Condition non associée

Rappel :

Traitement des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.

$\sum \alpha_i q_i = \beta$

On veut résoudre :

$\min\{q \in V_r\}\left(\frac{1}{2} q^t K q - q^t F\right)$ Energie potentielle totale

$V_r = \{q : Aq = b\}$ sur $\partial\Omega_1$ Déplacements admissibles satisfaisant les conditions

La condition de minimisation s'écrit :

$dq^t K q - dq^t F = 0$

On introduit les forces F_l telles que :

$$F + F_l = Kq$$

La condition de minimisation devient :

$$dq^t F_l = 0$$

Or :

$$Adq = 0$$

F_l est donc de la forme :

$$F_l = A^t \lambda$$

On ajoute aux déplacements les forces de liaisons λ

On cherche maintenant l'extremum de :

$$\Omega' \qquad \frac{1}{2} q^t K q - q^t F + \lambda^t (Aq - b)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial q} = 0 \qquad Kq - F + A^t \lambda = 0 \qquad \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda} = 0 \qquad Aq = b$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

On résout le système matriciel total :

$$\begin{pmatrix} K & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ b \end{pmatrix}$$

La solution vérifie trivialement les conditions.

La condition est associée car les forces de réactions $A^t\,\lambda$ sont duales de la condition Aq

On veut maintenant résoudre :

$Kq = F + \lambda G^t$
Sous la contrainte :
$Aq = B$

En s'inspirant de la formulation associée, on adjoint λ aux inconnues du problème.
Le système devient donc :

$$\begin{pmatrix} K & -G^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ b \end{pmatrix}$$

Le système n'est plus symétrique. C'est inévitable car il n'est pas conservatif.
La relation n'est pas associée car la réaction n'est plus duale de la condition.

Interprétation physique :

Dans une relation associée, la vérification de la relation est assurée par l'introduction de forces de liaison, qu'on appelle réactions. La minimisation de l'énergie mécanique du système impose la forme de la réaction. C'est la transposée de la relation à un coefficient (multiplicateur de Lagrange) près.

Dans une relation non associée, les forces de liaison sont proportionnelles à un vecteur arbitraire mais servent de la même façon à vérifier la relation.

Application au pilotage : on définit une relation non associée dont la partie primale est la condition à vérifier et la partie duale le vecteur force de contrôle. Dans Cast3M, c'est une raideur. On l'ajoute à la raideur mécanique du système puis on résout le problème global. Le multiplicateur λ de la force de contrôle est directement solution du problème.