cas de très faible déplacement et une accélération du faisceau  $\ddot{\mathbf{X}} \geq 0$ . Les intégrales volumiques des accélérations du fluide dans les espaces supérieur et inférieur au faisceau sont négatives puisque le domaine total est fermé. L'accélération de Darcy à l'échelle du faisceau est donc positive. Ainsi on obtient la relation suivante concernant la force s'exerçant sur le faisceau

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -C'_m \ddot{\mathbf{X}} = -C_m \ddot{\mathbf{X}} + (C_m + 1) \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial t} \quad (5.40)$$

L'accélération de Darcy étant positive, on a donc  $C'_m \leq C_m$ . Les coefficients de masse ajoutée  $C'_m$  calculés dans [24] ont donc des valeurs inférieures aux valeurs que l'on obtiendrait à partir de la formule de Morison utilisé dans nos travaux.

Les travaux traitant de faisceaux de tubes oscillants étant peu nombreux dans la littérature, surtout dans le cas d'un faisceau confiné, la comparaison est tout de même faite avec nos valeurs. Les valeurs de coefficients de [24] sont représentés (-•-) sur la figure 5.10 pour des valeurs de  $Re = 100$  et 500. Les ordres de grandeurs ne sont pas à comparer ici du fait des explications ci-dessus. La dépendance en  $Re$  des valeurs de ces coefficients

peut elle être comparée. Celle-ci se traduit par une baisse de la valeur, et ce quelque soit le  $Kc$ . La baisse est plus importante pour les  $Kc$  élevés que pour les faibles  $Kc$ , ce qui est identique aux comportements des valeurs de  $C_m$  de nos simulations.

Dans la littérature, concernant l'étude de faisceau oscillant on peut citer les travaux de Dikarou [22] dont un aperçu est donné dans [6]. Les oscillations de 4 tubes en carré dans un fluide au repos sont étudiés pour des espacements  $e$  de 2 à 5, des  $Kc$  allant de 0.2 à 10 et  $\beta = 50$  (soit  $10 \leq Re \leq 500$ ). Cependant ce faisceau est immergé dans un large domaine de fluide. Les données de coefficients présentés ( $\bullet$ ) correspondre à l'étude d'un cylindre équivalent au faisceau oscillant dans un large domaine de fluide.

Les valeurs de  $C_m$  pour le cas d'un cylindre isolé dans un large domaine de fluide sont également représentées sur la figure 5.10. Les données sont extraites de Duclercq [24] pour des  $Re = 100$  et  $500$  ( $-\bullet-$ ) et Sarpkaya [53] ( $\bullet$ ) pour de très haut  $Re$  ( $2000 \leq Re \leq 60000$ ). Ces valeurs sont d'un ordre de grandeur inférieure à celui des valeurs obtenues dans le cas du faisceau confiné. Cela est dû au confinement de celui-ci. Le non confinement du faisceau comme dans [6] donne des valeurs de  $C_m$  comparables au cas d'un tube isolé. Dans tous les travaux cités précédemment, on observe une baisse des coefficients avec l'augmentation du  $Re$ . Les coefficients tendent également vers une limite représentée par les valeurs à plus haut  $Re$  issues des travaux de Sarpkaya. Pour les faibles  $Re$ , comme  $Re = 100$ , on note une croissance du  $C_m$  avec le  $Kc$ . On retrouve le comportement observé dans le cas du faisceau pour  $Re = 40$ .

$Kc \backslash Re$	$\rightarrow 0$	40	200	250	500
$\rightarrow 0$	41.49	—			
$10^{-2}$	—	43.56	—	11.8	8.66
$10^{-1}$		23.04	—	6.42	3.73
1		9.85	—	3.52	2.34
5		6.86	—	3.64	3.03
10		5.75	2.37	2.19	1.99

TABLE 5.2 – Valeurs calculées du coefficient d'amortissement  $C_d$  pour différentes configuration de  $Kc-Re$ .

Contrairement au  $C_m$ , le coefficient dissipatif est moins dépendant vis-à-vis du confinement du faisceau. On peut ainsi comparer les valeurs de la littérature obtenue dans le cas d'un cylindre isolé oscillant ou dans le cas d'un faisceau oscillant. La figure 5.11 représente l'évolution du coefficient d'amortissement par rapport au  $Kc$  pour différentes valeurs de  $Re$ . On observe sur la figure une asymptote verticale lorsque le  $Kc \rightarrow 0$ . Cette asymptote est cohérente avec la formule de développement asymptotiques du  $C_d$  (5.25) issue des travaux de Wang [62] sur les équations de Stokes en très faibles déplacements ( $\bullet$ ). Le domaine de validité de cette formule permet de comparer ce résultat théorique à la valeur calculée dans la configuration de  $Kc = 0.01$  et  $Re = 40$ . Les valeurs obtenues sont cohérentes. Elles sont très élevées, cependant elles sont liées dans les formules de type Morison à la vitesse du cylindre (et la vitesse de Darcy dans le cadre du faisceau). Or dans les configurations de très faibles déplacements ce sont les accélérations et les termes de forces inertiels qui sont prédominants (car liés à l'inverse du  $Kc$ ). Ces valeurs ont donc une moindre importance. Pour les grands  $Kc$ , les valeurs de  $C_d$  décroissent.

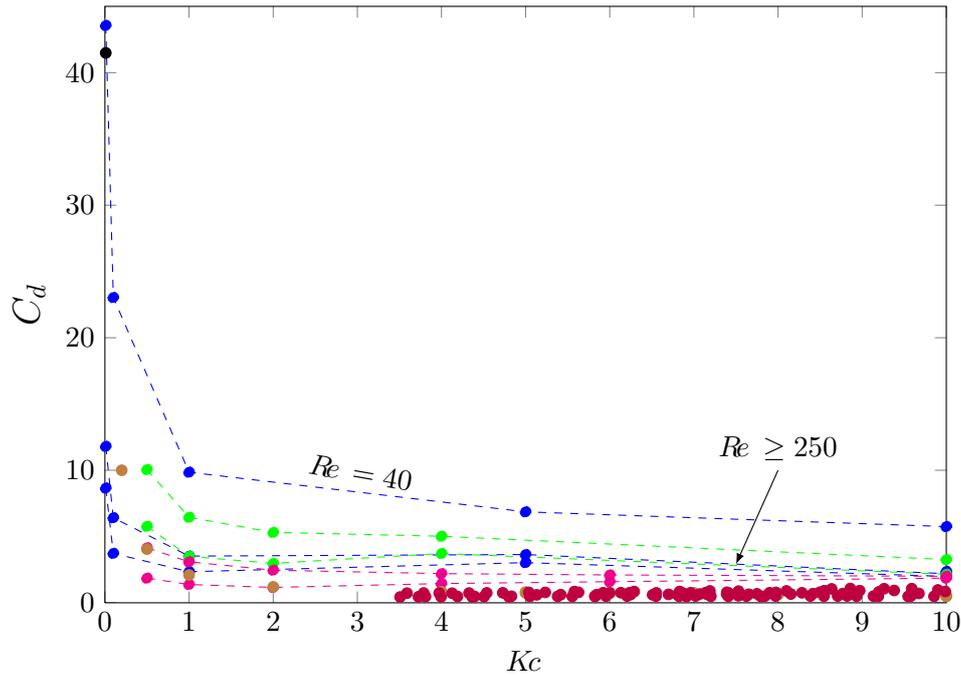


FIGURE 5.11 – Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée  $C_d$  pour différentes configuration de  $Kc$ - $Re$ . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau  $5 \times 5$  et -●- pour un cylindre isolé), à la valeur issue des développements asymptotiques de Wang [62] (●) ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●).

La figure 5.12 est un zoom de la figure 5.11 centré sur les valeurs de  $C_d$  pour les grands  $Kc$ . Le  $Re$  influence fortement ces valeurs. Lorsqu'il augmente, le coefficient diminue très rapidement. En effet, les efforts dissipatifs sont en grande partie liés à la viscosité du fluide. On obtient une valeur minimale de  $C_d = 2$  dans nos travaux. Cependant cette valeur n'est obtenue que pour  $Re = 500$ . Pour des valeurs de  $Re$  bien plus importantes ( $2000 \leq Re \leq 60000$ ), les données extraites des travaux de Sarpkaya donnent des valeurs de coefficients plus faibles, situées entre 0.5 et 1. Ceci est cohérent avec la limite lorsque  $Kc \rightarrow \infty$  qui donne une force de l'ordre de  $\frac{1}{2}C_x\rho V^2 D$  où l'évolution du  $C_x$  en fonction du  $Re$  est donnée dans la figure 5.9.

Les coefficients de masse ajoutée et dissipatif viennent d'être estimés. Une approximation de la densité de force exercée par le fluide sur la structure est donnée. Elle est basée sur les approximations usuelles de la littérature, notamment sur les formules de types Morison. Afin d'être intégrée dans les équations du modèle continues, on définit un champ continu pour la dynamique du faisceau. L'équation d'oscillateur régissant la dynamique de la structure devient également continue. Le modèle homogénéisé basé sur les équations

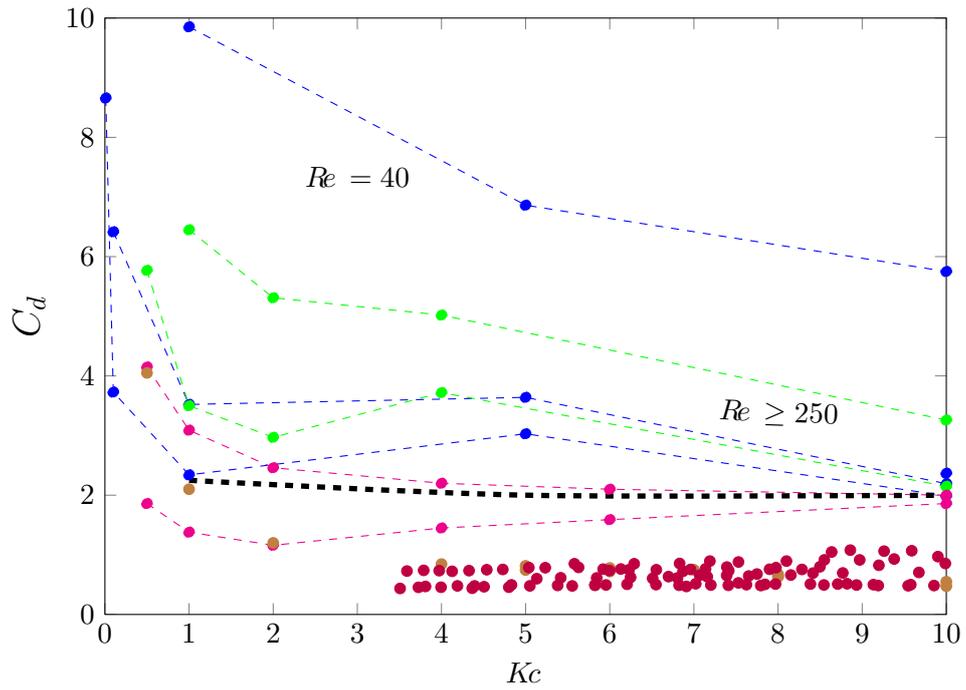


FIGURE 5.12 – Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée  $C_d$  pour différentes configuration de  $Ke-Re$  à grands  $Ke$ . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau  $5 \times 5$  et -●- pour un cylindre isolé) ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●).



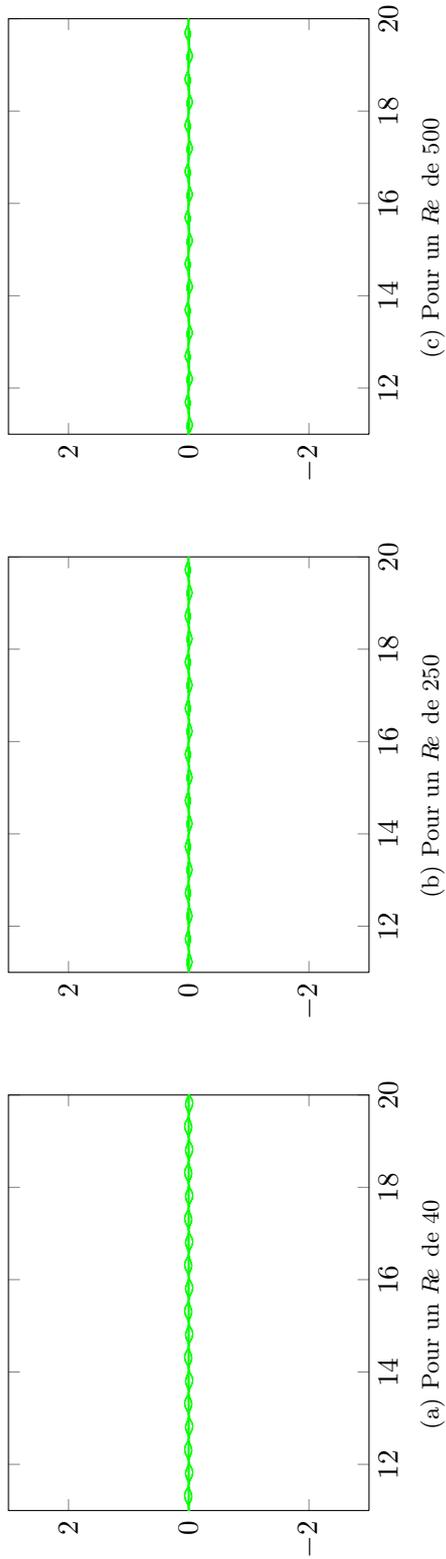


FIGURE 5.13 – Évaluation de la composante dans l'axe du terme **err** pour un  $Kc$  de 1 à différents nombre de Reynolds.

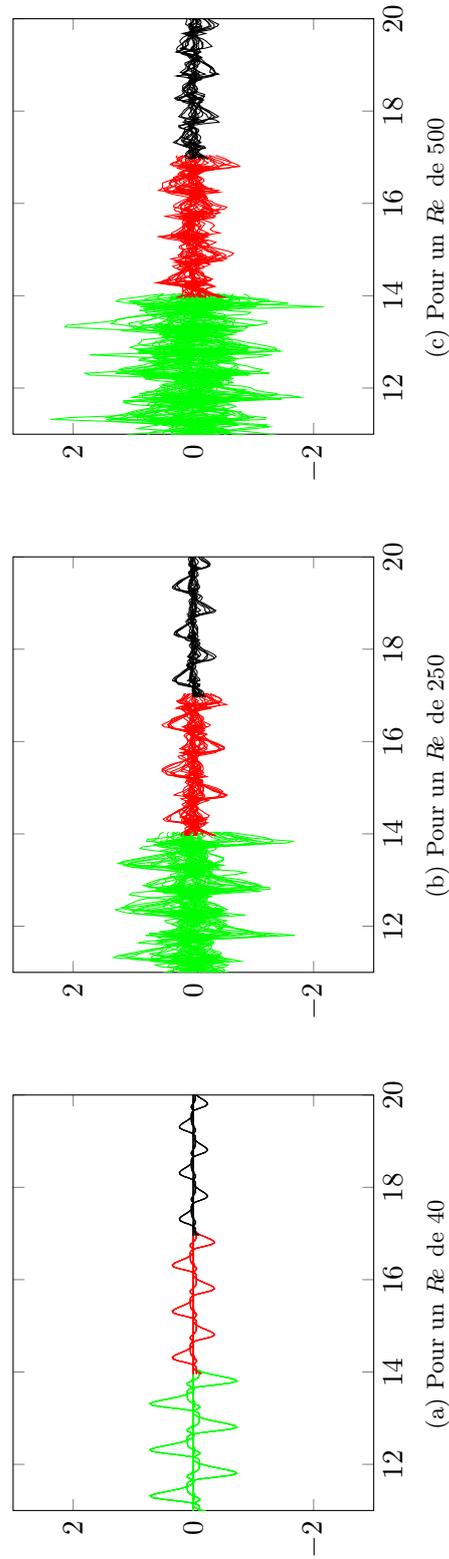
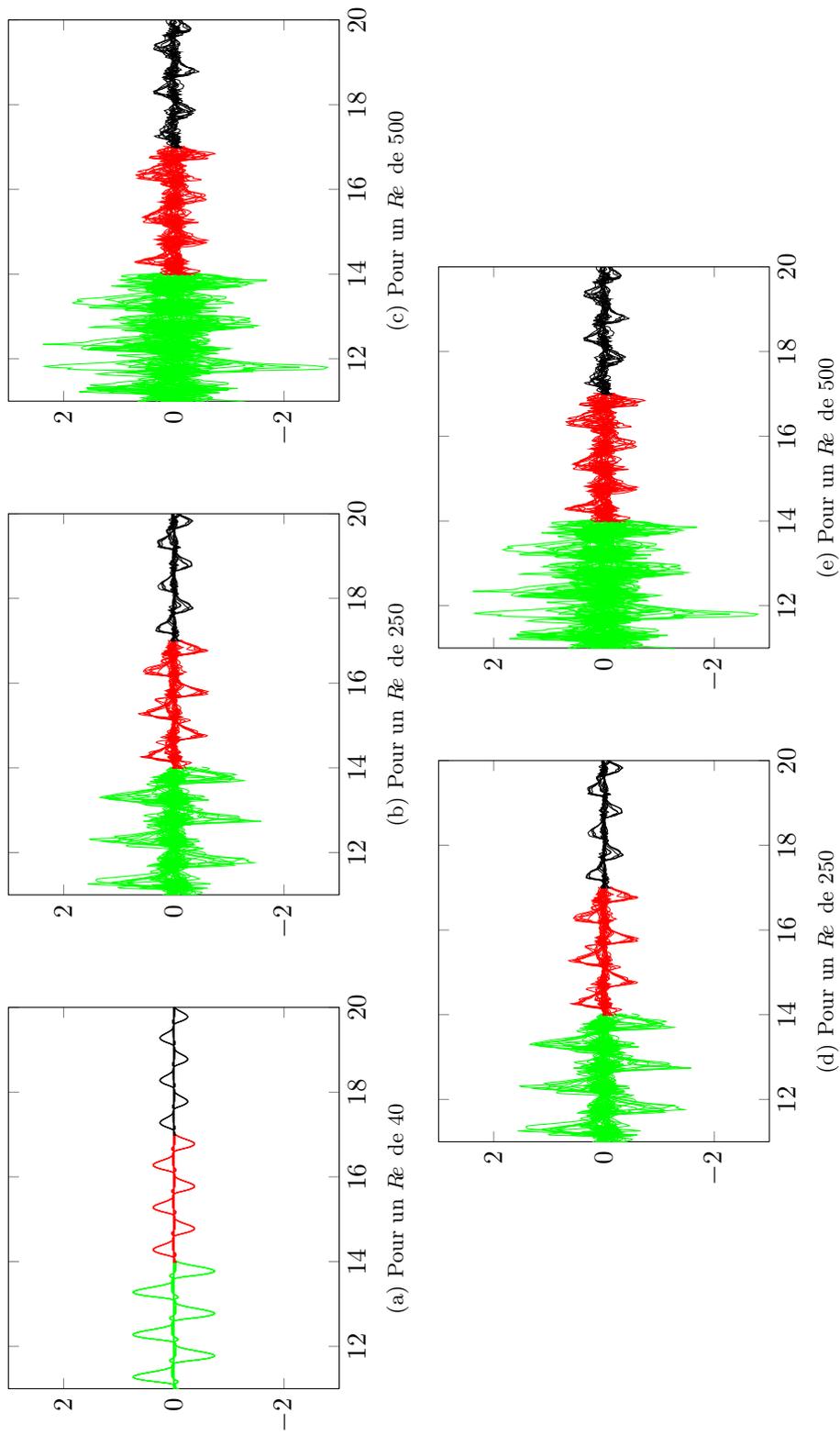


FIGURE 5.14 – Évaluation de la composante dans l'axe du terme **err** pour un  $Kc$  de 5 à différents nombre de Reynolds.

FIGURE 5.15 – Évaluation de la composante dans l'axe du terme **err** pour un  $Kc$  de 10 à différents nombre de Reynolds.

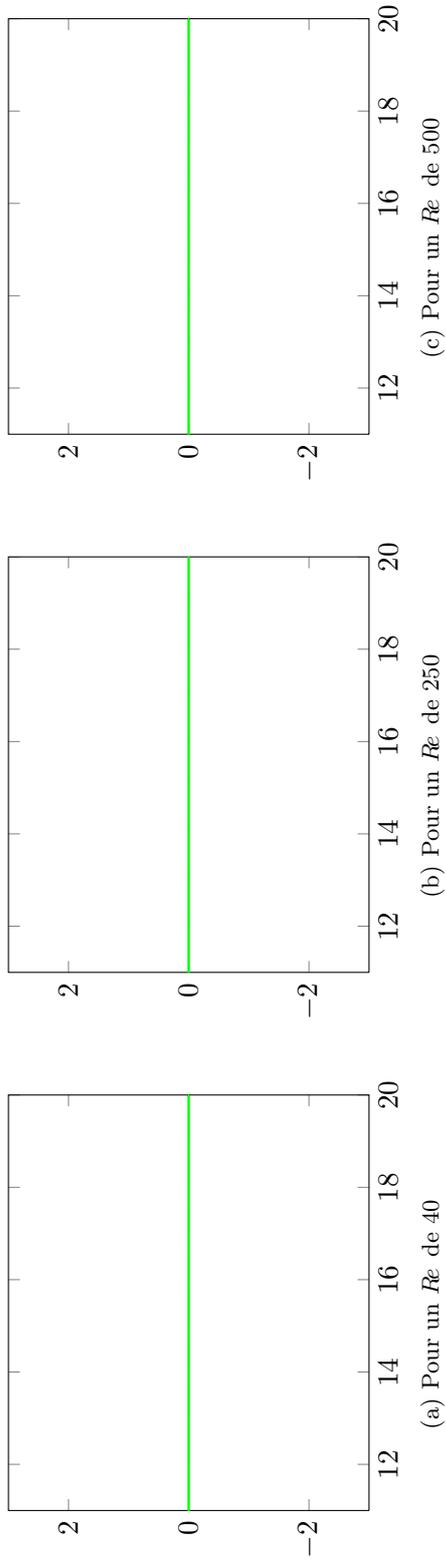


FIGURE 5.16 – Évaluation de la composante transverse du terme **err** pour un  $Kc$  de 1 à différents nombre de Reynolds.

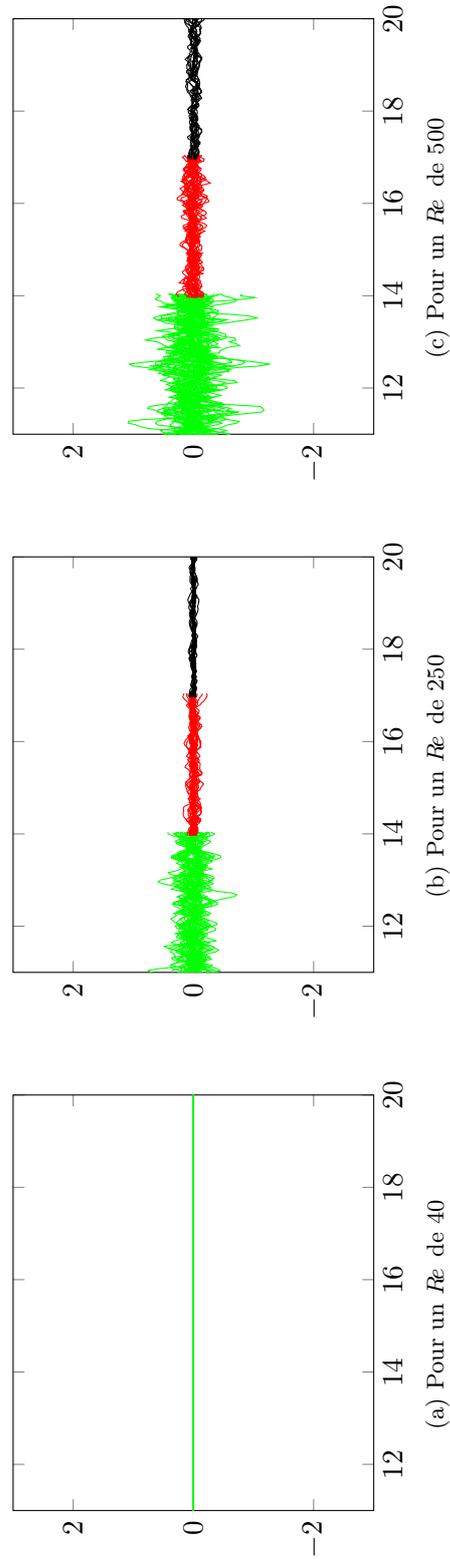
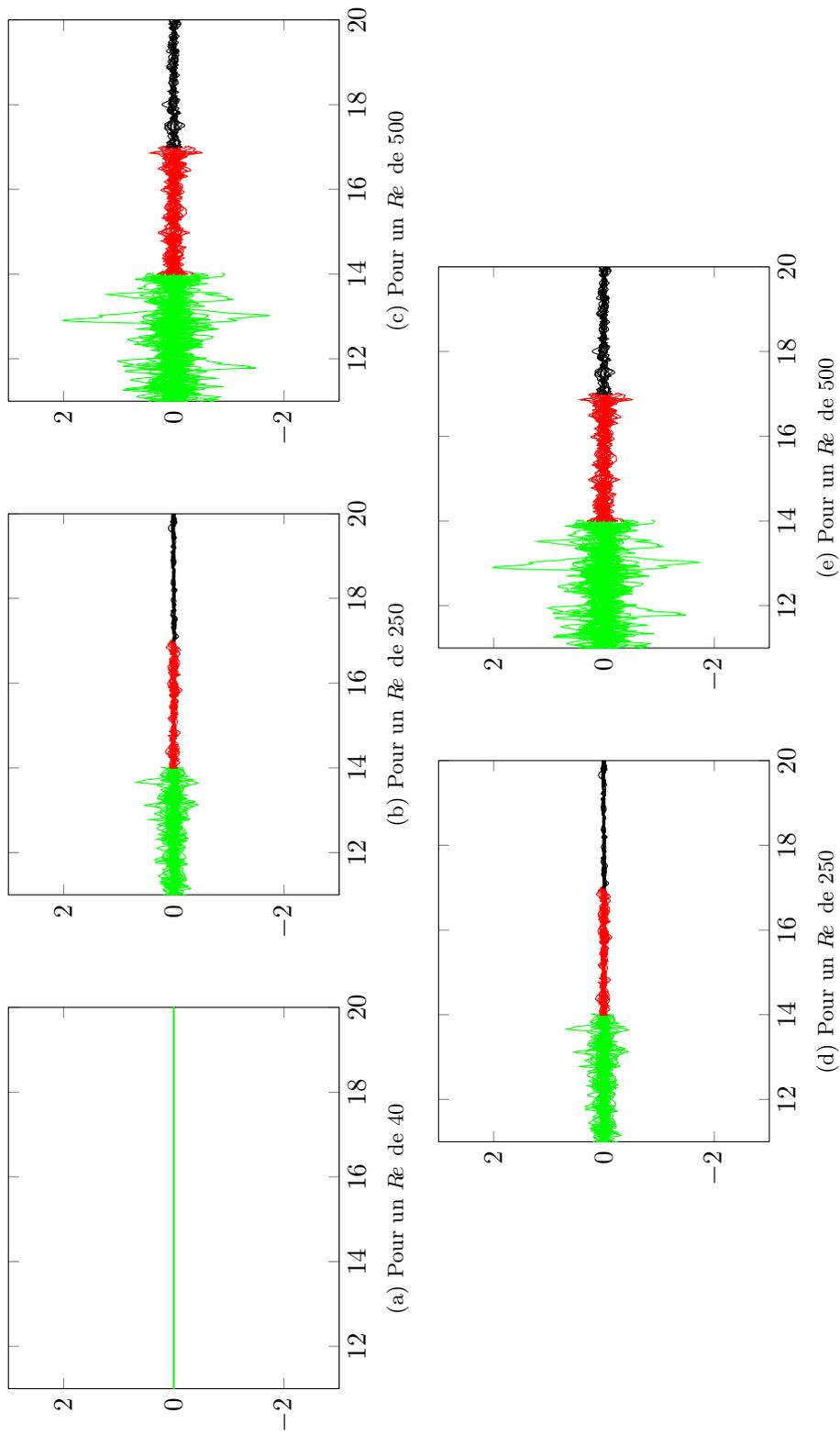


FIGURE 5.17 – Évaluation de la composante transverse du terme **err** pour un  $Kc$  de 5 à différents nombre de Reynolds.

FIGURE 5.18 – Évaluation de la composante transverse du terme **err** pour un  $Kc$  de 10 à différents nombre de Reynolds.

maximales. Celles-ci s’observent pour les volumes d’intégrations incluant des cylindres situés sur les bords gauche et droit du faisceau. Les valeurs du terme **err** au cœur du faisceau sont de l’ordre de 1. L’effet de ce terme est non négligeable comparé aux valeurs que prennent les forces s’exerçant par le fluide sur les cylindres. Ces forces sont de l’ordre de grandeur de 4 pour les configurations considérées. Lorsque le volume d’intégration augmente, et contient 4 cylindres proches, une baisse significative de l’amplitude des valeurs prises par le terme **err** est observée. Les amplitudes sont réduites de moitié et ce dans tout le faisceau. Cette tendance s’accroît avec l’intégration sur un domaine intégrant 9 tubes. L’ordre de grandeur des amplitudes du terme d’erreur devient négligeable devant celui de la force de traînée exercée par le fluide sur les tubes du faisceau. On fait donc le choix de modéliser la composante dans l’axe des oscillations de ce terme en la négligeant devant les autres grandeurs du modèle.

Les ordres de grandeurs de la composante transverse du terme **err** sont inférieurs à ceux de la composante dans l’axe des oscillations. L’évolution des amplitudes de ce terme en fonction de la taille du domaine d’intégration est semblable à la première composante. On fait également le choix d’une modélisation de ce terme en le négligeant devant les autres termes des équations du modèle.

Dans cette section, le modèle homogénéisé a été introduit. Les inconnues du système obtenu sont la vitesse de Darcy, la pression homogénéisée et le champ de déplacement continu introduits lors de la construction du modèle. Celui-ci est à présent opérationnel. Des comparaisons de simulations issues du modèle avec des calculs de CFD éléments finis utilisant la méthode de résolution du chapitre 2 sont présentées dans la section suivante.

## 5.4 Validation du modèle

Le modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes a été introduit dans la section précédente. Dans cette section, des cas de validations sont présentés. Dans un premier temps on détaille la résolution numérique du modèle. Le cas de validation du lâcher d’un faisceau rigide non confiné est ensuite présenté. Enfin la validation dans le cas d’un faisceau rigide soumis à une sollicitation externe est réalisée.

### 5.4.1 Résolution numérique du modèle

Dans cette partie, la résolution pratique du modèle est détaillée. Les simulations issues du modèle seront comparées à des résultats issus de la résolution numérique du problème d’interaction fluide-structure complet. De plus les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement des 2 systèmes sont des équations aux dérivées partielles de formes similaires. Pour cette raison, les mêmes outils de résolution numérique, détaillés dans le chapitre 2, seront utilisés pour le calcul et pour le modèle. Le schéma de couplage fluide-structure employé est un schéma de couplage explicite synchrone. La discrétisation temporelle des termes des équations du modèle ainsi que sa résolution sont discutées.

Au sein du modèle apparaissent des termes exprimés en fonction de la vitesse de Darcy, de la pression homogénéisée et du champ de déplacement de la structure. On considère un premier sous-système composé des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement. Ce sous-système a pour inconnues la vitesse de Darcy et la pression homogénéisée, et considère les termes fonction du champ de déplacement de la structure comme des termes sources. Or la densité de force définie dans le modèle est une grandeur définie à partir de ces deux variables. De même, dans l’équation d’oscillateur régissant la

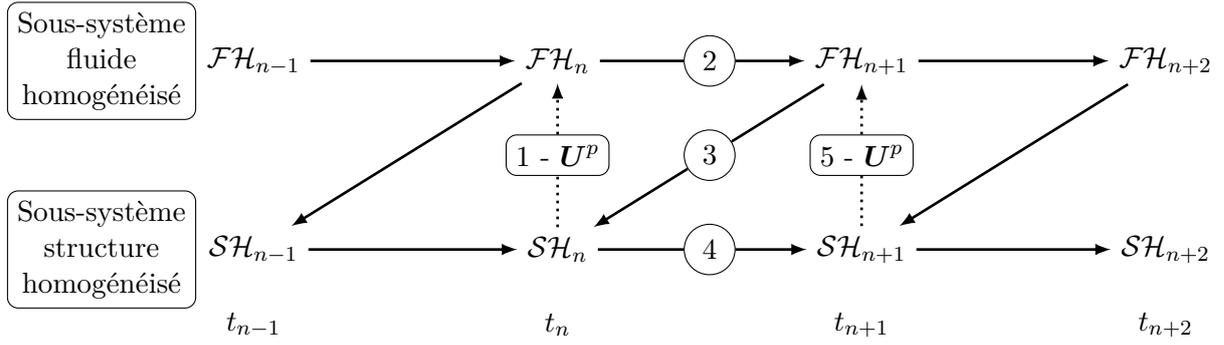


FIGURE 5.19 – Schéma de couplage entre les sous-systèmes fluide et structure du modèle homogénéisé.

dynamique de la structure l'inconnue est le champ de déplacement de la structure et la densité de force apporte des termes sources fonction de la vitesse de Darcy. On réécrit le système (5.42), p.105 en ce sens comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0, \\ \frac{1}{Kc} [1 + \eta(C_m + 1)] \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D + (\mathbf{V}_D \cdot \nabla) \mathbf{V}_D + \nabla P_H - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}_D - C_d \frac{1}{2e^2} \mathbf{V}_D = \\ \qquad \qquad \qquad (1 - C_m) \frac{\eta}{Kc} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} - C_d \frac{1}{2e^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}, \\ (1 + C_m \mathcal{M}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} + C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + 4\pi^2 \mathbf{U} = (C_m + 1) \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D + C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \mathbf{V}_D. \end{array} \right. \quad (5.43)$$

On a détaillé dans le chapitre 2 l'approche employée afin de résoudre le système couplé fluide-structure initial, constitué d'un faisceau, avec sa dynamique propre, immergé dans du fluide. La résolution du système se fait à l'aide d'une approche partitionnée. Le modèle (5.43) est également composé d'un sous-système fluide et d'un sous-système structure dépendant l'un de l'autre. On le résout à l'aide de la même approche partitionnée en suivant un schéma de couplage explicite synchrone.

Le schéma appliqué au modèle est résumé dans la figure 5.19 et se déroule comme suit :

1. Une prédiction est effectuée pour estimer la dynamique de la structure au pas de temps suivant. La prédiction s'effectue sur la vitesse et l'accélération du champ de déplacement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^p = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}^n, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}^p = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}^n. \end{array} \right. \quad (5.44)$$

2. Le sous-système fluide est résolu en prenant en compte les valeurs de la prédiction pour la dynamique de la structure. Le sous-système est discrétisé temporellement par un schéma d'Euler rétrograde d'ordre 2. Les champs de vitesse de Darcy et de

pression homogénéisée sont obtenus en résolvant

$$\text{dans } \Omega \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V}_D^{n+1} = 0, \\ \frac{1}{Kc} [1 + \eta (C_m + 1)] \frac{\partial \mathbf{V}_D^{n+1}}{\partial t} + (\mathbf{V}_D^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{V}_D^{n+1} + \nabla P_H^{n+1} \\ - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}_D^{n+1} - C_d \frac{1}{2e^2} \mathbf{V}_D^{n+1} = \\ - C_m \frac{\eta}{Kc} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}^p - C_d \frac{1}{2e^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^p + \frac{\eta}{Kc} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}. \end{array} \right. \quad (5.45)$$

La résolution de ce système matriciel utilise la méthode de projection décrite dans le chapitre 2.

3. Le sous-système structure est à son tour résolu. En tout point du domaine homogénéisé le champ de déplacement de la structure vérifie

$$\text{dans } \Omega \left\{ \begin{array}{l} (1 + C_m \mathcal{M}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}^{n+1} + C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^{n+1} + 4\omega^2 \mathbf{U}^{n+1} = \\ (C_m + 1) \mathcal{M} \frac{\partial \mathbf{V}_D^{n+1}}{\partial t} + C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \mathbf{V}_D^{n+1}. \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Cette équation d'oscillateur est résolue à l'aide d'un schéma de Newmark.

4. Le système est résolu au temps  $n + 1$ , on passe donc au pas de temps suivant.

### 5.4.2 Cas de lâcher d'un faisceau rigide

#### Description du cas test CFD

On considère un faisceau non déformable baigné dans du fluide contenu dans une cuve. Le faisceau est confiné sur un seul de ses bords latéraux, afin de permettre des mouvements globaux de fluide, comme représenté dans la figure 5.20. La dynamique du faisceau est régie par une équation d'oscillateur. Son déplacement est considéré uni-axial (selon l'axe horizontal). Celui-ci est écarté de sa position d'équilibre à l'instant initial. Les conditions limites du système fluide sont identiques aux conditions utilisées au chapitre 2. Le système est résolu selon l'approche partitionnée décrite dans ce même chapitre.

Le fluide est perturbé à l'instant initial afin de déclencher les éventuelles structures tourbillonnaires plus rapidement.

#### Description du système homogénéisé équivalent

On considère une cuve de même taille. Celle-ci est décomposée en deux zones 5.21. La première zone fluide-structure,  $\Omega_{\text{homogénéisé}}$  sur la figure, correspond à l'espace occupé par le faisceau et son fluide environnant décrit par les équations du système homogénéisé (5.43). La seconde,  $\Omega_{\text{fluide sans tubes}}$ , est une zone de fluide libre dans le reste de la cuve, décrite par les équations d'un système homogénéisé ne comprenant pas de tube (où la fraction massique est nulle et l'espacement infini).

La condition initiale de glissement sans frottement appliquée dans le calcul CFD est une condition de flux normal entrant et sortant nul sur toute la frontière. Lorsqu'on homogénéise on ne peut plus imposer une condition aussi stricte. On ne peut qu'imposer un flux normal globalement nul sur les bords du volume d'intégration.

$$\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.47)$$

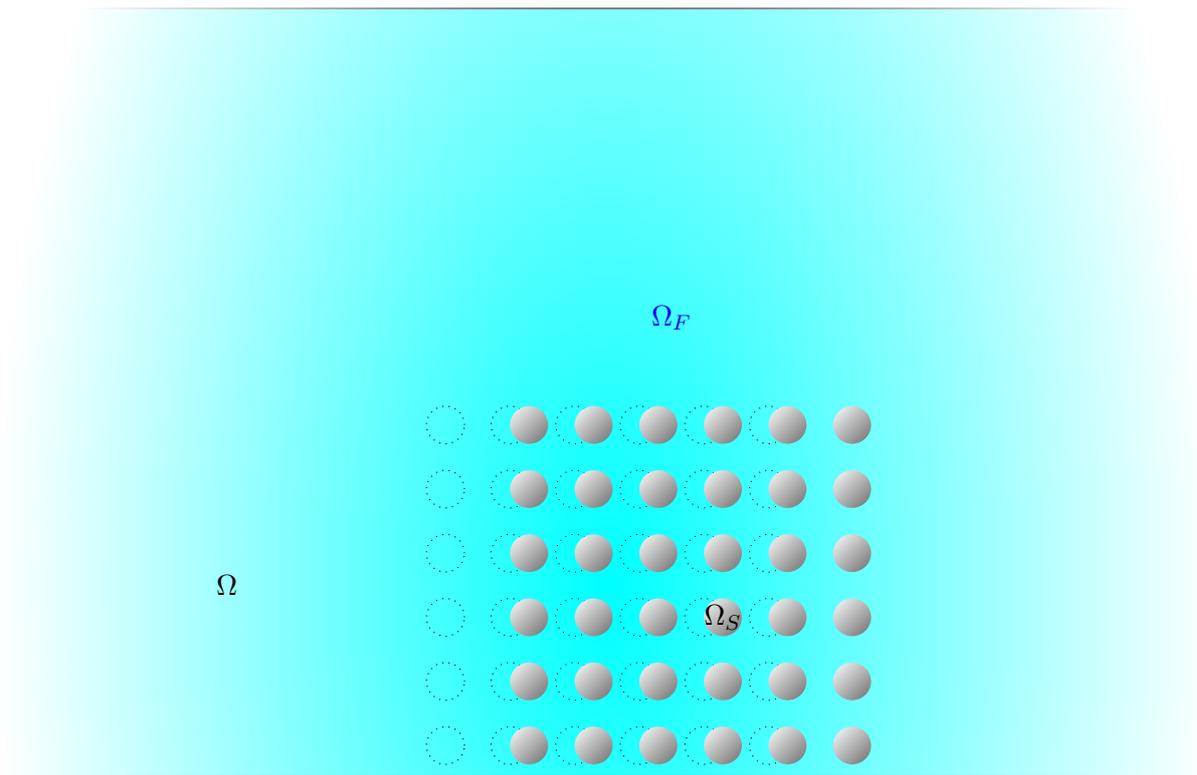


FIGURE 5.20 – Géométrie du cas test de lâcher de faisceau rigide. Le faisceau est initialement écarté de sa position d'équilibre (représentée par les cercles en pointillés).

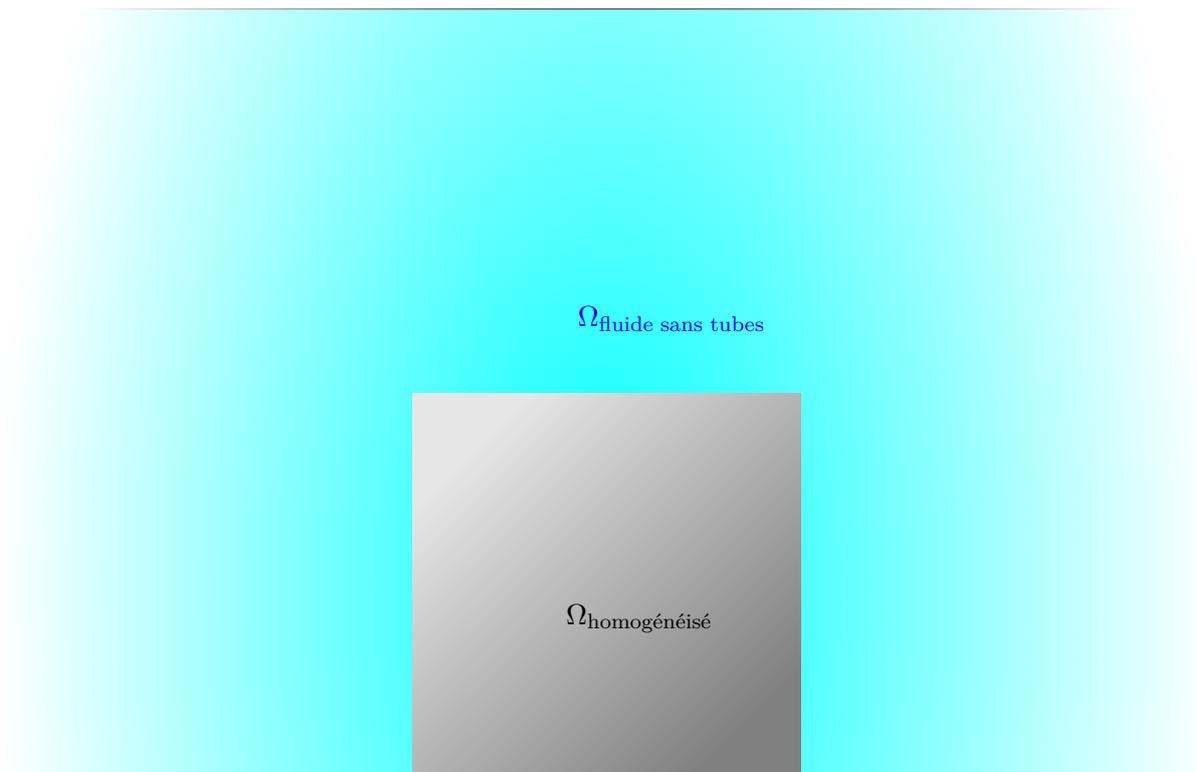


FIGURE 5.21 – Géométrie du système homogénéisé équivalent.

Le domaine homogénéisé fluide-structure est fixe. En son sein, la discrétisation éléments finis de la dynamique du sous-système structure se fait en utilisant une discrétisation constante par éléments.

### Comparaison du modèle avec une modélisation complète

Les cas test de lâcher de faisceau sont réalisés pour une configuration de  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ . La figure 5.22 représente la comparaison entre le calcul CFD (—), le modèle homogénéisé (—), pour un  $C_m = 2$  et un  $C_d = 2$ , et la réponse du faisceau dans le vide (—). La figure 5.23 compare les résultats issus du modèle, pour différentes valeurs du coefficient de masse ajoutée, au calcul CFD. De même la figure 5.24 représente cette comparaison pour différentes valeurs de coefficient  $C_d$ .

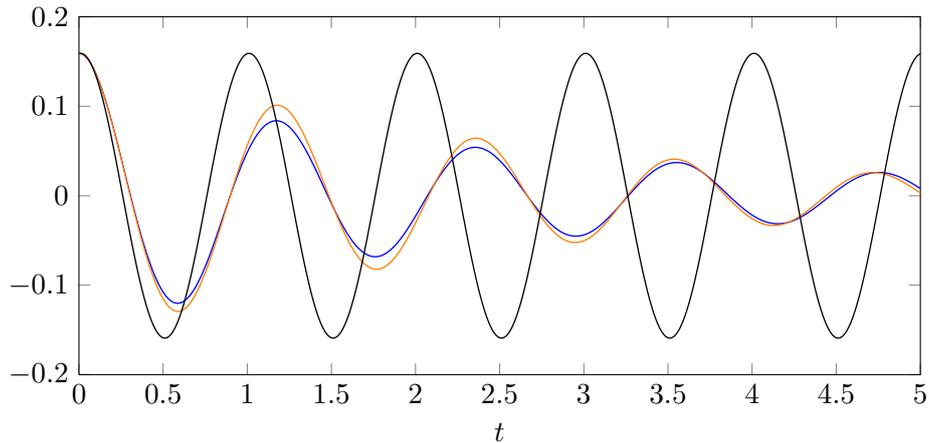


FIGURE 5.22 – Cas de lâcher d’un faisceau rigide semi-confiné dans une cuve de fluide. Le déplacement au cours des premiers temps issu du calcul CFD (—) est comparé au déplacement issu du modèle homogénéisé pour un  $C_d = 2$  et un  $C_m = 2$  (—). La réponse dans le vide d’un oscillateur non amorti est également représentée (—).

Le déplacement issu du calcul CFD suit des oscillations amorties. C’est le premier effet de la présence du fluide (l’oscillateur dans le vide est pris non-amorti). Cet amortissement est non linéaire. Une identification avec le taux d’amortissement d’un oscillateur amorti permet de l’estimer entre 10.16% (sur la première pseudo-période) et 5.62% (sur la dernière). La pseudo-période des oscillations est de 1.19. Cette augmentation de la période des oscillations correspond à une baisse de fréquence de 15.55% du système. C’est le deuxième effet de la présence du fluide.

Les résultats issus du modèle homogénéisé sont représentés pour différentes valeurs de coefficients de masse ajoutée en figure 5.23. Les valeurs testées sont prises entre 1.5 et 3.5. Cela couvre les ordres de grandeurs estimés dans la section 5.2.2. La dépendance du modèle à ce coefficient peut être ainsi évalué. Le coefficient dissipatif est fixé pour le moment à 2. La figure 5.23 montre que la pseudo-période du déplacement de la structure issue du modèle croît avec le  $C_m$ . Au sein du modèle, le coefficient de masse ajoutée représente bien la baisse de fréquence du système. Pour les valeurs de  $C_m$  considérées, les pseudo-périodes du déplacement sont estimées de 1.14 à 1.27. Cela correspond à des baisses de fréquences de 12.19% à 21.35%. Dans le cadre des équations d’Euler linéarisées, le  $C_m$  est estimé à 1.7. Cette valeur étant considérée comme limite inférieure du coefficient de masse ajoutée, comme discuté dans la section 5.2.2, la baisse de fréquence de 12.42% obtenue pour  $C_m = 1.5$  ne correspond pas à une configuration d’écoulement particulière.

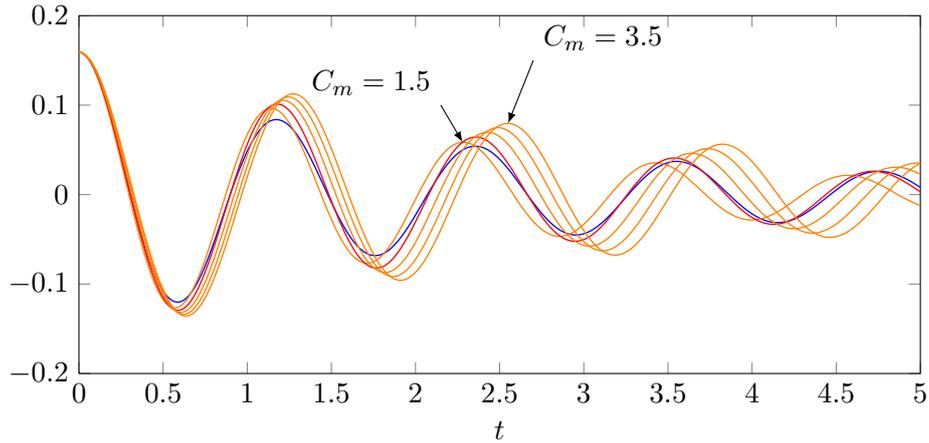


FIGURE 5.23 – Cas de lâcher d'un faisceau rigide semi-confiné dans une cuve de fluide. Le déplacement au cours des premiers temps issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_d = 2$  et des  $C_m$  variant de 1.5 à 3.5 (---).

Le tableau 5.3 détaille les pseudo-périodes et les baisses de fréquences observées selon les différents coefficients utilisés.

	CFD	$C_m = 1.5$	2	2.5	3	3.5
Pseudo-période	1.19	1.14	1.18	1.21	1.24	1.27
Baisse de fréquence (%)	15.55	12.19	15.03	17.52	19.53	21.35
taux d'amortissement (%)	10.16 à 5.62	7.94	7.19	6.55	5.99	5.5

TABLE 5.3 – Pseudo-périodes, baisses de fréquence et taux d'amortissements observées pour différentes valeurs de  $C_m$ .

Parmi les valeurs testées c'est le  $C_m = 2$  (---) qui estime le mieux la baisse de fréquence observée dans le calcul CFD. Ceci est légèrement inférieur par rapport à la valeur de coefficient de masse ajoutée estimée dans le tableau 5.1, p.100, pour un  $Kc = 5$  et  $Re = 250$ , de 2.38 (la baisse de fréquence causé par  $C_m = 2.5$  étant quand à elle trop importante). Enfin, le taux d'amortissement du système est réduit par l'augmentation du  $C_m$ . Les taux d'amortissements équivalents sont estimés dans le tableau 5.3.

L'amortissement dû au fluide est plus marqué par la variation du coefficient dissipatif  $C_d$ . La figure 5.24 représente la comparaison entre le déplacement issu du calcul CFD et le modèle pour différentes valeurs de  $C_d$  variant de 1 à 5. Cette plage de valeur couvre les ordres de grandeurs estimés dans la section 5.2.2 dans des configurations de grands  $Kc$  et des  $Re$  non faibles. Le coefficient de masse ajoutée est fixé à 2. Les résultats présentés sur la figure 5.24 montre que l'amortissement dû au fluide dépend fortement du coefficient dissipatif. Celui-ci représente donc bien la dissipation par le fluide de l'énergie de la structure. Au cours de la première oscillation le déplacement obtenu avec  $C_d = 3$  est le plus proche du calcul CFD. Cependant l'amortissement ne dépend pas linéairement des amplitudes des oscillations contrairement à la dissipation dans le modèle homogénéisé. Ainsi pour une estimation du déplacement en temps plus long, le modèle avec un  $C_d$  de 2 concorde mieux avec le calcul CFD. Le tableau 5.4 détaille les pseudo-périodes, les baisses de fréquences et les taux d'amortissements observés selon les différents coefficients utilisés.

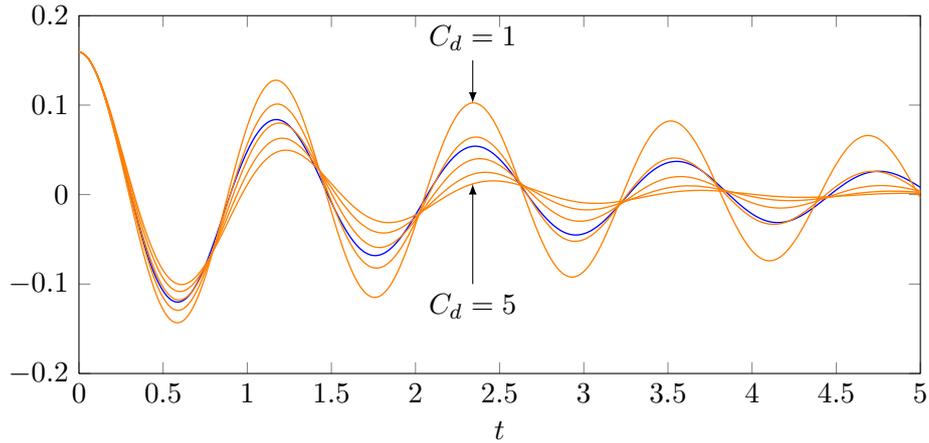


FIGURE 5.24 – Cas de lâcher d’un faisceau rigide semi-confiné dans un cuve de fluide. Le déplacement issue du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—).

	CFD	$C_d = 1$	2	3	4	5
Pseudo-période	1.19	1.17	1.18	1.19	1.20	1.23
Baisse de fréquence (%)	15.55	14.65	15.03	16.64	16.28	17.45
taux d’amortissement(%)	10.16 à 5.62	3.5	7.2	10.9	14.65	18.42

TABLE 5.4 – Pseudo-périodes, baisses de fréquence et taux d’amortissements observées pour différentes valeurs de  $C_d$  .

Le cas du lâcher est intéressant du fait de sa simplicité à mettre en œuvre et de la richesse des résultats. Il a montré que les valeurs des coefficients de masse ajoutée et de dissipation affectent fortement la dynamique du faisceau lorsque celui ci est laissé libre. De plus, ce cas est non-linéaire, ce qui est une limitation du modèle.

Cependant, ce cas test se déroule sur des temps de calculs courts. La dynamique du faisceau est presque totalement amortie au bout d’un temps adimensionné de 5. Les tourbillons au sein du fluide dans le calcul CFD n’ont pas le temps d’apparaître dans les premières oscillations. Et une fois amorti, le faisceau ne possède plus la dynamique pour en créer.

Afin de tester le modèle dans des cas de calculs avec présence d’instabilités, la dynamique du faisceau doit être entretenu dans le temps. Ainsi, on s’intéresse à présent à deux cas d’application où le faisceau est soumis à une sollicitation externe complexe sur une longue durée de temps.

### 5.4.3 Faisceau rigide soumis à des sollicitations externes

#### Description

Les géométries du calcul CFD ou du modèle équivalent sont identiques à celles du cas précédent. Les conditions limites également. Dans le calcul CFD, le fluide initialement au repos est perturbé afin de déclencher les potentielles structures tourbillonnaires plus rapidement. Le faisceau, initialement à sa position d’équilibre, est soumis à des sollicitations externes complexes  $\mathbf{a}(t)$  ayant pour but d’entretenir une dynamique du faisceau au cours du temps. On présente deux cas correspondant à deux sollicitations.

### Allure des sollicitations externes

Les accélérations  $\mathbf{a}(t)$ , représentées en figure 5.25 et 5.26, sont des processus stationnaire (dont les caractéristiques statistiques ne dépendent pas du temps) de moyennes nulles. Ces processus sont constitués d'une combinaison de sinusoides à phases aléatoires distribuées selon une loi uniforme sur  $[-\pi, \pi]$ ,

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^S a_i \sin(2\pi f_i t + \Phi_i) \mathbf{e}_x \quad (5.48)$$

où les  $f_i$  sont un ensemble de fréquences définies par  $f_i = i\Delta\nu$  dans l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{2dt}\right]$  avec  $\Delta f = \frac{1}{Sdt}$  et  $dt$  le pas de discrétisation temporel. Le signal est constitué de  $S = 1024$  sinusoides à des fréquences différentes. Pour déterminer les  $a_i$ , on fait appel à la notion de spectre de réponse d'oscillation (SRO). Le SRO quantifie le maximum atteint par un oscillateur harmonique à 1 degré de liberté au cours d'une excitation [28]. Il s'agit d'une fonction qui dépend de la fréquence et de l'amortissement. Les coefficients  $a_i$  sont déterminés par une méthode itérative afin que le SRO de  $\mathbf{a}(t)$  soit ajusté sur le SRO cible. Dans notre cas, le SRO cible est pris à valeur constante valant  $2\pi$  entre les fréquences 0.5 et 2 et nul ailleurs. Pour la première sollicitation l'amortissement du SRO est pris nul. On appellera cette sollicitation la sollicitation faible. La seconde sollicitation est générée en considérant un amortissement de 10%. Ceci correspond à l'ordre de grandeur de l'amortissement observé dans le cas précédent du lâcher de faisceau.

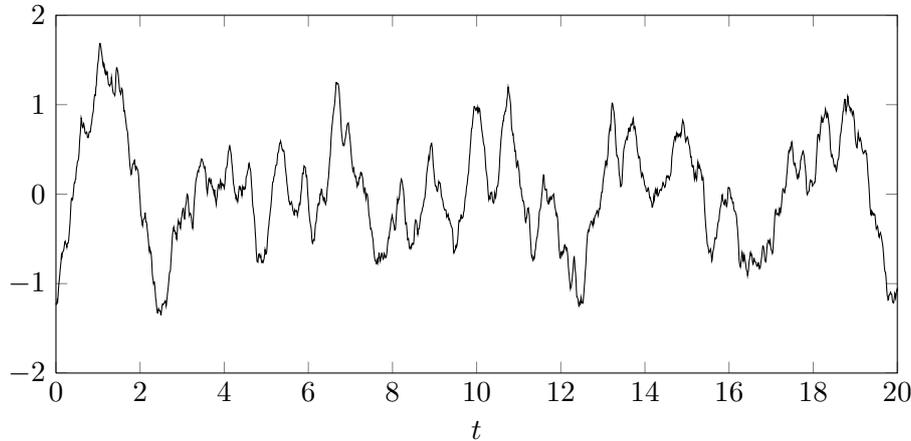


FIGURE 5.25 – Accélération de la première sollicitation externe (faible).

### Comparaison du modèle avec une modélisation complète dans le cas d'un faisceau soumis à une sollicitation faible

Le faisceau est rigide et initialement au repos. Son mouvement est uni-axial. La sollicitation externe faible lui est appliquée. La figure 5.27 représente le déplacement du faisceau au cours du temps. La réponse du faisceau dans le vide est également représentée. L'effet du fluide est bien visible à travers la baisse de fréquence due au fluide ainsi que la dissipation de l'énergie fournie par la sollicitation. Elles se remarquent qualitativement à partir de la figure 5.29 qui représente la transformée de Fourier de l'accélération du faisceau en présence de fluide et dans le vide.

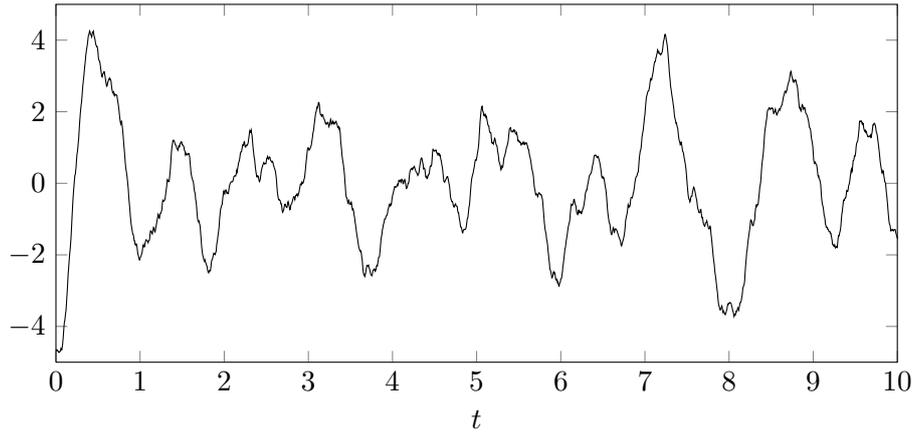


FIGURE 5.26 – Accélération de la seconde sollicitation externe (forte).

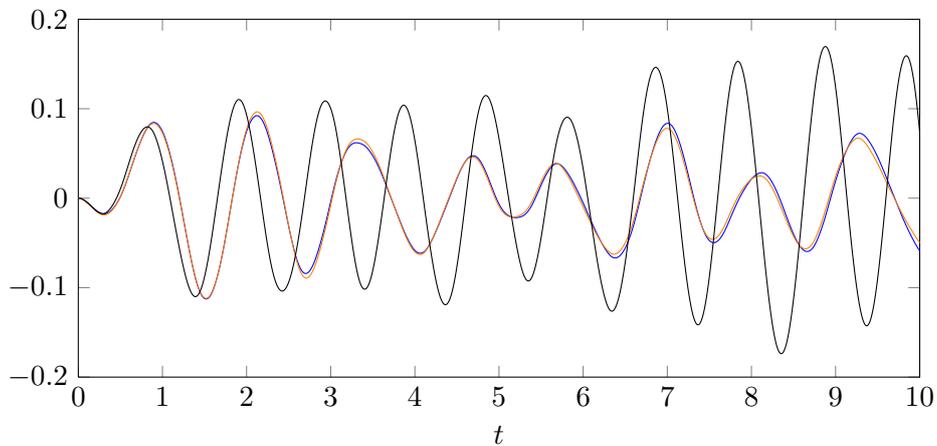


FIGURE 5.27 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et un  $C_d = 2$  (—) ainsi qu’au déplacement d’un oscillateur non amorti soumis à cette sollicitation (—).

Le déplacement issu du modèle pour des  $C_d$  variant de 1 à 5 est représenté en figure 5.28. Le  $C_m$  est fixé à 2 pour coller au mieux à la baisse de fréquence. Les transformations de Fourier des accélérations obtenues pour chaque  $C_d$  sont également représentées en figure 5.29. Comme pour le cas test précédent, le  $C_d$  a un fort impact sur le faisceau. La variation de dissipation de l’énergie en fonction du  $C_d$  se remarque qualitativement sur les courbes de cette figure. L’augmentation du coefficient dissipatif donne des spectres d’accélération plus faibles, et des déplacements plus amortis. Par rapport aux ordres de grandeurs de déplacement du faisceau dans le vide, le modèle avec  $C_m = 2$  et  $C_d = 2$  retrouve de façon très correcte le déplacement, figure 5.27.

A partir de l’équation de la dynamique du faisceau on peut également estimer l’énergie échangée entre la structure et le fluide. On multiplie cette équation par la vitesse du faisceau, ce qui donne le bilan des puissances. Une intégration sur le temps de calcul nous fournit l’énergie.

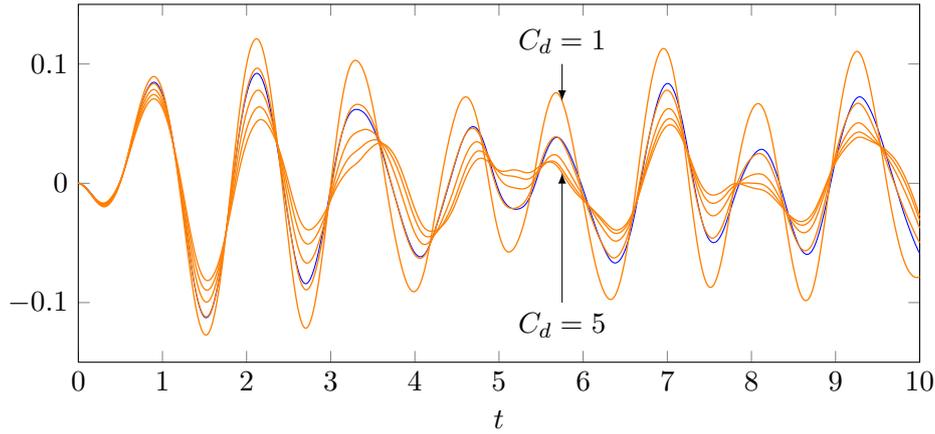


FIGURE 5.28 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (---).

$$\underbrace{\int_0^t \ddot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} dt + \int_0^t 4\pi^2 \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}} dt}_{(E_c(t)+E_p(t))-(E_{c0}-E_{p0})} = \int_0^t \frac{4\mathcal{M}Kc}{\pi} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \dot{\mathbf{X}} dt + \underbrace{\int_0^t \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{X}} dt}_{E_{tr}(t)}, \quad (5.49)$$

où  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$  est la moyenne des forces appliquées aux tubes du faisceau par le fluide.

La première intégrale représente la différence entre l'énergie cinétique du système à l'instant initial et à l'instant  $t$ . La seconde, représente de la même façon la différence d'énergie potentielle. La dernière intégrale donne l'énergie transmise  $E_{tr}(t)$  par la sollicitation au faisceau entre l'instant initial et l'instant  $t$ . Ainsi  $E_{s \rightarrow f}(t) = - \int_0^t \frac{4\mathcal{M}Kc}{\pi} \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \dot{\mathbf{X}} dt$  représente la différence entre l'énergie transmise au fluide par la structure et l'énergie transmise à la structure par le fluide.

A l'aide de l'équation de la dynamique du faisceau dans le modèle homogénéisé on peut estimer l'énergie échangée au sein du modèle homogénéisé. On multiplie cette équation par la vitesse du faisceau,

$$\int_0^t (1 + C_m \mathcal{M}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dt + \int_0^t C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} \right)^2 dt + \int_0^t 4\pi^2 \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dt = \int_0^t \left[ (C_m + 1) \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D + C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \mathbf{V}_D \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dt + \int_0^t \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dt. \quad (5.50)$$

Les différences d'énergies cinétiques et potentielles entre l'instant initial et final s'estiment comme précédemment. L'énergie transmise par la sollicitation au faisceau se calcule d'après la dernière intégrale. L'énergie échangée vaut

$$E_{s \rightarrow f}(t) = \int_0^t \left[ C_m \mathcal{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U} - (C_m + 1) \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_D - C_d \frac{2}{\pi} \mathcal{M} Kc \left( \mathbf{V}_D - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dt, \quad (5.51)$$

Les évolutions de cette énergie au cours du temps sont comparées pour le calcul CFD et le modèle pour différents  $C_d$  dans la figure 5.30. Les variations locales traduisent les

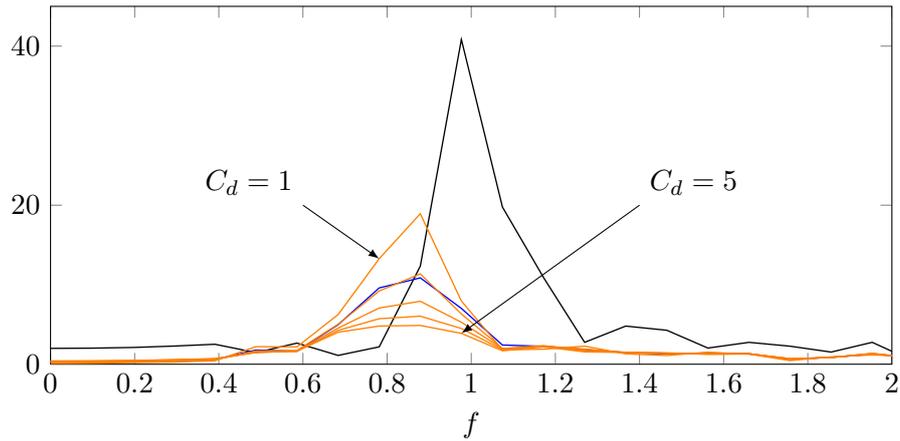


FIGURE 5.29 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. La transformée de Fourier de l'accélération issue du calcul CFD (—) est comparé à celles issues du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—) ainsi qu'à la transformée de Fourier de l'accélération d'un oscillateur non amorti (—).

échanges alternatifs d'énergie entre la structure et le fluide. La croissance globale traduit le fait que le fluide dissipe l'énergie du système. Le modèle estime correctement l'énergie échangée. Celle-ci est bien retrouvée par le modèle avec les paramètres  $C_m = 2$  et  $C_d = 2$  puisque la dynamique du faisceau l'était elle aussi.

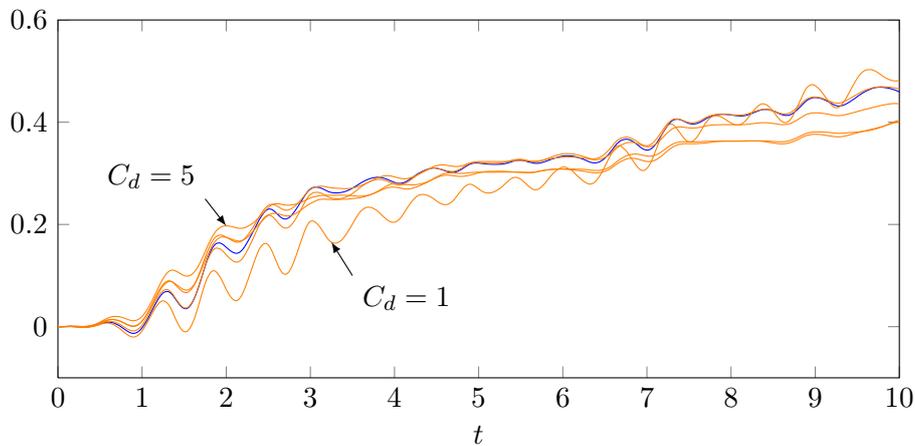


FIGURE 5.30 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. L'énergie échangée entre la structure et le fluide issue du calcul CFD (—) est comparée à celles issues du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—).

Dans ce cas d'application, la sollicitation extérieure est encore trop faible et ne permet pas le déclenchement de tourbillons dans le domaine fluide. On s'intéresse donc au cas du faisceau soumis à la sollicitation forte.

### Comparaison du modèle avec une modélisation complète dans le cas d'un faisceau soumis à une sollicitation forte

Ce cas d'application est identique au cas précédent à ceci près que la sollicitation externe forte est appliquée au faisceau. La figure 5.31 illustre la vorticité de l'écoulement fluide dans le domaine. La sollicitation imposée au faisceau est suffisamment énergétique pour déclencher des tourbillons.

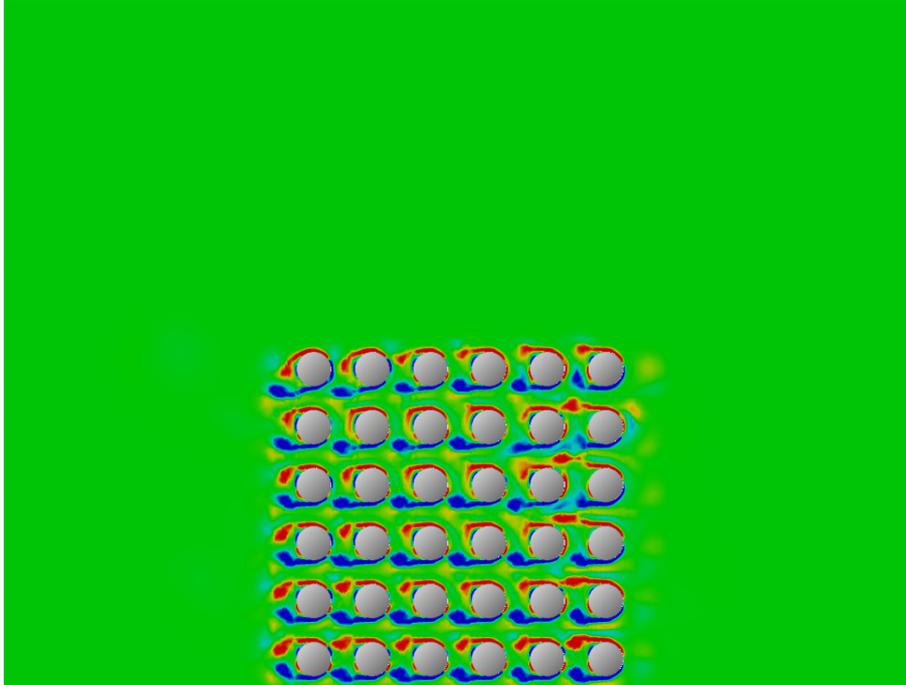


FIGURE 5.31 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Vorticité de l'écoulement fluide au temps  $t = 8.5$ .

La figure 5.32 représente le déplacement du faisceau au cours du temps. La réponse du faisceau dans le vide est également représentée. Elle est bien plus importante que dans le cas précédent. Ici aussi, l'effet du fluide est bien visible à travers la baisse de fréquence due au fluide ainsi que la dissipation de l'énergie fournie par la sollicitation. La baisse de fréquence est visible sur la figure 5.34 qui représente la transformée de Fourier de l'accélération du faisceau en présence de fluide et en air. Dans ce cas d'application la dissipation d'énergie est plus importante.

Le déplacement issu du modèle pour des  $C_d$  variant de 1   5 est représenté en figure 5.33. Le  $C_m$  est fixé à 2 pour coller à la baisse de fréquence. Les transformations de Fourier des accélérations obtenues pour chaque  $C_d$  sont également représentées en figure 5.34. L'influence du  $C_d$  sur la dynamique du faisceau observée est similaire au cas précédent. Le modèle pour un  $C_m = 2$  et un  $C_d = 3$  donne de bons résultats par rapport à l'ordre de grandeur des déplacements du faisceau non amorti (figure 5.32).

Les évolutions de l'énergie échangée entre la structure et le fluide au cours du temps sont comparées pour le calcul CFD et le modèle pour différents  $C_d$  dans la figure 5.35. Dans ce cas, le modèle montre de légères difficultés à prédire l'énergie échangée. Les ordres de grandeurs de ces énergies (issues du calcul CFD ou du modèle) sont équivalents.

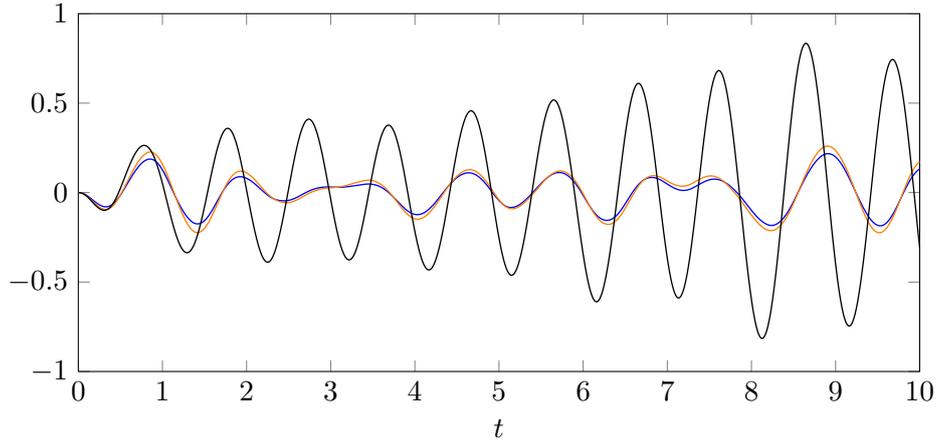


FIGURE 5.32 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et un  $C_d = 3$  (—) ainsi qu’au déplacement d’un oscillateur non amorti soumis à cette sollicitation (—).

Pour illustration, le champ de pression issu du calcul CFD et le champ de pression homogénéisé du modèle pour  $C_m = 2$  et  $C_d = 3$  sont représentés au temps  $t = 8.5$  en figure 5.36.

La norme de la vitesse du fluide et le champ de vitesse pour le calcul CFD ainsi que la norme et le champ de vitesse de la vitesse de Darcy pour le modèle homogénéisé sont également représentés en figure 5.37 et 5.38.

Ce cas test montre que le modèle représente bien les effets du fluide sur la dynamique de la structure, et ce dans le cas d’une excitation extérieur complexe du faisceau. Le modèle prend également en compte les grands mouvements de structures.

## 5.5 Conclusion

La mise en place du modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes est développée dans ce chapitre. Le modèle est construit en considérant la vitesse de Darcy, la pression homogénéisé et la dynamique du faisceau. Cette vitesse de Darcy a été introduite dans la construction du modèle homogénéisé dans le cas linéarisé non visqueux, c’est à dire basé sur les équations d’Euler linéarisées. Elle se définit à partir d’un volume d’intégration et représente la vitesse d’ensemble du fluide dans le système. Le modèle est basé sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide. Ces équations prennent en compte les effets de la viscosité et permettent de considérer des grands mouvements de structure. La construction du modèle s’inspire de la forme de ces équations. Les opérateurs présents dans les équations de Navier-Stokes sont appliqués à la vitesse de Darcy. Les développements qui en découlent font apparaître des termes de trois types. Les premiers correspondent aux termes des équations de Navier-Stokes intégrés sur le domaine d’intégration. Les seconds regroupent les termes dépendant des variables du modèle homogénéisé qui viennent enrichir le modèle. Les derniers termes qui apparaissent sont exprimés en fonction des variables du système initial. Ces termes nécessitent d’être modélisés. Les forces appliquées par le fluide sur le faisceau en sont un exemple et sont modélisées par une approche de moyenne. Les forces

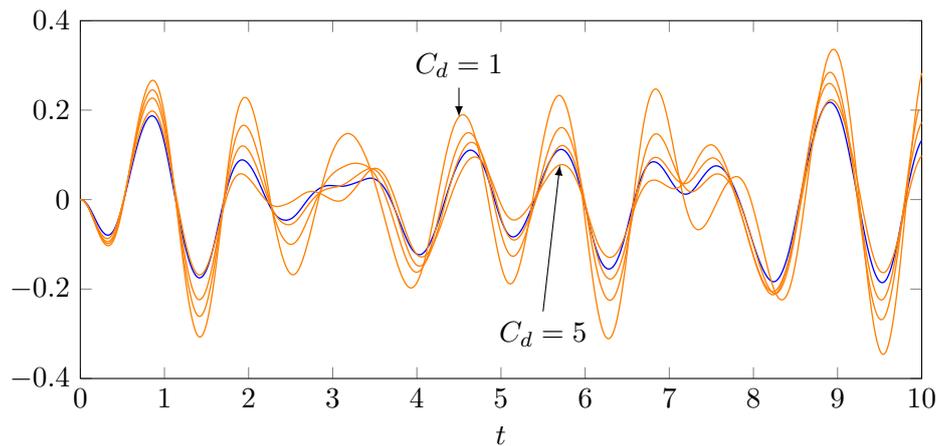


FIGURE 5.33 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—).

ont un comportement moyen faiblement variable dans l'espace. Ce comportement peut être approximé en fonction des variables du modèle homogénéisé. Une analyse détaillée des coefficients de ces approximations est réalisée. Le modèle homogénéisé est établi puis validé par comparaison entre des résultats issus du calcul classique CFD et le modèle homogénéisé pour plusieurs cas test. Le premier cas test est un cas de lâcher d'un faisceau rigide dans un fluide au repos. Le second est un faisceau rigide soumis à une excitation complexe plongé dans un fluide initialement au repos. Dans chaque cas la baisse de fréquence du système et la dissipation d'énergie dues à la présence de fluide sont retrouvées dans le modèle. Le modèle, bien que développé dans son principe pour tout type de mouvement d'ensemble du faisceau, n'est validé pour le moment que dans des cas de faisceaux rigides. Ces validations ont servi principalement à montrer que le modèle est fonctionnel pour des configurations et des applications différentes de celles avec lesquelles il a été construit.

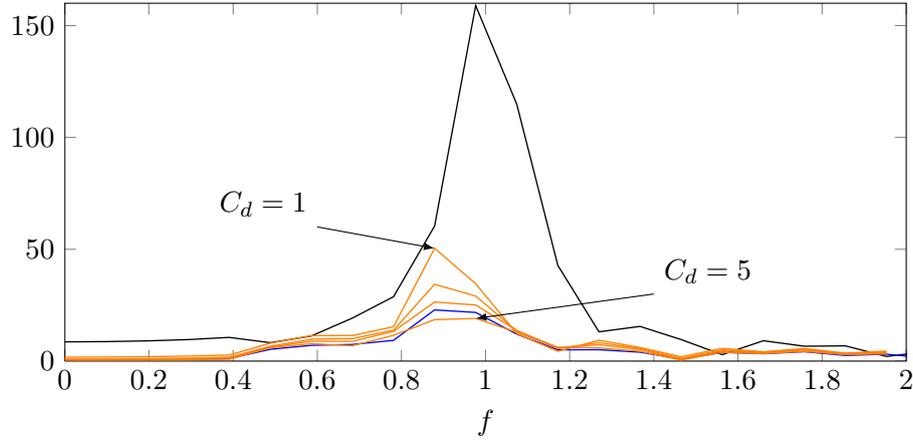


FIGURE 5.34 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. La transformée de Fourier de l'accélération issu du calcul CFD (—) est comparé à celles issues du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—) ainsi qu'à la transformée de Fourier de l'accélération d'un oscillateur non amorti (—).

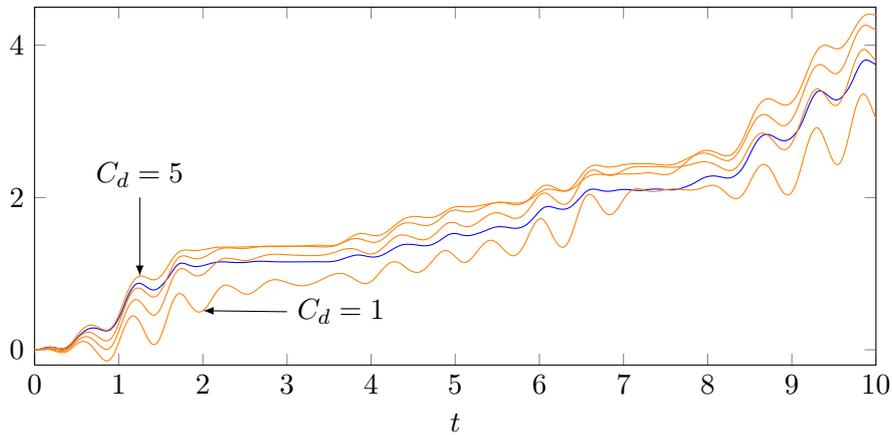
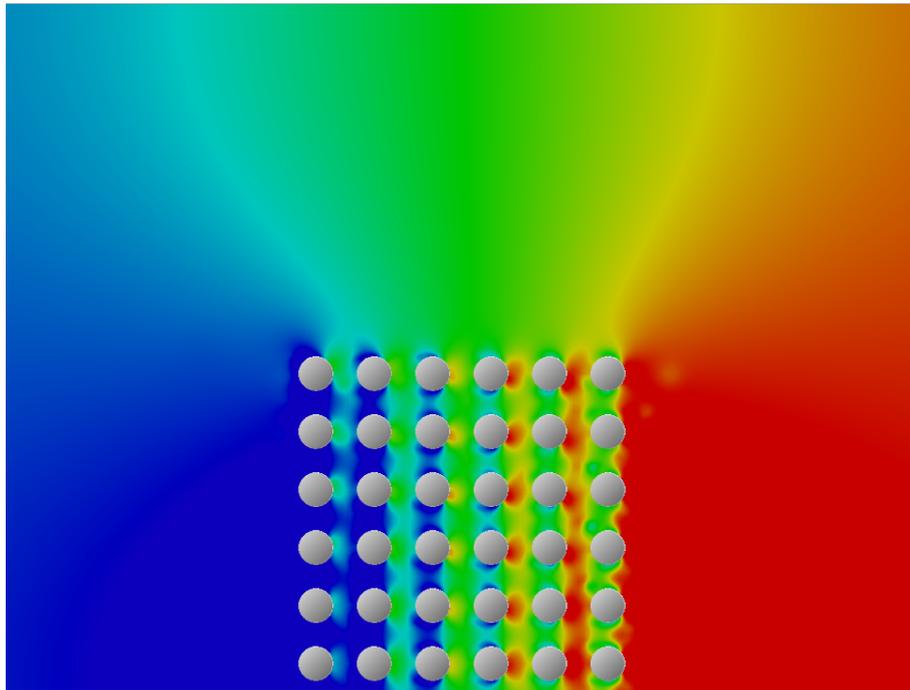
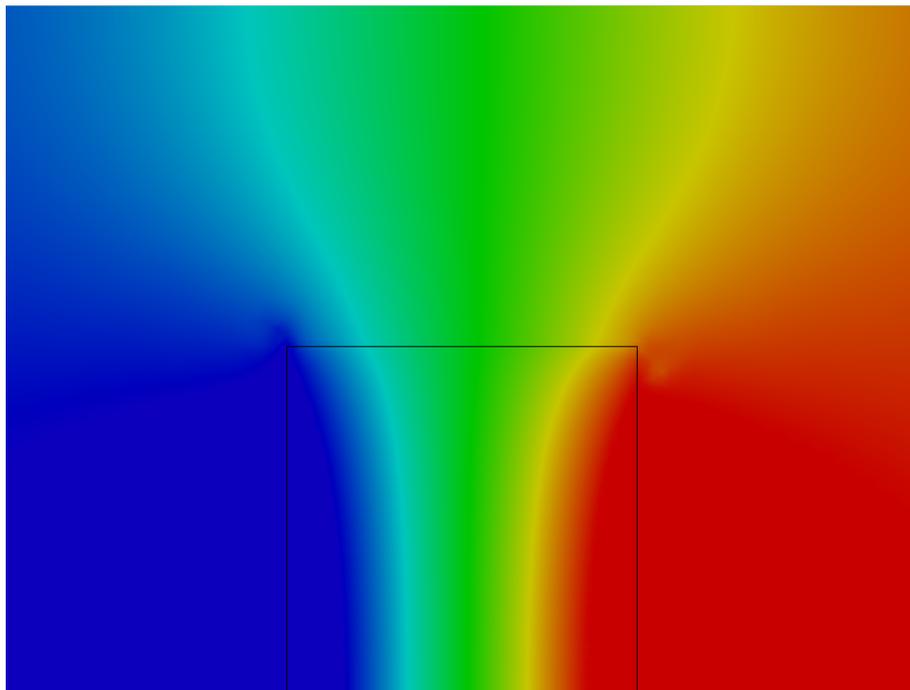


FIGURE 5.35 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. L'énergie échangée entre la structure et le fluide issue du calcul CFD (—) est comparée à celles issues du modèle homogénéisé pour un  $C_m = 2$  et des  $C_d$  variant de 1 à 5 (—).

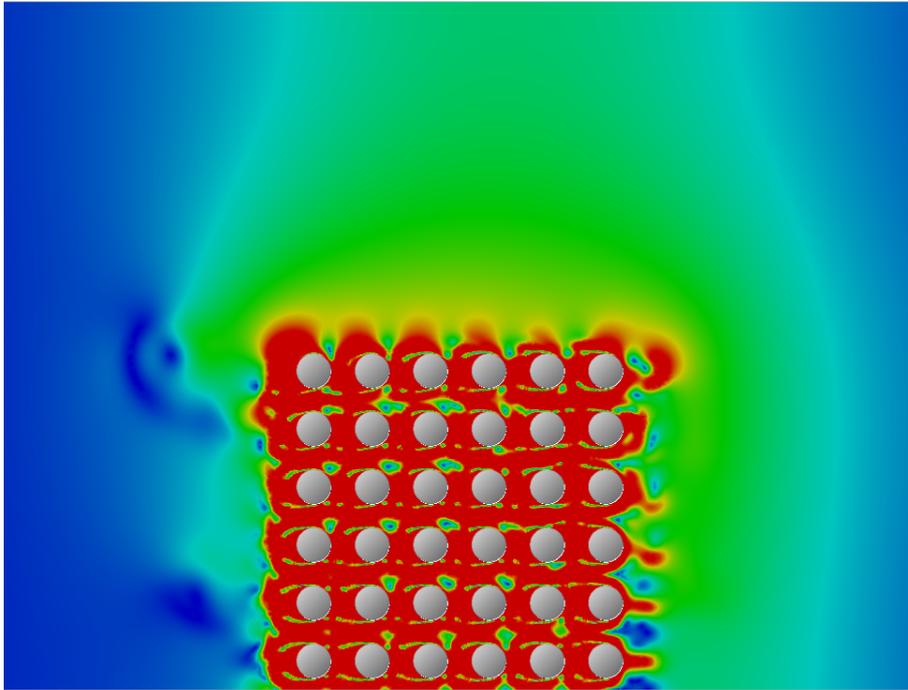


(a) Champ de pression fluide dans le domaine obtenu par calcul CFD.

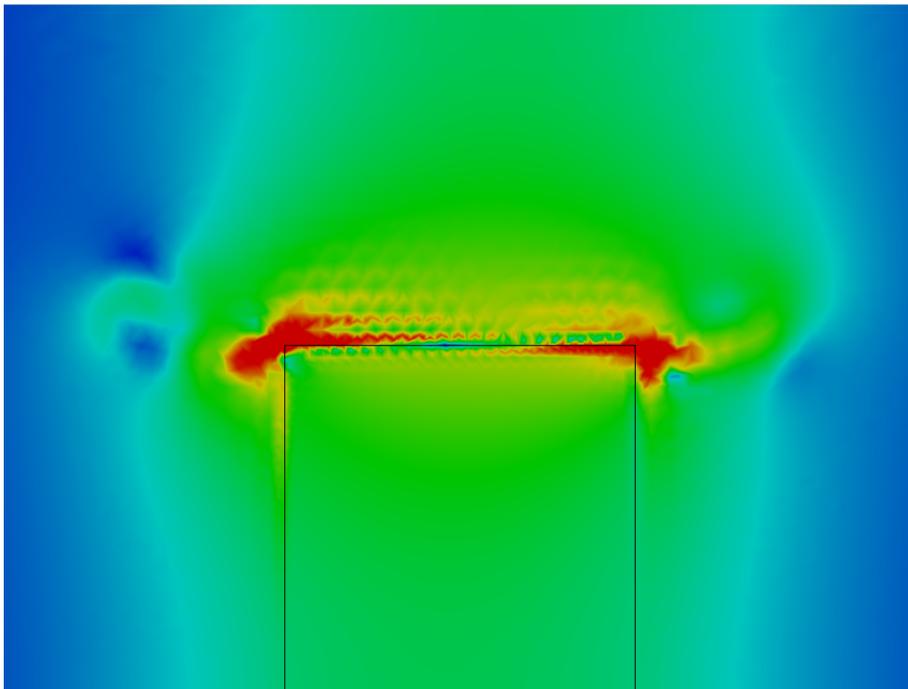


(b) Champ de pression homogénéisé dans le domaine obtenu avec le modèle homogénéisé.

FIGURE 5.36 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des champs de pression fluide et homogénéisé à  $t = 8$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à  $C_m = 2$  et  $C_d = 3$ .

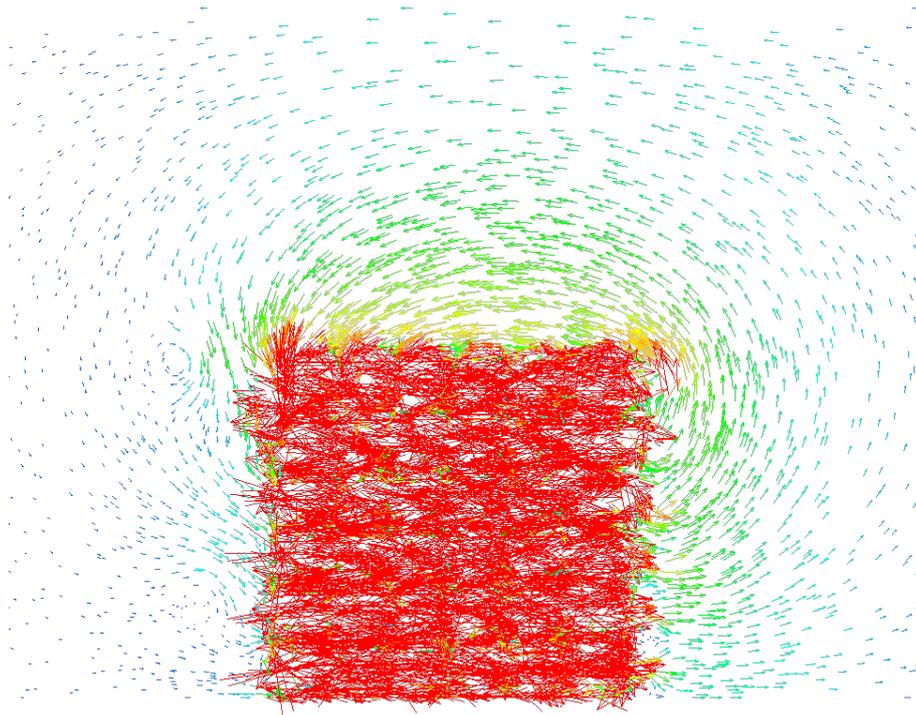


(a) Norme de la vitesse fluide dans le domaine obtenu par calcul CFD.

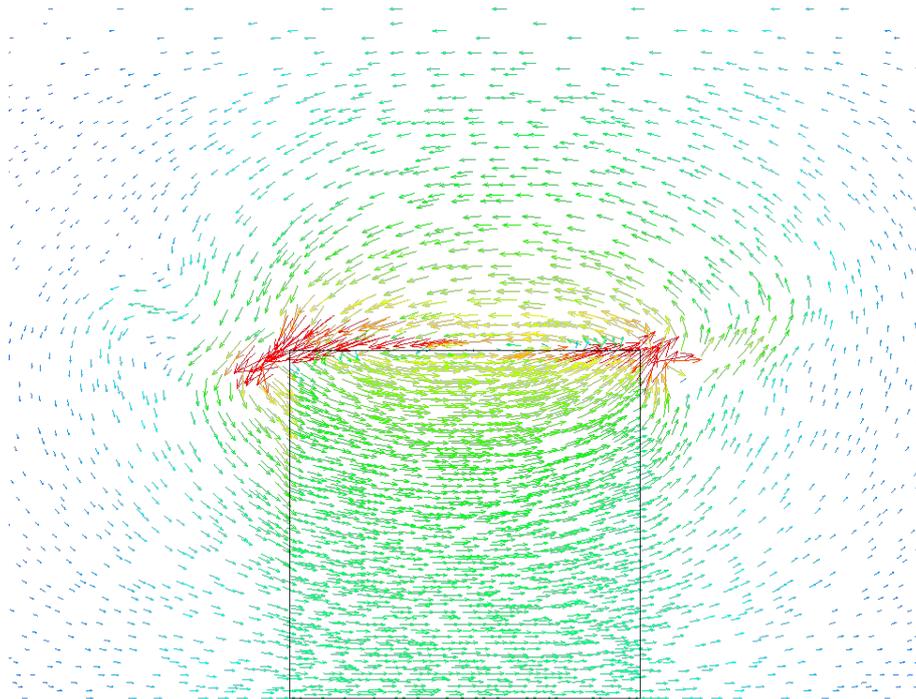


(b) Norme de la vitesse de Darcy dans le domaine obtenu avec le modèle homogénéisé

FIGURE 5.37 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des normes de vitesses fluide et homogénéisé à  $t = 8.5$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à  $C_m = 2$  et  $C_d = 3$ .



(a) Champ de vitesse fluide dans le domaine obtenu par calcul CFD.



(b) Champ de vitesse fluide dans le domaine obtenu avec le modèle homogénéisé

FIGURE 5.38 – Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des champs de vitesses fluide et homogénéisé à  $t = 8.5$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à  $C_m = 2$  et  $C_d = 3$ .



## Chapitre 6

# Conclusion

Dans cette thèse on s'intéresse à la mise en place d'un modèle homogénéisé bidimensionnel de la vibration de faisceaux de tubes en présence de fluide, soumis à une excitation externe. Le fluide est visqueux et les mouvements de structure sont importants. La dynamique du fluide est basée sur les équations de Navier-Stokes.

Nos travaux ont suivi deux axes d'études en parallèle. Le premier axe d'étude concerne la réalisation de simulations d'interaction fluide-structure d'un faisceau immergé dans du fluide, basées sur les équations de Navier-Stokes. Ces résultats sont venus enrichir le second axe d'étude qui consistait à mettre en place le modèle homogénéisé.

Nous avons tout d'abord présenté les outils numériques de résolution employés pour la simulation directe du problème d'interaction fluide-structure nous concernant. Ces outils utilisent une formulation ALE où le maillage est affecté d'une vitesse égale à celle des tubes du faisceau. Ce choix nous permet d'économiser l'étape de remaillage avec un gain appréciable en terme de temps de calcul. Les choix de discrétisations temporelle et spatiale résultent d'un compromis entre précision et économie en temps de calcul. La résolution du système d'équation différentielle se fait grâce à un algorithme de projection-correction permettant de résoudre le système plus rapidement. Le calcul des forces exercées par le fluide sur les cylindres du faisceau se fait par une méthode basée sur la formulation variationnelle du problème et qui est donc adaptée à nos outils. Par construction elle respecte les bilans des forces et des puissances. Dans le cas d'un mouvement non forcé du faisceau, le couplage fluide-structure se fait par une approche partitionnée.

Le troisième chapitre a porté sur l'étude des écoulements de fluide générés par un faisceau oscillant confiné dans une cuve, ainsi que l'étude des forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau. Dans le cadre d'un cylindre oscillant dans un domaine de fluide initialement au repos, les écoulements sont fortement dépendants des configurations de paramètres adimensionnels  $Kc$  et  $Re$  employées. Dans le cas du faisceau, la géométrie de celui-ci est également à prendre en compte. Aux paramètres  $Kc$  et  $Re$  viennent s'ajouter la dépendance au paramètre d'espacement entre les cylindres, à l'agencement des tubes ainsi qu'à l'angle d'incidence des oscillations par rapport à cet agencement. Ces paramètres sont fixés et l'étude porte sur la dépendance de l'écoulement en fonction des nombres adimensionnels  $Kc$  et  $Re$ . Les écoulements sont classés en deux grandes catégories. L'appartenance à l'une ou l'autre dépend de l'existence ou non de forces de portances (non négligeables) au niveau de chaque cylindre. On distingue ainsi les écoulements symétriques à forces de portance nulles, et les écoulements non symétriques. Un nombre plus restreint de configurations sont observées par rapport au cas du cylindre isolé pour la plage de  $Kc-Re$

considérée du fait du confinement de l'écoulement entre les tubes du faisceau. Pour chaque configuration testée, les forces exercées par le fluide sur chaque cylindre sont étudiées. Pour les configurations de faibles  $Kc$  ou de faibles  $Re$ , les forces de trainée sont identiques pour tous les tubes du faisceau (effet de bord de faisceau mis à part). Pour les configurations restantes, un comportement global apparaît et est dominant par rapport aux variations de forces observées entre les tubes du faisceau. Pour ces mêmes configurations, les forces de portance ont des amplitudes importantes mais un comportement moyen nul. La nature de ce comportement moyen est réétudiée par la suite lorsque l'on modélisera ces forces.

On consacre ensuite un chapitre à la description des méthodes d'homogénéisation appliquées au cas d'un faisceau de tubes immergé dans du fluide non visqueux et soumis à une excitation externe, dans l'approximation des très petits déplacements pour les cylindres. On applique dans un premier temps la méthode des développements asymptotiques à ce système. Le principe de la méthode est rappelé et après application on en déduit un système d'équation décrit à l'échelle des variations lentes défini dans le domaine total. L'homogénéisation peut également être réalisée par une méthode de prise de moyenne. Son inconvénient est qu'elle semble moins assise mathématiquement. Des analyses sur des cellules élémentaires des phénomènes en jeu nous permettent d'établir par cette méthode un système d'équations homogénéisées sur le domaine. Ce système est exprimé à partir de la notion de vitesse de Darcy. Cette notion représente le mouvement global de fluide. En définissant le modèle homogénéisé à partir de cette notion, on assure sa continuité. Les deux méthodes (des développements asymptotiques et de la prise de moyenne) sont équivalentes. La méthode de prise de moyenne donne de bons résultats comme le montre le cas d'application présenté en fin de ce chapitre. Ce chapitre nous a permis d'asseoir le choix de la méthode de prise de moyenne pour la réalisation d'un modèle homogénéisé basé sur les équations de Navier-Stokes pour le fluide.

Enfin, le dernier chapitre traite de la mise en place de notre modèle homogénéisé. Il est organisé en trois étapes. Une première étape consiste en la construction du modèle. La seconde étape traite des approximations et des modélisations nécessaires au modèle. La dernière étape met en place des cas d'application afin de valider le modèle obtenu.

La construction suit la méthode de la prise de moyenne. On se base sur la notion de vitesse de Darcy pour définir les équations homogénéisées de notre modèle. La forme de ces équations est supposée semblable à celles du système, défini par la dynamique du faisceau couplée aux équations de Navier-Stokes. Les développements font apparaître des termes supplémentaires qui doivent être modélisés.

Les forces appliquées par le fluide sur le faisceau sont modélisées par une approche de moyenne. Ces forces ont un comportement moyen faiblement variable dans l'espace. La modélisation de ces forces dépend des deux paramètres  $C_m$  et  $C_d$  dont on fournit une analyse détaillée.

Le modèle est mis en application et est comparé à une simulation directe du couplage entre la dynamique du faisceau et les équations de Navier-Stokes. Le premier cas d'application est un test de lâcher d'un faisceau rigide dans un fluide au repos. La comparaison avec le calcul direct montre que le modèle estime correctement la baisse de fréquence due au fluide. L'amortissement de la dynamique du faisceau est également correctement représenté bien que celui-ci soit non linéaire. Les cas d'applications supplémentaires concernent un faisceau rigide baigné dans du fluide au repos et soumis à une sollicitation externe complexe. Deux sollicitations ont été testées. Une première sollicitation entraînant des niveaux de déplacements faibles ne perturbant que très peu le fluide. Une seconde entraînant

des forts déplacements du faisceau, où des structures tourbillonnaires apparaissent. Dans chaque cas la baisse de fréquence et la dissipation d'énergie dues à la présence de fluide sont correctement retrouvées dans le modèle.

En conclusion, à partir d'une méthode de prise de moyenne, on a établi un modèle basé sur la vitesse de Darcy, une pression homogénéisée et un champ de déplacement de la structure. Le modèle possède un sous-système fluide homogénéisé et un sous-système structure homogénéisé. Ces deux sous-systèmes sont liés par des coefficients de masse ajoutée  $C_m$  et dissipatif  $C_d$  à déterminer par des simulations ou expérimentalement. Ces coefficients permettent de gérer dans le modèle l'énergie cinétique et la dissipation d'énergie dans le fluide, sans avoir à décrire explicitement les écoulements à l'échelle locale.

Ce modèle, par rapport aux précédents, n'est plus restreint à la limite des petits déplacements de structures. Il peut également être utilisé, dans son principe, en présence d'un fluide qui n'est pas globalement stagnant.

La construction du modèle ne nécessite pas d'hypothèse de rigidité du faisceau et chaque tube peut être considéré comme ayant deux degrés de liberté. Bien que l'on n'ait travaillé qu'avec des faisceaux rigides pour sa validation, il est possible de réaliser des simulations où le faisceau admet des mouvements différentiels comme le montre la figure 6.1.

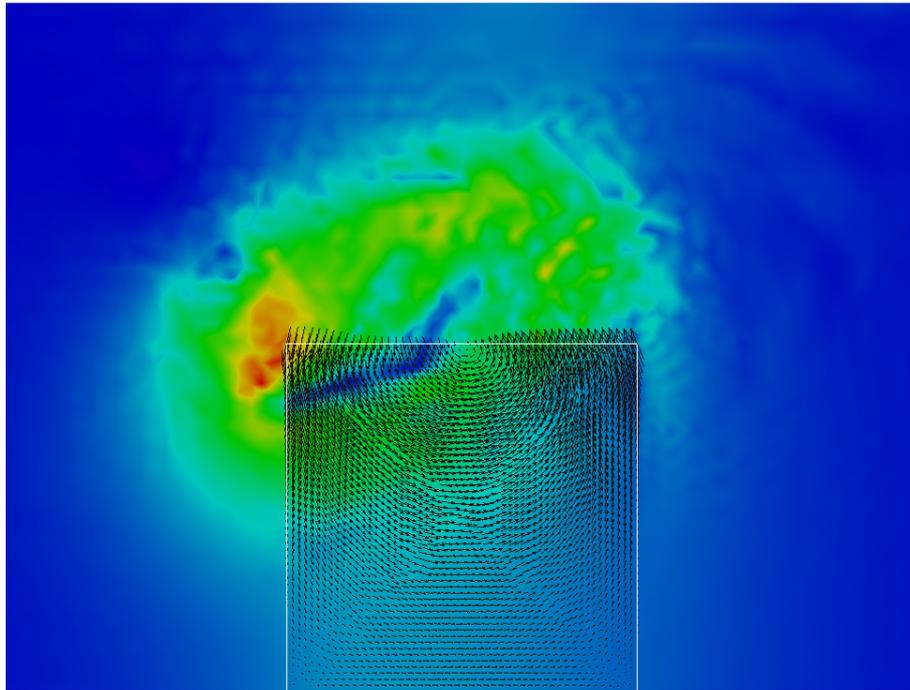


FIGURE 6.1 – Faisceau non rigide semi-confiné dans un cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Norme de la vitesse de Darcy et champ de vecteur déplacement de la structure à  $t = 9.25$ . Les paramètres du modèle ont été pris à  $C_m = 2$  et  $C_d = 3$ .

En perspective, un enrichissement des abaques des coefficients  $C_m$  et  $C_d$  qui ont été esquissées est une première piste pour mieux décrire le comportement de ces coefficients en fonction des  $Kc$  et  $Re$ . Une seconde piste consisterait en une analyse phénoménologique du comportement du fluide. En effet, la construction du code de calcul utilisé pour les

simulations directes de l'interaction du faisceau avec le fluide respecte les bilans de forces et de puissances. Ces puissances sont déterminées globalement. On pourrait envisager de réaliser le calcul local de ces densités de puissances. L'étude de ces densités permettrait de mieux comprendre comment se construisent le coefficient de masse ajoutée et le coefficient dissipatif.

Les cas d'applications considérés pour la validation du modèle ne considèrent que des faisceaux rigides. Cette contrainte vient du choix de ne pas remailler à chaque itération lors de la mise en place de nos outils. Afin de fournir une comparaison avec un calcul direct dans le cas d'un faisceau non rigide, il est nécessaire de modifier ces outils (soit en adoptant une formulation ALE avec remaillage, soit en utilisant un mélange d'ALE pour la gestion des grands déplacements moyens et de méthode de transpiration pour déterminer les déplacements de tubes par rapport à cette position moyenne). De plus le fait de considérer un faisceau rigide dans les cas de validations assure que globalement les forces de portance exercées sur le faisceau seront faibles (elles s'annulent globalement à l'échelle d'un VER). Dans des conditions de non rigidité du faisceau, ces forces de portances peuvent faire apparaître des instabilités (particulièrement lorsque le faisceau est soumis à un écoulement global de fluide de vitesse importante). Il est donc nécessaire d'investiguer les limites du modèle dans ces conditions.

Enfin, une extension à un modèle tridimensionnel est dans le principe réalisable, si les écoulements de fluide considérés restent globalement transverse à l'axe des cylindres. Dans le cas particulier où les écoulements de fluide deviendraient principalement axiaux par rapport au cylindres, des phénomènes de grands amortissements pourrait apparaître. Ce cas de configuration nécessiterait alors de nouvelles études phénoménologiques fines du comportement du faisceau de tubes et du fluide environnant, mais aussi de valider les modèles de forces utilisés et d'étudier les comportements des coefficients  $C_m$  et  $C_d$ .

## Annexe A

# Opérateur de discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle de notre système se fait selon un schéma implicite d'ordre 2, le schéma Euler rétrograde d'ordre 2 (ER2, aussi appelé Backward differential formula of order 2, BDF2). Cela revient à discrétiser le terme d'accélération temporelle de l'équation de quantité de mouvement comme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t + dt) = \frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (\text{A.1})$$

tout en traitant implicitement les autres termes de l'équation. On rappelle que ce schéma est bien d'ordre 2.

Pour simplifier, on résume l'équation de quantité de mouvement à

$$\frac{dv}{dt}(t + dt) - f(v(t + dt)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

où  $f$  est une fonction régulière. On a donc le schéma ER2 qui s'écrit

$$\frac{1}{2\Delta t} (3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1}) - f(v^{n+1}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

On calcule ensuite l'erreur de troncature de ce schéma, soit

$$\mathcal{T}(\Delta t, t, v(\bullet)) = \frac{1}{2\Delta t} (3v(t + dt) - 4v(t) + v(t - dt)) - f(v(t + dt)) \quad (\text{A.4})$$

En utilisant les développements de Taylor suivant

$$\begin{aligned} v(t + dt) &= v(t) + \Delta t \frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2v}{dt^2}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3v}{dt^3} + O(\Delta t^4) \\ v(t - dt) &= v(t) - \Delta t \frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2v}{dt^2}(t) - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3v}{dt^3} + O(\Delta t^4) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(v(t + dt)) &= f(v(t)) + \Delta t \frac{dv}{dt}(t) f'(v(t)) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2v}{dt^2}(t) f'(v(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \Delta t \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 f''(v(t)) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Delta t, t, v(\bullet)) &= \frac{dv}{dt}(t) + \Delta t \frac{d^2v}{dt^2}(t) + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{d^3v}{dt^3}(t) - f(u(t)) - \Delta t \frac{dv}{dt}(t) f'(v(t)) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2v}{dt^2}(t) f'(u(t)) - \frac{1}{2} \left( \Delta t \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 f''(v(t)) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Remarquons que  $u(\bullet)$  est solution de A.2, et également que par dérivation

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} f'(v(t)) \\ \text{et} \\ \frac{d^3v}{dt^3} &= \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 f''(v(t)) + f'(v(t)) \frac{d^2v}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Delta t, t, v(\bullet)) &= \frac{\Delta t^2}{6} \frac{d^3v}{dt^3}(t) - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2v}{dt^2}(t) f'(u(t)) - \frac{1}{2} \left( \Delta t \frac{dv}{dt}(t) \right)^2 f''(v(t)) \\ &\quad + O(\Delta t^3) \\ &= \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^3v}{dt^3}(t) + O(\Delta t^3) \\ &= O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

L'erreur de troncature est bien de l'ordre de  $\Delta t^2$ . Le schéma est d'ordre 2.

## Annexe B

# Bilan des puissances

On rappelle dans cette annexe comment obtenir le bilan des puissances depuis l'équation de quantité de mouvement de la formulation variationnelle (2.38), p.27. Elle est valable pour toute fonction test de l'espace des vitesses. Elle est donc valable en prenant comme fonction test la vitesse fluide. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kc} \int_{\Omega_F} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_F} \mathbf{v} \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega_F} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Gamma_{F/S}} p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma & \\ + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_{F/S}} [(\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma . & \end{aligned} \quad (B.1)$$

Or  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega_F$  et  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}$  sur  $\Gamma_{F/S}$ , ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kc} \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega_F} \mathbf{v} \cdot \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v} d\Omega &= \\ - \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \left[ \int_{\Gamma} \left( -p + \frac{1}{Re} [\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}] \right) \mathbf{n} d\Gamma \right] \dot{\mathbf{X}} . & \end{aligned} \quad (B.2)$$

On note  $e_c = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  l'énergie cinétique locale et  $P_{visc} = \frac{1}{Re} \int_{\Omega_F} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) d\Omega_F$  la puissance des efforts visqueux. De plus on a

$$\mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \wedge (\nabla \times \mathbf{v})] = \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right), \quad (B.3)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot [(\dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla) \mathbf{v}] &= \dot{\mathbf{X}} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] + (\nabla \times) \cdot [\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathbf{v}] \\ &= \dot{\mathbf{X}} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] + \dot{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{v} \wedge (\nabla \times \mathbf{v})] \\ &= \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \dot{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{v} \wedge (\nabla \times \mathbf{v})] + \dot{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{v} \wedge (\nabla \times \mathbf{v})] \\ &= \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right). \end{aligned} \quad (B.4)$$

On obtient alors

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{Kc} \frac{\partial}{\partial t} e_c + \left( (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{X}}) \cdot \nabla \right) e_c d\Omega = -P_{visc} - \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \cdot \dot{\mathbf{X}}. \quad (B.5)$$

Les termes dans l'intégrale correspondent à la description ALE adimensionnée de  $\frac{de_c}{dt}$ , ainsi on obtient le bilan de puissance

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_c + P_{f \rightarrow s} + P_{visc} &= 0, \\ \text{ou} \\ \frac{d}{dt}E_c + P_{visc} &= P_{s \rightarrow f}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

avec  $\frac{d}{dt}E_c$  la puissance cinétique. Ce bilan exprime le fait que sur un intervalle de temps, l'énergie transmise par la structure au fluide et stockée dans le mouvement du fluide (tourbillon ou écoulement) ou dissipée par viscosité. L'énergie stockée est soit retransmise à la structure, soit dissipée.

# Table des figures

1.1	Représentation d'un cœur de réacteur à eau pressurisé dans sa cuve et vue de coté d'un assemblage combustible pour REP. . . . .	7
1.2	Schéma de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisé. . . . .	8
1.3	Représentation d'un cœur de réacteur à neutrons rapides et d'une coupe d'un assemblage combustible. . . . .	9
1.4	Schéma de fonctionnement d'un réacteur à neutrons rapides refroidit au sodium. . . . .	10
1.5	Représentation schématique de l'interaction fluide-structure du point de vue du cylindre. Cas d'un cylindre baigné dans du fluide est soumis à une sollicitation externe. . . . .	13
1.6	Représentation schématique des interactions entre les tubes et le fluide au sein d'un faisceau. Cas d'un faisceau baigné dans du fluide est soumis à une sollicitation externe. . . . .	14
2.1	Faisceau de $N$ tubes immergés dans un fluide initialement au repos et soumis à une excitation externe. . . . .	18
2.2	Relations entre le référentiel matériel, spatial et arbitraire et entre les descriptions lagrangienne, eulérienne et ALE. Figure inspirée de [23]. . . . .	22
2.3	Éléments finis $Q_2$ et $P_2$ utilisés pour l'inconnue de vitesse. . . . .	30
2.4	Éléments finis $P_1$ utilisés pour l'inconnue de pression. . . . .	30
2.5	Faisceau de tubes confiné sur ses bords latéraux dans une cuve rectangulaire. 35	
2.6	Comparaison des forces de traînée calculées sur les 36 tubes du faisceau pour une configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 250$ et des discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de $\Delta x = 0.05$ (—), $\Delta x = 0.0375$ (—) et $\Delta x = 0.025$ (—) pour un même laps de temps de simulation. . . . .	36
2.7	Comparaison des forces de portance calculés sur les 36 tubes du faisceau pour une configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 250$ et des discrétisations spatiales au niveau des interfaces entre le fluide et les tubes de $\Delta x = 0.05$ (—), $\Delta x = 0.0375$ (—) et $\Delta x = 0.025$ (—) pour un même laps de temps de simulation. . . . .	36
2.8	Décalages temporels entre les résolutions des systèmes fluide et solide. . . . .	38
2.9	Schéma représentant le déroulement de l'algorithme de couplage explicite synchrone. . . . .	39
3.1	Cartographie des régimes d'écoulements dans le plan $Kc-Re$ définis dans [59].	42
3.2	Exemples de structures de Honji observées dans le plan perpendiculaire à la direction des oscillations du cylindres par Tatsuno et Bearman dans le régime $B$ . Figure extraite de [59]. . . . .	42

3.3	Représentation des écoulements selon les différents régimes d'écoulements observés par [59]. Les figures (a), (b) et (f) sont issues d'un calcul par éléments finis comme décrit dans le chapitre 2. Les figures (c), (d) et (e) sont extraites de [59]. . . . .	43
3.4	Configurations d'écoulements en très petits déplacements. . . . .	45
3.5	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de très faibles déplacements à $t = 19.37$ . Configuration d'écoulement de $Kc = 0.1$ et $Re = 40$ . . . . .	45
3.6	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de très faibles déplacements. Configuration d'écoulement de $Kc = 0.01$ et $Re = 40$ . . . . .	46
3.7	Configurations d'écoulements pour des ordres de grandeurs de déplacements intermédiaire ( $Kc = 1$ ). . . . .	46
3.8	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de faible déplacement à $t = 19.37$ . Configuration d'écoulement de $Kc = 1$ et $Re = 250$ . . . . .	47
3.9	Forces exercées par le fluide sur les tubes du faisceau pour un régime symétrique intermédiaire ( $Kc = 1$ ). L'effet du $Re$ est représenté avec des valeurs croissantes à chaque périodes d'oscillations. . . . .	47
3.10	Configuration de grands déplacements pour des $Re$ faibles. . . . .	48
3.11	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un grand déplacement à faible $Re$ . Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 40$ . . . . .	48
3.12	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un grand déplacement à faible $Re$ . Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 40$ . . . . .	49
3.13	Vorticité du champ de vitesse fluide au cours d'une demi-oscillation de faisceau. . . . .	49
3.14	Configurations d'écoulement à $Re$ modérés et pour des grands déplacement de faisceau. . . . .	50
3.15	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 100$ . . . . .	51
3.16	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 100$ . . . . .	51
3.17	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 100$ . . . . .	51
3.18	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 200$ . . . . .	53
3.19	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 200$ . . . . .	53
3.20	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 200$ . . . . .	53
3.21	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 250$ . . . . .	54
3.22	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 250$ . . . . .	54
3.23	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 250$ . . . . .	54

3.24	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 250$ . . . . .	55
3.25	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 250$ . . . . .	55
3.26	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 250$ . . . . .	55
3.27	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 500$ . . . . .	56
3.28	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 500$ . . . . .	56
3.29	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 5$ et $Re = 500$ . . . . .	56
3.30	Vorticité du champ de vitesse fluide pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 500$ . . . . .	57
3.31	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 500$ . . . . .	57
3.32	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau pour un cas de grands déplacements à $Re$ modéré. Configuration d'écoulement de $Kc = 10$ et $Re = 500$ . . . . .	57
4.1	Faisceau de $N$ tubes immergés dans un fluide initialement au repos. . . . .	60
4.2	Cellule élémentaire du système à homogénéiser. . . . .	60
4.3	Système masse ressort représentant un cylindre du faisceau soumis aux forces exercées par le fluide ainsi qu'à une sollicitation externe. . . . .	61
4.4	Problème cellulaire portant sur les vecteurs $\chi$ . . . . .	64
4.5	Cas d'étude à solution analytique étudié dans [27]. . . . .	67
4.6	Faisceau de 100 tubes confiné dans une cuve rigide et soumis à une sollicitation externe. . . . .	75
4.7	Comparaison des maillages employés pour la résolution du cas d'application. Figures extraites de [58]. . . . .	76
4.8	Masses modales cumulées $\left(\sum_n \mu_n\right)$ et nombres de modes cumulés ( $N_n$ ) en fonction de la fréquence réduite $\beta_n$ issus de l'analyse modale du système basé sur les équations d'Euler linéarisées et du modèle homogénéisé. Figure extraite de [58]. . . . .	77
4.9	Accélération de la sollicitation sismique imposée. Figure extraite de [58]. . . . .	78
4.10	Comparaison du déplacement du tube A soumis à la sollicitation sismique calculé par la résolution des équations d'Euler linéarisées (—), par le modèle homogénéisé (—) et dans le vide (- - -). Figure extraite de [58]. . . . .	78
5.1	Faisceau de $N$ tubes immergé dans un fluide initialement au repos. . . . .	82
5.2	Système masse ressort représentant un cylindre du faisceau soumis aux forces exercées par le fluide ainsi qu'à une sollicitation externe. . . . .	82
5.3	Domaine d'intégration $\omega$ constitué d'une phase fluide $\omega_F$ et d'une phase solide $\omega_S$ . . . . .	83

5.4	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches. . . . .	90
5.5	Forces de trainée exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches. . . . .	91
5.6	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches. . . . .	92
5.7	Forces de portance exercées par le fluide sur le faisceau et moyennée sur 4 ou 9 tubes proches. . . . .	93
5.8	Domaine de validité de l'approximation des coefficients (5.25) proposée par Wang [62] dans le plan $Kc-Re$ considéré. . . . .	95
5.9	Variation du coefficient de trainée $C_x$ de la force exercée par un écoulement uniforme sur un cylindre en fonction du $Re$ [35, 17]. La plage de $Re$ étudié dans nos travaux est tracée en rouge. . . . .	96
5.10	Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée $C_m$ pour différentes configuration de $Kc-Re$ . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau $5 \times 5$ et -●- pour un cylindre isolé), à la valeur issue de l'analyse dans le cadres des équations d'Euler linéarisées (●), ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●). . . . .	100
5.11	Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée $C_d$ pour différentes configuration de $Kc-Re$ . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau $5 \times 5$ et -●- pour un cylindre isolé), à la valeur issue des développements asymptotiques de Wang [62] (●) ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●). . . . .	103
5.12	Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée $C_d$ pour différentes configuration de $Kc-Re$ à grands $Kc$ . Les valeurs calculées dans ces travaux (-●-) sont représentées et comparées aux valeurs calculées numériquement issues de [24](-●- pour un faisceau $5 \times 5$ et -●- pour un cylindre isolé) ainsi qu'aux valeurs numériques de [6] (●) et expérimentales de [53] (●). . . . .	104
5.13	Évaluation de la composante dans l'axe du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 1 à différents nombre de Reynolds. . . . .	106
5.14	Évaluation de la composante dans l'axe du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 5 à différents nombre de Reynolds. . . . .	106
5.15	Évaluation de la composante dans l'axe du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 10 à différents nombre de Reynolds. . . . .	107
5.16	Évaluation de la composante transverse du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 1 à différents nombre de Reynolds. . . . .	108
5.17	Évaluation de la composante transverse du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 5 à différents nombre de Reynolds. . . . .	108
5.18	Évaluation de la composante transverse du terme <b>err</b> pour un $Kc$ de 10 à différents nombre de Reynolds. . . . .	109
5.19	Schéma de couplage entre les sous-systèmes fluide et structure du modèle homogénéisé. . . . .	111
5.20	Géométrie du cas test de lâcher de faisceau rigide. Le faisceau est initialement écarté de sa position d'équilibre (représentée par les cercles en pointillés). . . . .	113
5.21	Géométrie du système homogénéisé équivalent. . . . .	113

5.22	Cas de lâcher d'un faisceau rigide semi-confiné dans une cuve de fluide. Le déplacement au cours des premiers temps issu du calcul CFD (—) est comparé au déplacement issu du modèle homogénéisé pour un $C_d = 2$ et un $C_m = 2$ (—). La réponse dans le vide d'un oscillateur non amorti est également représentée (—).	114
5.23	Cas de lâcher d'un faisceau rigide semi-confiné dans une cuve de fluide. Le déplacement au cours des premiers temps issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_d = 2$ et des $C_m$ variant de 1.5 à 3.5 (—).	115
5.24	Cas de lâcher d'un faisceau rigide semi-confiné dans un cuve de fluide. Le déplacement issue du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—).	116
5.25	Accélération de la première sollicitation externe (faible).	117
5.26	Accélération de la seconde sollicitation externe (forte).	118
5.27	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et un $C_d = 2$ (—) ainsi qu'au déplacement d'un oscillateur non amorti soumis à cette sollicitation (—).	118
5.28	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—).	119
5.29	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. La transformée de Fourier de l'accélération issue du calcul CFD (—) est comparé à celles issues du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—) ainsi qu'à la transformée de Fourier de l'accélération d'un oscillateur non amorti (—).	120
5.30	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe faible. L'énergie échangée entre la structure et le fluide issue du calcul CFD (—) est comparée à celles issues du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—).	120
5.31	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Vorticité de l'écoulement fluide au temps $t = 8.5$ .	121
5.32	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et un $C_d = 3$ (—) ainsi qu'au déplacement d'un oscillateur non amorti soumis à cette sollicitation (—).	122
5.33	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Le déplacement issu du calcul CFD (—) est comparé aux déplacements issus du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—).	123
5.34	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. La transformée de Fourier de l'accélération issu du calcul CFD (—) est comparé à celles issues du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—) ainsi qu'à la transformée de Fourier de l'accélération d'un oscillateur non amorti (—).	124

5.35	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. L'énergie échangée entre la structure et le fluide issue du calcul CFD (—) est comparée à celles issues du modèle homogénéisé pour un $C_m = 2$ et des $C_d$ variant de 1 à 5 (—). . . . .	124
5.36	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des champs de pression fluide et homogénéisé à $t = 8$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à $C_m = 2$ et $C_d = 3$ . . . . .	125
5.37	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des normes de vitesses fluide et homogénéisé à $t = 8.5$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à $C_m = 2$ et $C_d = 3$ . . . . .	126
5.38	Faisceau semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Comparaison des champs de vitesses fluide et homogénéisé à $t = 8.5$ . Les paramètres du modèle homogénéisé ont été pris à $C_m = 2$ et $C_d = 3$ . . . . .	127
6.1	Faisceau non rigide semi-confiné dans une cuve de fluide soumis à une sollicitation externe forte. Norme de la vitesse de Darcy et champ de vecteur déplacement de la structure à $t = 9.25$ . Les paramètres du modèle ont été pris à $C_m = 2$ et $C_d = 3$ . . . . .	131

# Liste des tableaux

2.1	Estimation de l'épaisseur de la couche en fonction de la configuration de $Kc-Re$ . . . . .	34
5.1	Valeurs calculées du coefficient de masse ajoutée $C_m$ pour différentes configurations de $Kc-Re$ . . . . .	100
5.2	Valeurs calculées du coefficient d'amortissement $C_d$ pour différentes configurations de $Kc-Re$ . . . . .	102
5.3	Pseudo-périodes, baisses de fréquence et taux d'amortissements observées pour différentes valeurs de $C_m$ . . . . .	115
5.4	Pseudo-périodes, baisses de fréquence et taux d'amortissements observées pour différentes valeurs de $C_d$ . . . . .	116



# Bibliographie

- [1] *Documentation en ligne du code CAST3M.*
- [2] Les clefs cea n° 55 - les systèmes nucléaires du futur, 2007.
- [3] Les défis du cea, n°172, 2012.
- [4] G. ALLAIRE : Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [5] Hong-wei AN, Liang CHENG, Ming ZHAO et Guo-hai DONG : Numerical simulation of the oscillatory flow around two cylinders in tandem. *Journal of Hydrodynamics*, 18(3, Supplement):191 – 197, 2006. Proceedings of the Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics.
- [6] P. ANAGNOSTOPOULOS et Ch. DIKAROU : Numerical simulation of viscous oscillatory flow past four cylinders in square arrangement. *Journal of Fluids and Structures*, 27(2):212 – 232, 2011.
- [7] P. ANAGNOSTOPOULOS et G. ILIADIS : Numerical study of the flow pattern and the in-line response of a flexible cylinder in an oscillating stream. *Journal of Fluids and Structures*, 12(3):225 – 258, 1998.
- [8] E. ARQUIS et J. P. CALTAGIRONE : Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide-milieux poreux : application à la convection naturelle. *In Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, volume 299 de *Série II*, pages 1–4, Paris, 1984.
- [9] François AXISA : *Modélisation des systèmes mécaniques - Tome 3 : Interactions Fluide-Structure*. Hermes Science Publications, 2001.
- [10] Mejdî AZAÏEZ, Michel DEVILLE et Ernest MUND : *Éléments finis pour les fluides incompressibles*. PPUR, 2011.
- [11] Mustapha BENAOUICHA : *Contribution au développement d’algorithmes de couplage en interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2007.
- [12] D. BERGMAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, F. MURAT, L. TARTAR et E. SACHEZ-PALENCIA : *Les méthodes de l’homogénéisation : théorie et applications en physique*. Collection de la Direction des études et recherches d’Électricité de France. Eyrolles, 1985.
- [13] Daniel BROU : Comportement sismique des cœurs rep : éléments pour une synthèse des connaissances. Rapport technique RT/06-007/A, 2006.
- [14] Daniel BROU, Jean-Claude QUEVAL et Emmanuel VIALLET : Seismic behaviour of a pwr reactor core : fluid structure interaction effects. 2003.
- [15] Daniel BROU et Jean-François SIGRIST : Interaction fluide structure pour des faisceaux de tubes : Méthodes d’homogénéisation, analyse physique. *Mechanics & Industry*, 10(02):103–108, 2009.

- [16] B.S. CARMO et J.R. MENEHINI : Numerical investigation of the flow around two circular cylinders in tandem. *Journal of Fluids and Structures*, 22:979 – 988, 2006. Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations.
- [17] P. CHASSAING : *Turbulence en mécanique des fluides - Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. CÉPADUÈS-ÉDITIONS, collection POLYTECH, 2000.
- [18] K. CHEVAL : *Modélisation du comportement sismique de structures multitubulaires baignées par un fluide dense*. Thèse de doctorat, Université d'Évry, 2000.
- [19] C. CONCA, J. PLANCHARD, B. THOMAS et M VANNINATHAN : *Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure*. Collection de la Direction des études et recherches d'Électricité de France. Eyrolles, 1994.
- [20] G. de MARSILY : *Hydrogéologie quantitative*. Collection Sciences de la terre. Masson, 1981.
- [21] M.V.G. de MORAIS, F. BAJ, R.-J. GIBERT et J.-P. MAGNAUD : Numerical inertia and damping coefficients determination of a tube-bundle in incompressible viscous laminar fluid. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 4(3), 2007.
- [22] Ch. DIKAROU : *Numerical simulation of oscillatory flow past an arrangement of four cylinders*. Thèse de doctorat, Aristote University of Thessaloniki, 2010.
- [23] J. DONEA, A. HUERTA, Ponthot J.-PH. et A. RODRÍGUEZ-FERRAN : *Encyclopedia of Computational Mechanics, Edited by Erwin Stein, René de Borst and Thomas J.R.Hughes. Volume 1 Fundamentals. Chapitre 14 : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. John Wiley and Sons, 2004.
- [24] Marion DUCLERCQ : *Étude de l'interaction entre un fluide et une structure oscillante : régimes d'écoulement et de forces, du cylindre isolé au réseau de cylindres*. Thèse de doctorat, École doctorale de l'École Polytechnique, 2010.
- [25] Charbel FARHAT, Michel LESOINNE et Nathan MAMAN : Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21(10):807–835, 1995.
- [26] Miguel Angel FERNANDEZ VARELA : *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine - UFR Mathématiques de la décision, 2001.
- [27] R.J. FRITZ : The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids. *Journal of Engineering for Industry*, pages 167–173, 1972.
- [28] René-Jean GIBERT : *Vibrations des structures - Interaction avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires*. Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 1988.
- [29] R. A. GINGOLD et J. J. MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, novembre 1977.
- [30] Roland GLOWINSKI, Tsorng-Whay PAN et Jacques PERIAUX : A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 112:133 – 148, 1994.
- [31] Stephane GOUNAND : Rapport technique, Cours ENSTA, 2012.

- [32] J.L. GUERMOND, P. MINEV et Jie SHEN : An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44 ?47):6011 – 6045, 2006.
- [33] Philip HALL : On the stability of the unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 146:347–367, 1984.
- [34] Lofti HAMMAMI : *Contribution à l'étude de l'interaction fluide-structure dans les faisceaux de tubes par une technique d'homogénéisation*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1990.
- [35] P. HÉMON : *Vibrations des structures couplées avec le vent*. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [36] H. HONJI : Streaked flow around an oscillating circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 107:509–520, 1981.
- [37] Thomas J.R. HUGHES, Wing Kam LIU et Thomas K. ZIMMERMANN : Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29(3):329 – 349, 1981.
- [38] G. ILIADIS et P. ANAGNOSTOPOULOS : Viscous oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and frequency parameters. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26:403–442, février 1998.
- [39] Eric JACQUELIN : *Comportement sous sollicitation dynamiques de cœurs de réacteurs à eau pressurisée*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, 1994.
- [40] K. LAM et L. ZOU : Three-dimensional numerical simulations of cross-flow around four cylinders in an in-line square configuration. *Journal of Fluids and Structures*, 26(3):482 – 502, 2010.
- [41] Md. MAHBUB ALAM, M. MORIYA, K. TAKAI et M. SAKAMOTO : Fluctuating fluid forces acting on two circular cylinders in a tandem arrangement at a subcritical reynolds number. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 91:139 – 154, 2003. Fifth Asia-Pacific Conference on Wind Engineering.
- [42] B. MAURY : Direct simulations of 2d fluid-particle flows in biperiodic domains. *J. Comput. Phys.*, 156(2):325–351, dec 1999.
- [43] Vincent MELOT : *Hydrodynamique instationnaire d'un cylindre sous choc*. Thèse de doctorat, École Doctorale de l'Université de Nantes, 2006.
- [44] Laurent MONASSE : *Analyse d'une méthode de couplage entre un fluide compressible et une structure déformable*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2011.
- [45] J.R. MORISON, Berkeley. Institute of Engineering Research University of CALIFORNIA et United States. Office of NAVAL RESEARCH : *The Force Distribution Exerted by Surface Waves on Piles*. Technical report ser. 3. University of California, Institute of Engineering Research, 1953.
- [46] D. NEHARI, V. ARMENIO et F. BALLIO : Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low keulegan ?carpenter and beta numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 520:157–186, 2004.
- [47] C. S. PESKIN : *Flow patterns around heart valves : A digital computer method for solving the equations of motion*. Thèse de doctorat, Albert Einstein College of Medecine, 1972.
- [48] S. PILARSKI : *Étude du potentiel de concepts innovants de réacteurs à neutrons rapide (RNR) vis-à-vis des exigences du développement durable*. Thèse de doctorat, Université Paris XI - UFR scientifique d'Orsay, 2008.

- [49] Serge PIPERNO : *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, École doctorale de l'École nationale des ponts et chaussées, 1995.
- [50] Serge PIPERNO : Interactions fluide-structure. Rapport technique, Master de Mécanique Numérique - École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005-2006.
- [51] Serge PIPERNO et Charbel FARHAT : Design and evaluation of staggered partitioned procedures for fluid-structure interaction simulations. Rapport technique, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1997.
- [52] Guillaume RICCIARDI : *Une approche milieu poreux pour la modélisation de l'interaction fluide-structure des assemblages combustibles dans un cœur de réacteur à eau pressurisée : Simulation et expérimentation*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, 2008.
- [53] T. SARPKEYA : *In-line and Transverse Forces on Smooth and Sand-roughened Cylinders in Oscillatory Flow at High Reynolds Numbers*. Naval Postgraduate School, 1976.
- [54] T. SARPKEYA : Hydrodynamic damping and quasi-coherent structures at large stokes numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 15(7):909 – 928, 2001.
- [55] T. SARPKEYA : On the force decompositions of lighthill and morison. *Journal of Fluids and Structures*, 15(2):227 – 233, 2001.
- [56] K. SCHNEIDER et M. FARGE : Numerical simulation of the transient flow behaviour in tube bundles using a volume penalization method. *Journal of Fluids and Structures*, 20(4):555 – 566, 2005.
- [57] Y. SHINOHARA et T. SHIMOGO : Vibrations of square and hexagonal cylinders in a liquid. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 103:233 – 239, 1981.
- [58] Jean-François SIGRIST et Daniel BROU : Dynamic analysis of a tube bundle with fluid-structure interaction modelling using a homogenisation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9-12):1080 – 1099, 2008.
- [59] M. TATSUNO et P. W. BEARMAN : A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low keulegan-carpenter numbers and low stokes numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 211:157–182, 1990.
- [60] B. UZUNOGLU, M. TAN et W. G. PRICE : Low-reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder using a cell viscousboundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(10):2317–2338, 2001.
- [61] C. VUIK et A. SEGAL : Iterative solution methods and finite element methods for the incompressible navier-stokes equations. Rapport technique, Delft University of Technology - Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science - Delft Institute of Applied Mathematics, 2011.
- [62] Chang-Yi WANG : On high-frequency oscillatory viscous flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 32:55–68, 1968.
- [63] S. WHITAKER : *The Method of Volume Averaging*. Theory and Applications of Transport in Porous Media. Springer, 1998.
- [64] C. H. K. WILLIAMSON : Sinusoidal flow relative to circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 155:141–174, 1985.



## Résumé

Dans l'industrie nucléaire on rencontre fréquemment des problématiques mettant en jeu des faisceaux de tubes immergés dans un fluide. Les problématiques de sûreté nucléaire font que les comportements de ces systèmes sous sollicitation sismique doivent être maîtrisés. Les systèmes de type faisceau de tubes en présence de fluide voient leur comportement vibratoire modifié. Par leurs géométries complexes, la simulation numérique de ces systèmes nécessite des temps de calculs extrêmement importants. Afin de surmonter ce problème, des modèles homogénéisés ont été mis en place. Ces modèles sont basés sur les équations d'Euler linéarisées pour le fluide. Cependant ils ne prennent en compte que les effets inertiels, et supposent des très petits déplacements de structures. Pour y remédier, on développe donc de nouveaux modèles à partir des équations de Navier-Stokes.

Cette thèse porte sur la mise en place d'un modèle homogénéisé de la vibration d'un faisceau de tubes immergé dans du fluide. Le fluide est visqueux et les mouvements de structure sont importants. À partir d'une méthode de prise de moyenne, on établit un modèle homogénéisé se basant sur la notion de vitesse de Darcy. Le modèle obtenu dépend de deux paramètres : Le coefficient de masse ajoutée  $C_m$  et le coefficient dissipatif  $C_d$ . Ces coefficients représentent les effets inertiels et dissipatifs du fluide sans avoir à décrire explicitement les écoulements à l'échelle locale.

## Mots-clefs

Homogénéisation, faisceau de tubes oscillant, interaction fluide-structure, effet de masse ajoutée, formule de Morison, équations de Navier-Stokes, éléments finis.

---

## Homogenization method for the vibration of tube bundle in a fluid

## Abstract

In the nuclear industry, for problematic of nuclear safety, the behaviour of fluid assemblies in the nuclear core or steam generator submitted to seismic solicitation must be controlled. It has been widely pointed out that the surrounding fluid significantly affect their behaviours. Due to their complex geometry numerical simulations of such systems could lead to very huge sizes and times of calculation. To solve these problems, homogenized models have been build. These models have been developed based on the linearised Euler equations for the fluid. However, only inertial effects and small structure displacement are taken into account. In order to build more accurate homogenized models, they have to be based on Navier-Stokes equations.

The purpose of this thesis is to build an homogenized model for the vibration of tube bundle in a fluid. Viscosity of the fluid and large structure displacement are taken into account. The homogenized model is based on the Darcy velocity notion. Added mass and viscous related coefficients are used to parametrize the model. These coefficients represent the inertial and dissipative effects without describing the local scale flow.

## Keywords

Homogenization, oscillating tube bundle, fluid-structure interaction, added masse effect, Morison formula, Navier-Stokes equations, finite element method.