

Non linéarités liées à la thermique

- Thermomécanique
- Thermique
- Conditions aux limites
- Rayonnement
- Changement de phase

Thermomécanique

- Couplage faible entre la thermique et la mécanique : calculs à champs de température imposés
- Influence de la température sur le comportement
- Équilibre : $F = B\sigma$
- Comportement : $\sigma = C(\varepsilon, T, p, \dots)$
 ε déformations, T température, p écrouissage

Influence de la température

- Différentiations σ

$$d\sigma = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial C}{\partial T} dT + \frac{\partial C}{\partial p} dp + \dots$$

- Il y a un terme d'origine thermique dans le calcul de la contrainte

- Dilatation libre \rightarrow

$$d\varepsilon = - \frac{\frac{\partial C}{\partial T} dT + \frac{\partial C}{\partial p} dp}{\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}}$$

- Supposons p indépendant de T

Dans un essai de dilatation libre (ε constant)
 $dp=0$

Coefficient de dilatation

- Essai de dilatation libre :

$$d\varepsilon = -\frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}} dT$$

- Mesure expérimentale (sans contrainte):

$$d\varepsilon = \alpha dT$$

- Nouvelle grandeur : ε_{th}

$$d\varepsilon_{th} = \alpha dT = -\frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}} dT$$

ε thermique

- Sans thermique, p dépend de ε
- Avec thermique : $p = P(\varepsilon, T)$

$$dp = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial P}{\partial T} dT$$

- dp est nul dans un essai à contraintes constantes

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} d\varepsilon_{cc} + \frac{\partial P}{\partial T} dT = 0$$

- On écrit $d\sigma$ à l'aide de ε_{cc}

$$dp = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) \quad d\sigma = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) + \frac{\partial C}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) + \dots$$

- $\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{cc}, T, p, \dots)$

ε thermique

- On différencie ε_{cc} :

- $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{th} + \mathcal{L} \varepsilon \quad \frac{\partial \varepsilon_{cc}}{\partial \varepsilon} = \beta$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} (1 - \beta)$$

- \mathcal{L} est la variation relative de module d'Young

Cas élastique

- Pas de variation du module Young :

$$\varepsilon_{th} = \alpha \hat{\varepsilon} T$$

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th}, T)$$

- Variation du module Young :

$$\varepsilon_{Young} = \left(1 - \frac{E_f}{E_i}\right) \varepsilon$$

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_{Young}, T)$$

Cas plastique

- Écrouissage indépendant de la température :
 - $\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_{young}, T, p, \dots)$

Écrouissage dépendant de la température

$$d\sigma = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial C}{\partial T} dT + \frac{\partial C}{\partial p} dp + \dots$$

$$dp = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial P}{\partial T} dT$$

$$d\sigma = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) + \frac{\partial C}{\partial p} \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial P}{\partial T} dT \right)$$

$$d\sigma = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) + \frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} (d\varepsilon - d\varepsilon_{cc}) + \frac{\partial C}{\partial p} \left(\frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \alpha \right) dT$$

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_{Young}, T) + \dots$$

Écrouissage (2)

- Si on considère que p représente les déformations irréversibles, il y a un terme supplémentaire représentant la variation de déformation irréversible en fonction de la température (évident si on est dans le domaine élastique)

Algorithme

- Dans Cast3M, modification de l'algorithme NL général
- Calcul de $\hat{\varepsilon}_{th}$ à partir de T : $\hat{\varepsilon}_{th} = \mathcal{R} \hat{\varepsilon} T$
- Calcul de $\hat{\varepsilon}_{Young}$ à l'aide de la variation du module d'Young
- Actualisation des paramètres d'état d'après $\hat{\varepsilon} T$
- Dans la boucle de rééquilibrage
$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \langle \boxtimes \rangle_{Young}, T, p, \dots)$$
- On néglige les termes dus à la variation de p en fonction de T (si il y en a)

Thermique

- Équation de la chaleur :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \nabla(k\nabla T) = f$$

– $K(T,t)$

conductivité thermique

– $F(T,t)$

puissance calorifique volumique

– $H(T)$

Enthalpie volumique

- On écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Thermique (2)

- Galerkin :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \nu d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot k \nabla T) \nu d\Omega = \int_{\Omega} f \nu d\Omega$$

- Intégration par partie :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \nu d\Omega - \int_{\Omega} (k \nabla T \cdot \nabla \nu) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (k \nabla T) \cdot n \nu d\Gamma = \int_{\Omega} f \nu d\Omega$$

- Intégration aux nœuds :

$$C(T)\dot{T} + K(T)T = F$$

- C matrice de capacité, K matrice de conductivité

Théta-méthode

- Résolution en temps

$$\frac{1}{\Delta t} C^* (T^{n+1} - T^n) + K^* (\theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n) = F^*$$

- Δt pas de temps
- θ coefficient de relaxation $0 \leq \theta \leq 1$
- * évaluation des grandeurs avec :

$$T^* = (1-b)T^{n-1} + bT^n$$

$$t^* = (1-b)t^{n-1} + bt^n$$

- b coefficient de sous-relaxation $0 \leq b \leq 1$

Conditions aux limites

- Températures imposées : Dirichlet
 - $AT=b$
- Flux de chaleur imposé
 - q
- Convection
 - $q^c = -h (T - T_e)$
- Rayonnement
 - $q_r = -\varepsilon \downarrow (T^4 - T_e^4)$

Changement de phase

- Changement des propriétés matérielles
- Dégagement ou absorption d'énergie
- Température constante (solide-liquide) ou intervalle de température (métaux)
- Application : calcul d'abrasion : trouver la quantité de matière qui a fondu

Traitement par régularisation

- On suppose que le changement de phase s'effectue sur une plage de température $[T_{\downarrow 1} _ T_{\downarrow 2}]$
- On calcule la capacité calorifique comme la pente de la droite reliant T^n à T^{n+1} .
- On effectue le calcul avec cette capacité
- On en déduit une nouvelle valeur de T^{n+1}
- On recommence avec cette nouvelle valeur

Régularisation (2)

- La proportion de phase se déduit de la température trouvée:

$$ph = \frac{T - T_{\phi 1}}{T_{\phi 2} - T_{\phi 1}}$$

- On en déduit les propriétés matérielles (généralement par interpolation)
- Petite difficulté : les températures s'expriment aux nœuds, les propriétés matérielles sont attachées aux éléments.
- Difficulté de convergence si pas de temps trop grand et si intervalle $[T_{\zeta 1}, T_{\zeta 2}]$ trop petit.

Changement de phase dans Cast3M

- On ne régularise pas
- La courbe H en fonction de T rappelle la courbe F en fonction de u (en mécanique) dans le cas du frottement
- On applique la même méthode :
 - Changement d'inconnue (résolution d'un problème modifié) puis condition unilatérale

Algorithme

- On calcule la matrice de capacité sur l'état initial de phases en fonction de la température T: $\frac{\partial H}{\partial T} = \rho_i c_i$
- Si l'état initial correspond à la température de changement de phase T_{\downarrow} , on prend la phase vers laquelle on tend
- Il y a trois états possible déterminés par T :
 - Phase 1 pour $T < T_{\downarrow}$
 - Phase 2 pour $T > T_{\downarrow}$
 - Mélange de phases pour $T = T_{\downarrow}$
- Si il n'y a pas de changement d'état pour un point on ne fait rien

Condition unilatérale

- Si il y a un changement d'état :

- $T \odot T_{\downarrow} \rightarrow T > T_{\downarrow}$ ou $T \blacklozenge T_{\downarrow} \rightarrow T < T_{\downarrow}$

on enlève au second membre l'énergie de changement de phase au point considéré (calculée en intégrant la densité d'énergie de changement de phase des éléments adjacents et en fonction de leurs proportions de phase actuelle) et on impose une condition unilatérale limitant T au domaine d'existence de la nouvelle phase :

$$Q_{\text{mod}} = Q - Q_{\text{phase}}$$

$$T > T_{\downarrow} \quad \text{ou} \quad T < T_{\downarrow}$$

Réévaluation conductivité

On réévalue la matrice de capacité C en fonction de l'état final estimé.

On corrige également le second membre pour compenser l'utilisation de la capacité de la mauvaise phase entre la température initiale T_1 et T_{\downarrow} :

$$q_{\text{mod}} = q + (C_1 - C_2)(T_1 - T_{\downarrow})$$

- On itère pour obtenir un nouveau champ de températures
- On vérifie si les états ont évolué et, à l'aide des réactions sur les conditions, si les prédictions sur les directions de changement d'état sont correctes

Vérification direction

- L'énergie consommé en un point par le champ de phase est bornée :
 - $0 \leq q_{\text{consommé}} \leq q_{\text{phase}}$
 - $q_{\text{consommé}} = q_{\text{phase}} \cdot \text{reaction}$
- Si la réaction a le mauvais signe, la prédiction sur la direction du changement de phase est mauvaise, il faut appliquer l'énergie correspondant au changement vers l'autre phase et mettre la condition unilatérale dans l'autre sens (cas où le point initial est déjà un mélange de phases)

Convergence

- Si les états (phase) n'évoluent plus et les énergies consommées sont compatibles avec les énergies de changement de phase, on a convergé
- Itération sur états discrets en nombre fini
- On obtient en résultat les températures finales et les énergies consommées par changement de phase aux nœuds

Proportions de phase

- Les énergies de changement de phase sont connues aux nœuds.
- Il faut en déduire les évolutions de proportion de phase dans les éléments.
- On consomme cette énergie dans l'élément le plus proche de la phase finale (on cherche à localiser un front de changement de phase)

Changement de phase (conclusion)

- Méthode originale
- Utilisation d'opérateurs existant développés pour le frottement
- Pas de problème de convergence si la capacité ne change pas entre les phases
- Grand pas de chargement possible
- Nécessité considérations physiques pour repasser aux proportions de phase dans les éléments