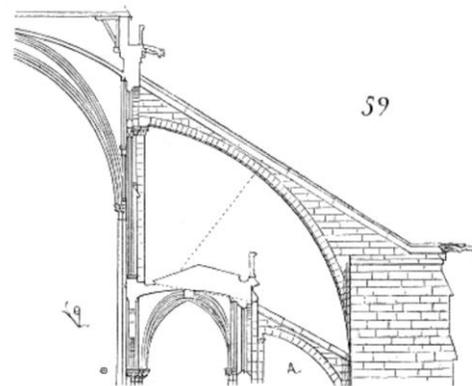


Calcul des voûtes de Notre-Dame de Paris

Club Cast3M – 25 novembre 2022

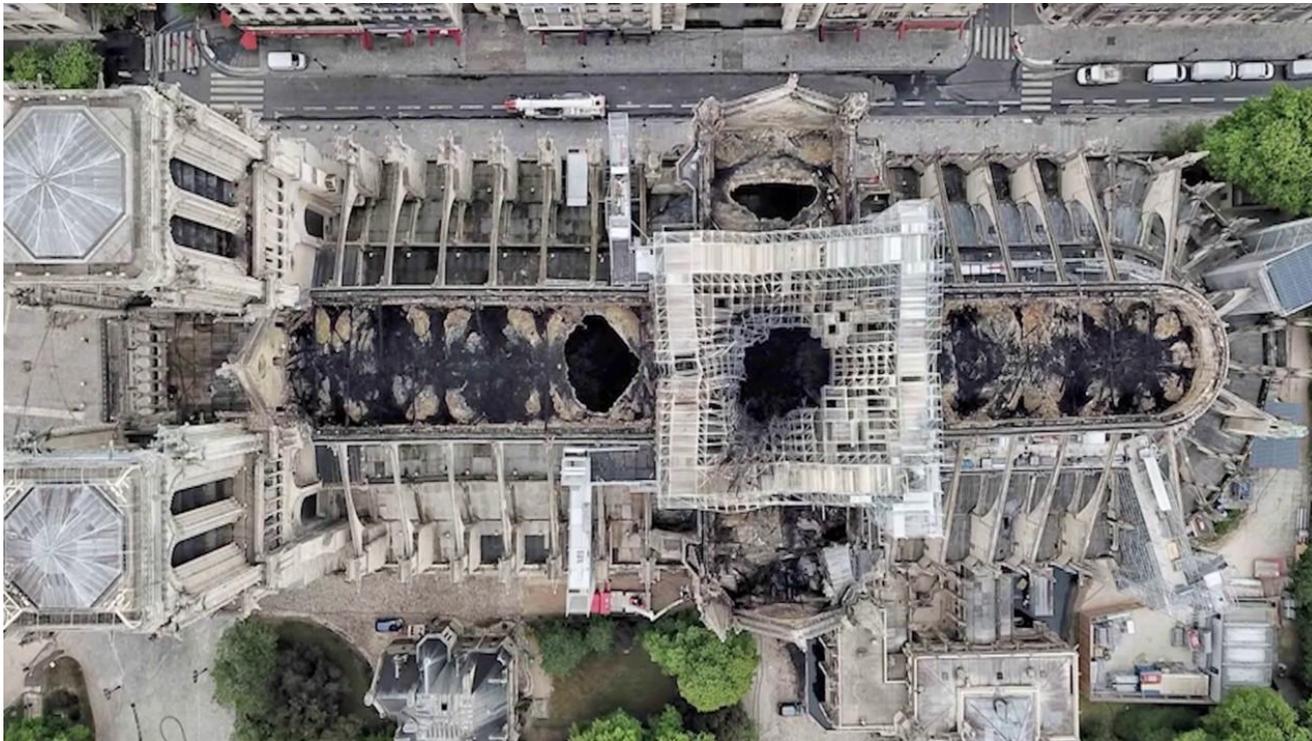
Paul NOUGAYREDE paul.nougayrede@paris-malaquais.archi.fr

Maurizio BROCATO maurizio.brocato@paris-malaquais.archi.fr



Contexte de l'étude

Comment évaluer la réserve de stabilité des voûtes en maçonnerie de la cathédrale avant et après l'incendie ?



Quelques problématiques :

- Répondre à l'urgence : temporalité du chantier très resserrée
- Intervention patrimoniale : absence de cas de charges normalisés ; nécessité de formuler rapidement des propositions pour la modélisation de l'incendie, des chargements horizontaux...
- Mission d'Assistance à la Maîtrise d'Œuvre : préconisations majoritairement qualitatives plutôt que strictement quantitatives

Contexte de l'étude

Benchmark : 3 modélisations mécaniques différentes réalisées dans 3 laboratoires différents
(LMDC Toulouse, LMGC Montpellier et GSA Paris)



Modèle continu éléments finis
Homogénéisation avec endommagement
Code_Aster



Modèle blocs à blocs éléments discrets
Contact dynamique adoucissant aux interfaces
LMGC90



Modèle blocs à blocs éléments finis
Joints de Mohr Coulomb
Cast3M 2021

Avantages :

- Mise en commun des savoir-faire de chaque laboratoire quand à la modélisation des structures en maçonnerie : génération de la géométrie initiale, méthodes de convergence, post-traitement...
- Convergence de résultats indépendants : permet de se "rassurer", d'établir des marges d'erreur
- Profiter des différentes caractéristiques propres à chaque modélisation : rapidité d'exécution, précision, types de résultats...

Sommaire

1. Géométrie et maillage
Compatibilité des interfaces
2. Structure sous poids propre et incendie
"Viscosité numérique" et précision
3. Déplacements des appuis
Points de fonctionnement

1. Géométrie et maillage

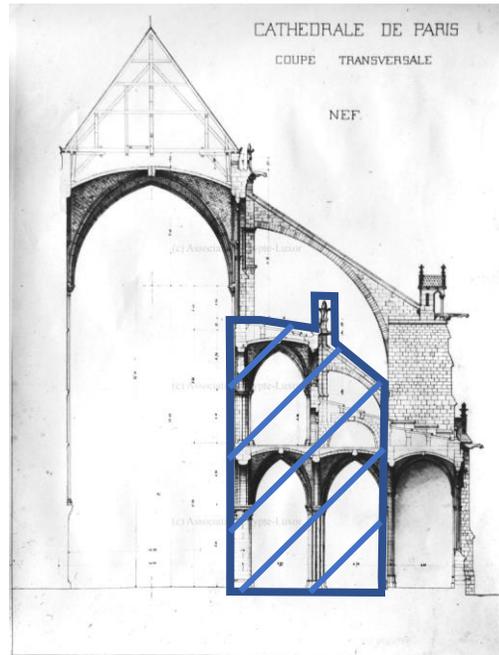
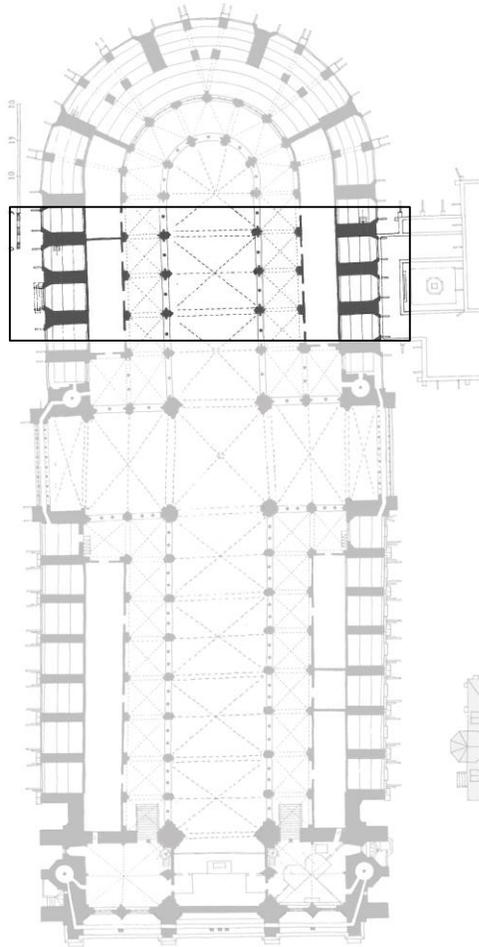
Compatibilité des interfaces

1. Géométrie et maillage

Compatibilité des interfaces

La voûte du chœur :

Non prise en compte de la partie inférieure du mur gouttereau

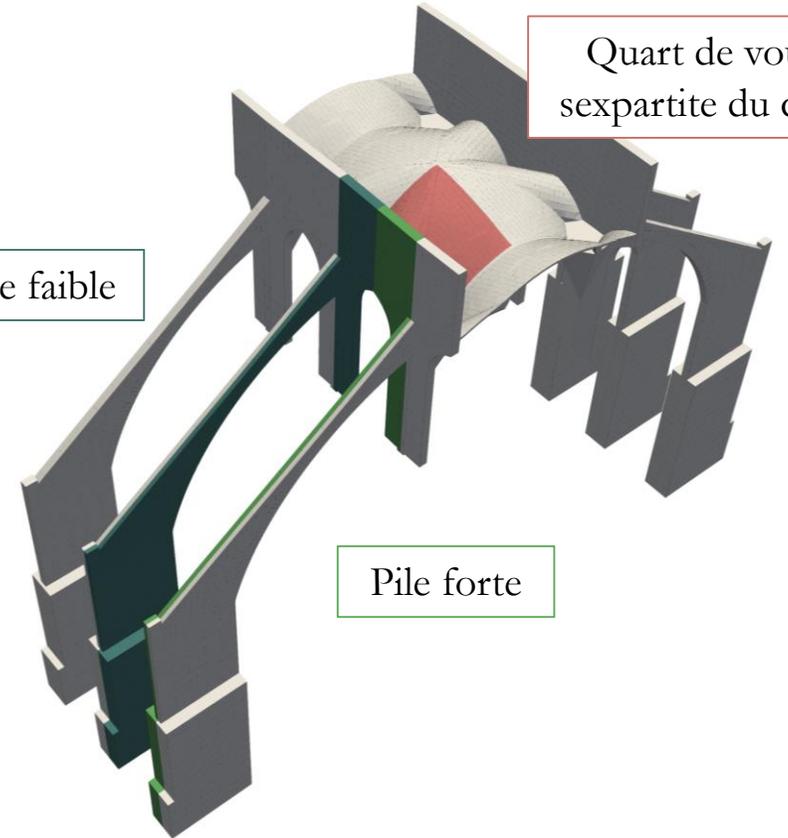


Symétries sur un quart de la travée

Quart de voûte sexpartite du cœur

Pile faible

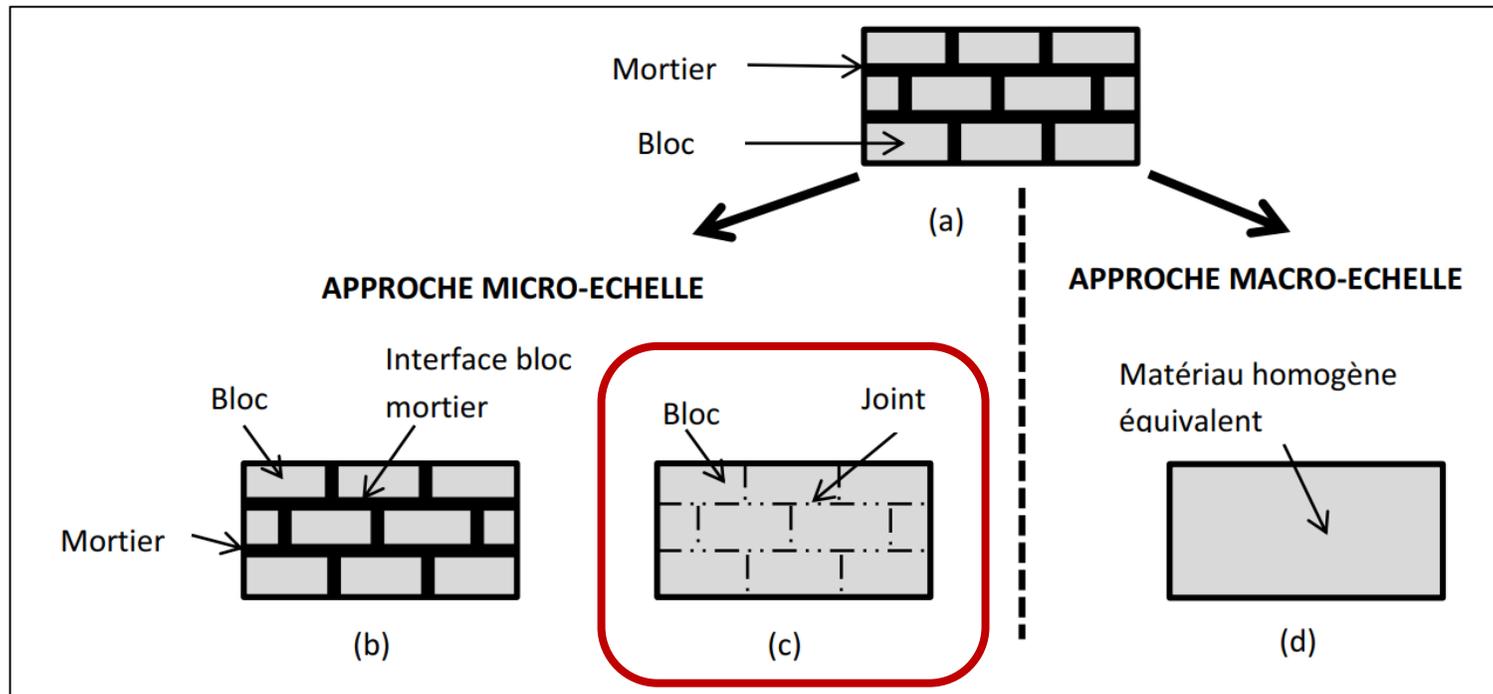
Pile forte



1. Géométrie et maillage

Compatibilité des interfaces

Le matériau "maçonnerie" : les différentes approches



Blocs de pierre 3D maillés en TET4 :
modèle isotrope élastique

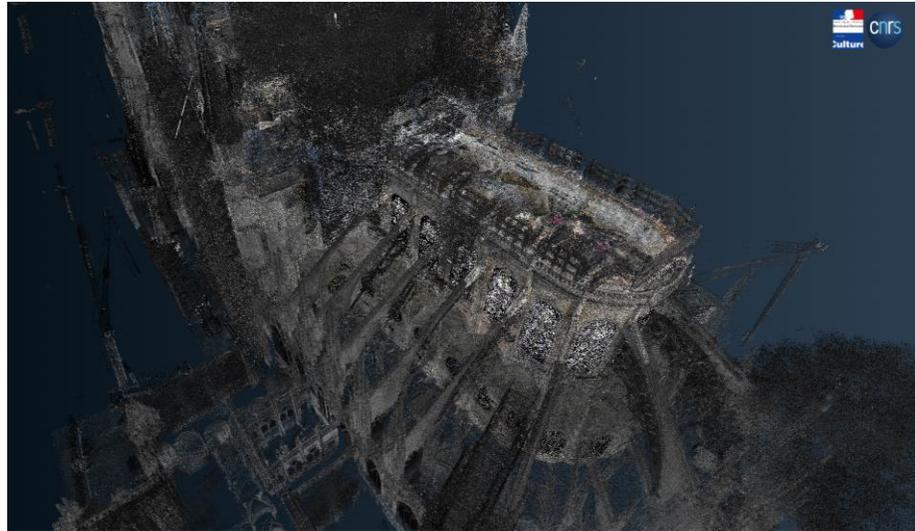
Joints de mortier 2D maillés en JOT3 :
modèle isotrope élastique plastique "joints
Coulomb" (modèle Cast3M de joint dilatant
avec critère de Mohr-Coulomb et écoulement
associé)

Tiré de Parent, 2015

1. Géométrie et maillage

Compatibilité des interfaces

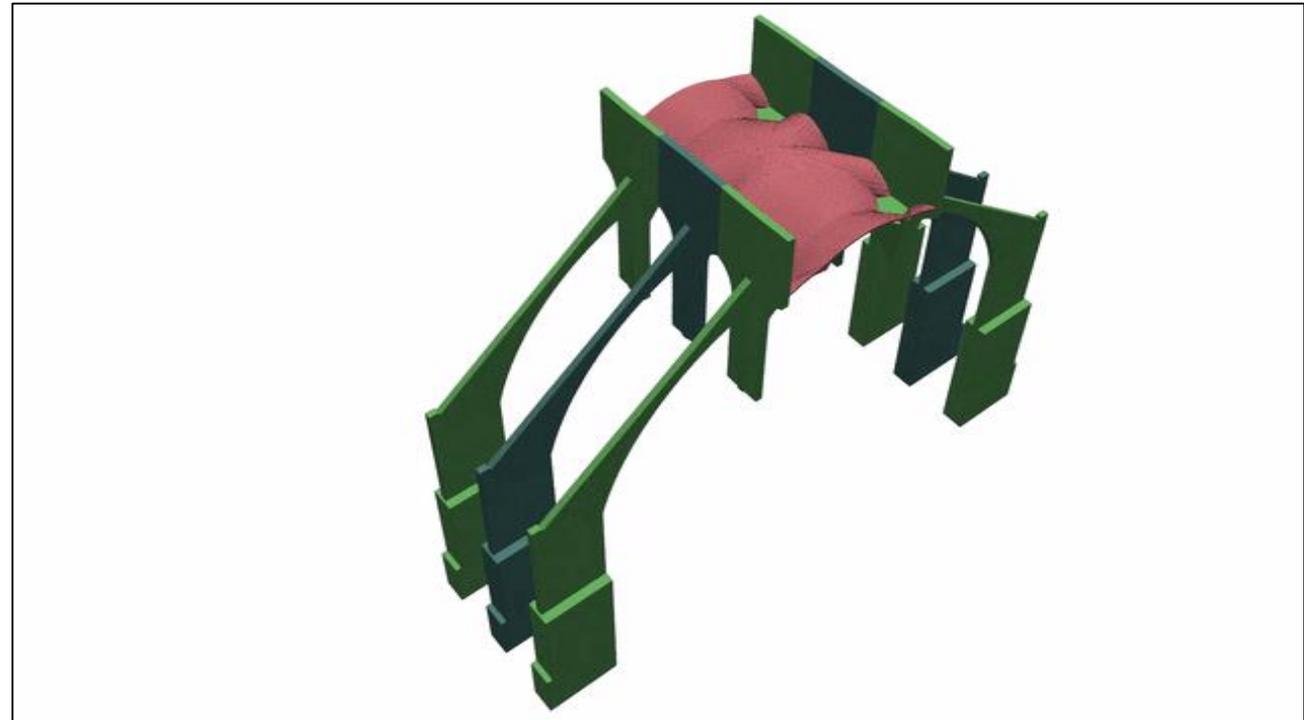
Procédure (i) : nuage de point → géométrie bloc à bloc type "MAP"



Réalisée par le laboratoire MAP Marseille



Géométrie bloc à bloc fournie sous forme d'un fichier Rhinocéros contenant le volume global découpé en blocs



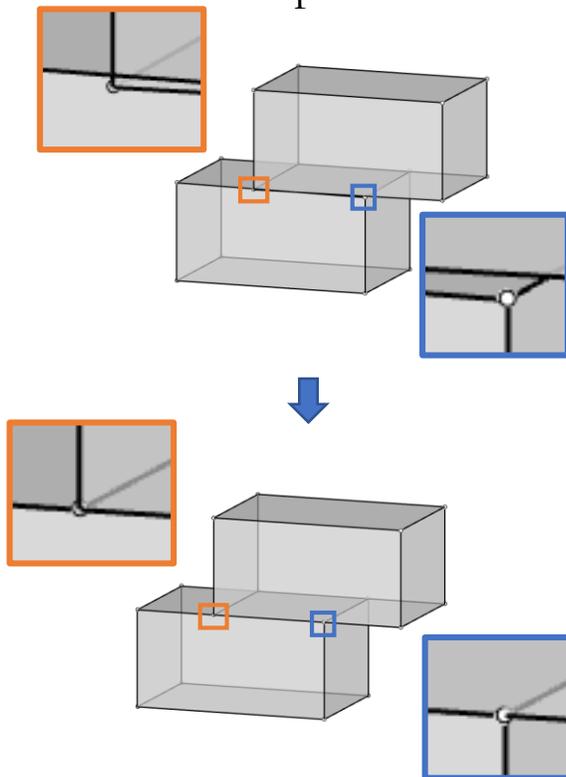
Problème : ces volumes sont peu propices à la génération des éléments joints 2D JOT3 (avec la procédure GENJ)

1. Géométrie et maillage

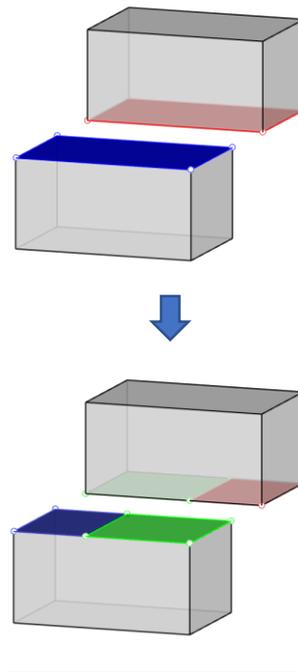
Compatibilité des interfaces

Procédure (ii) : géométrie bloc à bloc type "MAP" → géométrie bloc à bloc avec interfaces compatibles
Codée dans un programme Python pour Rhinocéros : fonctionne pour tout type de géométrie bloc à bloc type "MAP" quelconque

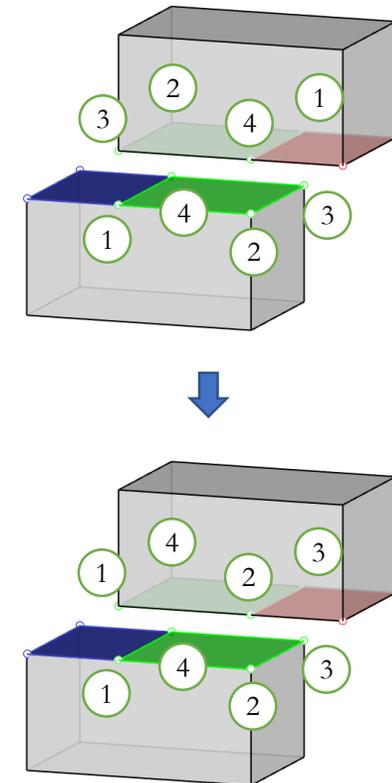
1. Correction des imprécisions



2. Création des surfaces manquantes



3. Permutation de l'ordre des sommets des surfaces de joints



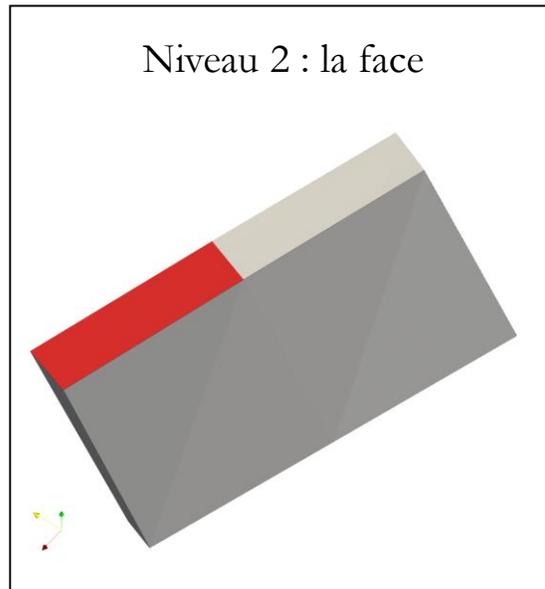
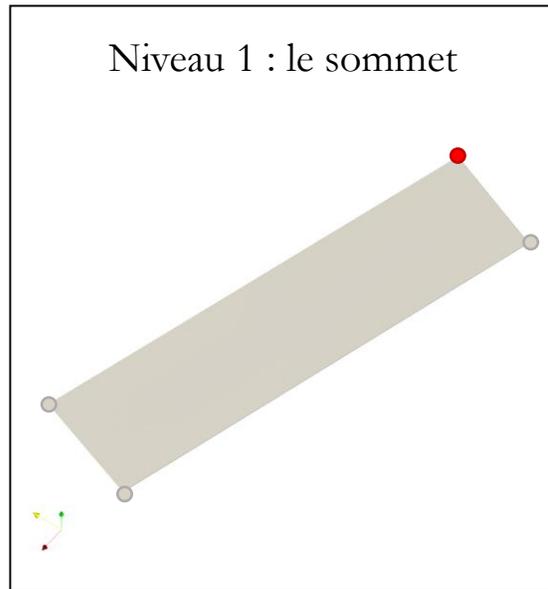
Calcul des voûtes de Notre-Dame de Paris

1. Géométrie et maillage

Compatibilité des interfaces

Procédure (iii) : géométrie bloc à bloc avec interfaces compatibles → maillage Cast3M TET4/JOT3

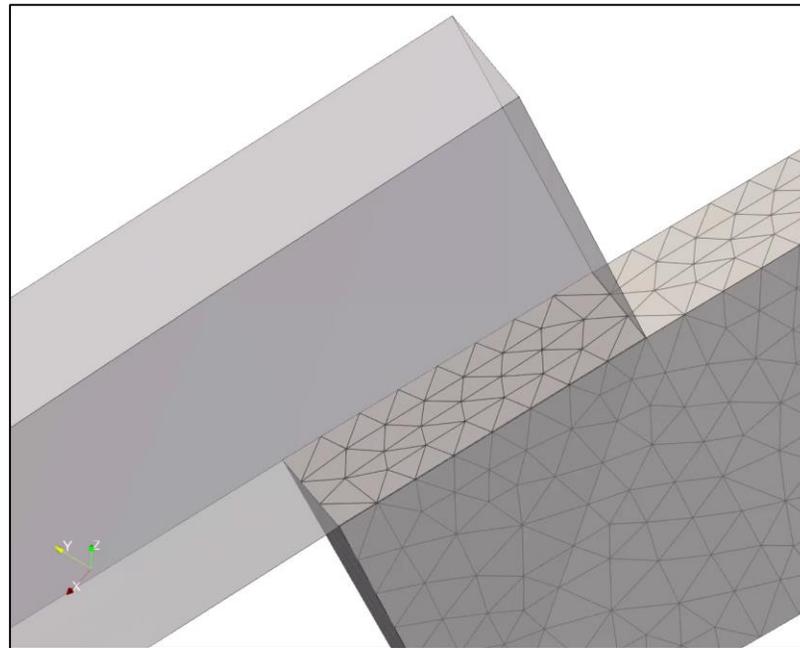
Lecture de la géométrie des blocs dans Cast3M : boucle REPETER à 4 niveaux d'itérations :



1. Géométrie et maillage

Compatibilité des interfaces

- Procédure (i) : nuage de point \rightarrow géométrie bloc à bloc type "MAP"
- Procédure (ii) : géométrie bloc à bloc type "MAP" \rightarrow géométrie bloc à bloc avec interfaces compatibles
- Procédure (iii) : géométrie bloc à bloc avec interfaces compatibles \rightarrow maillage Cast3M TET4/JOT3

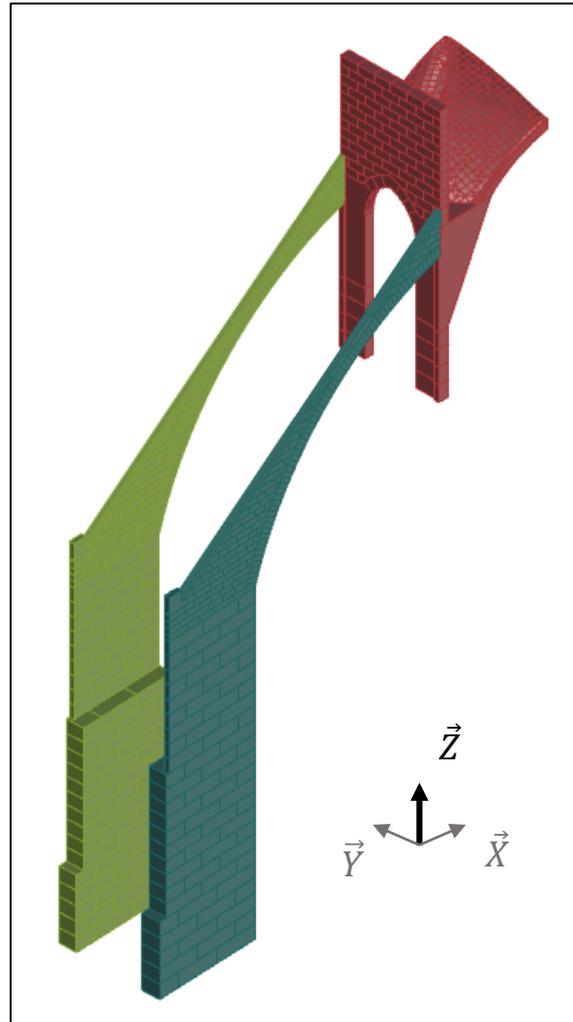
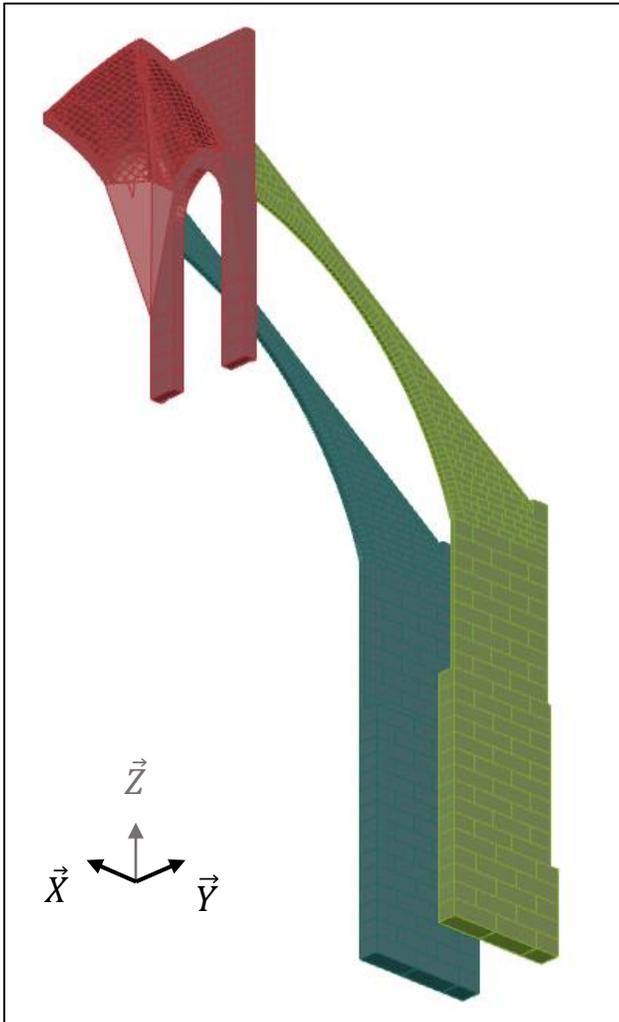


Calcul des voûtes de Notre-Dame de Paris

2. Structure sous poids propre et incendie "Viscosité numérique" et précision

2. Structure sous poids propre et incendie

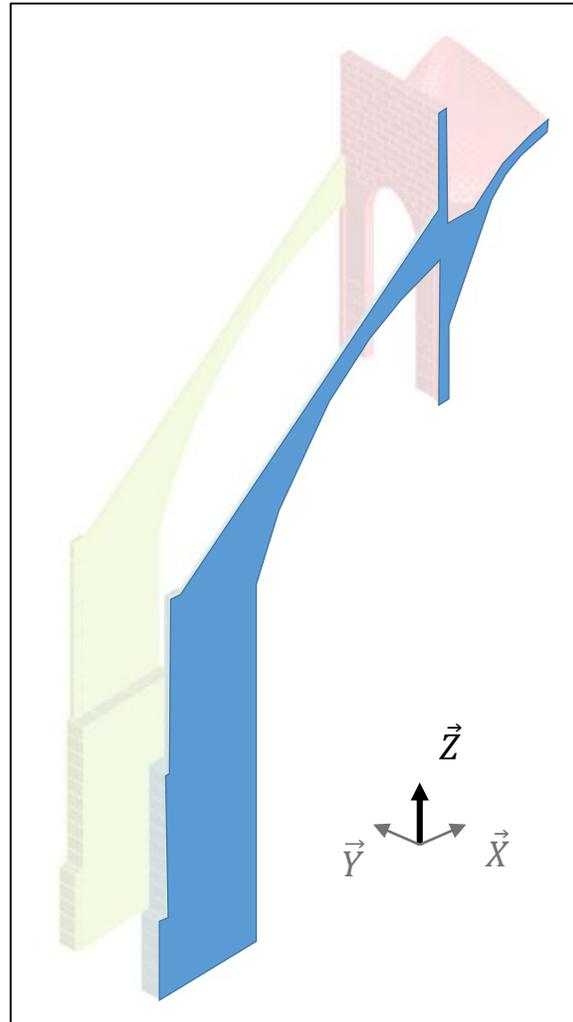
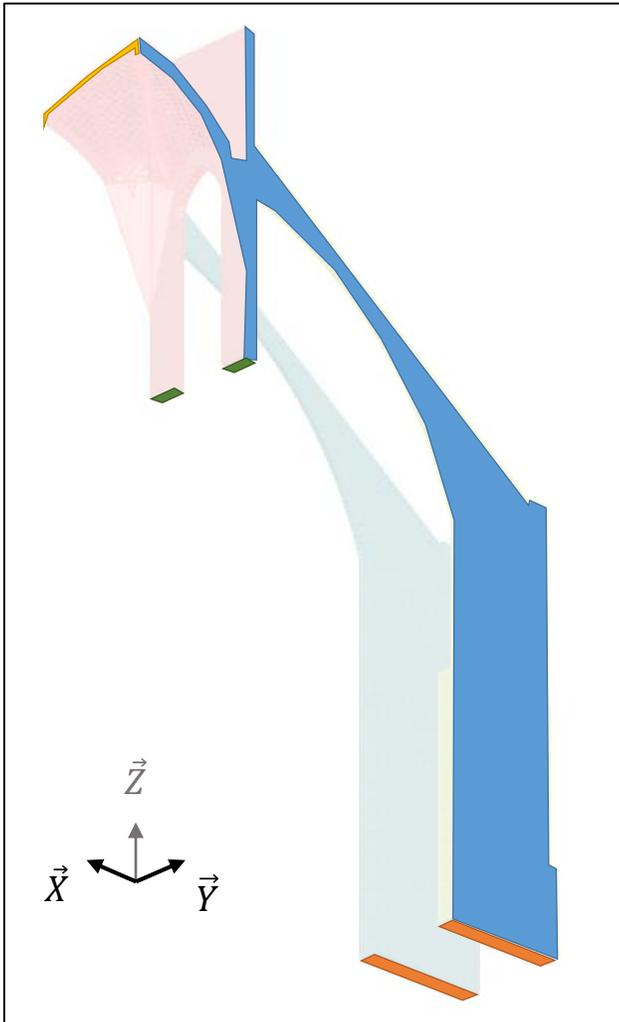
"Viscosité numérique" et précision



Application progressive du poids propre sur le quart de voûte (953 blocs)

2. Structure sous poids propre et incendie

"Viscosité numérique" et précision



Application progressive du poids propre sur le quart de voûte (953 blocs)

Conditions limites :

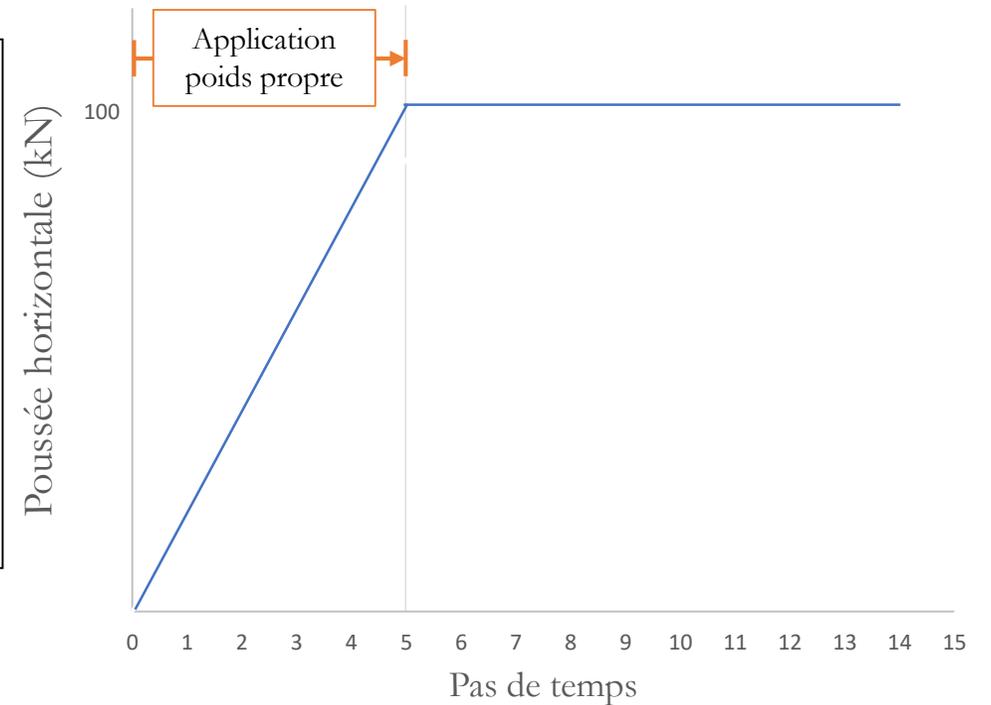
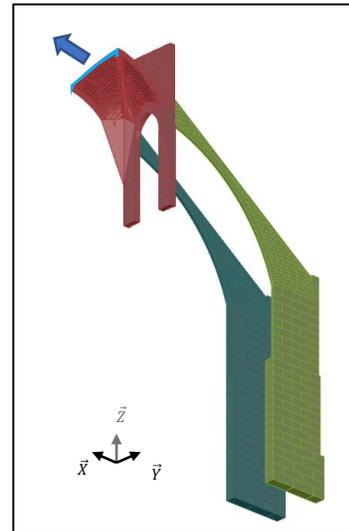
- Conditions de symétries : déplacement **bloqué en X**, déplacement **bloqué en Y**
- Bases des culées : déplacement **bloqué en X, Y, Z**
- Bases du mur gouttereau : déplacement **bloqué en X, Y et imposé de -2,6 mm selon Z pendant l'application du poids propre** (= tassement équivalent des chapelles inférieures pendant le pp)

2. Structure sous poids propre et incendie

"Viscosité numérique" et précision

Chargement de poids propre : champ appliqué selon une évolution linéaire de 0 à 100 %

On s'attend donc à une courbe de poussée linéaire puis constante en réponse

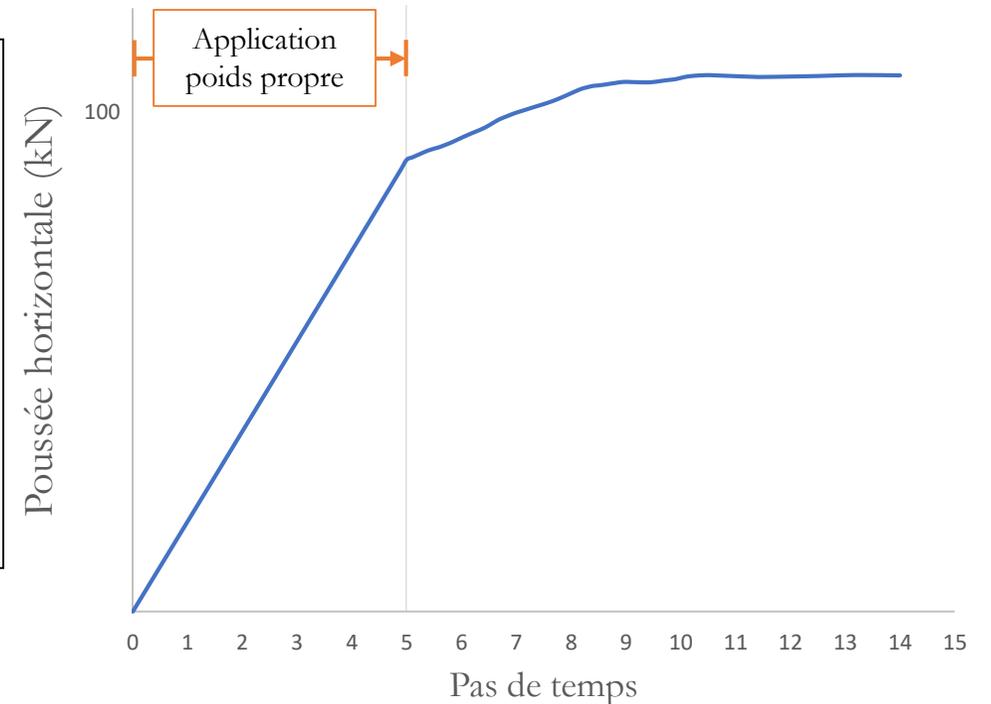
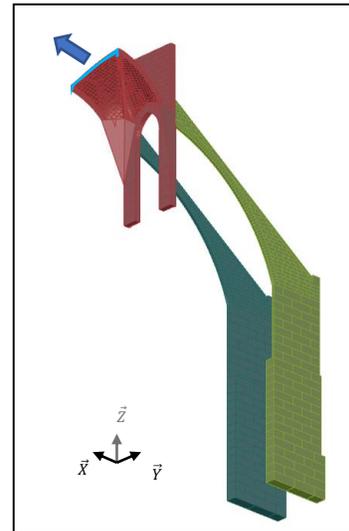


2. Structure sous poids propre et incendie

"Viscosité numérique" et précision

Chargement de poids propre : champ appliqué selon une évolution linéaire de 0 à 100 %

On s'attend donc à une courbe de poussée linéaire puis constante en réponse



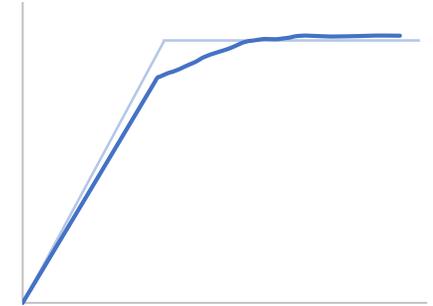
Problème : on observe un phénomène de "viscosité numérique" : la poussée obtenue en sortie de simulation n'est pas constante alors que le chargement n'évolue plus

2. Structure sous poids propre et incendie

"Viscosité numérique" et précision

Paramètres du calcul qui permettent de moduler le phénomène de "viscosité numérique" :

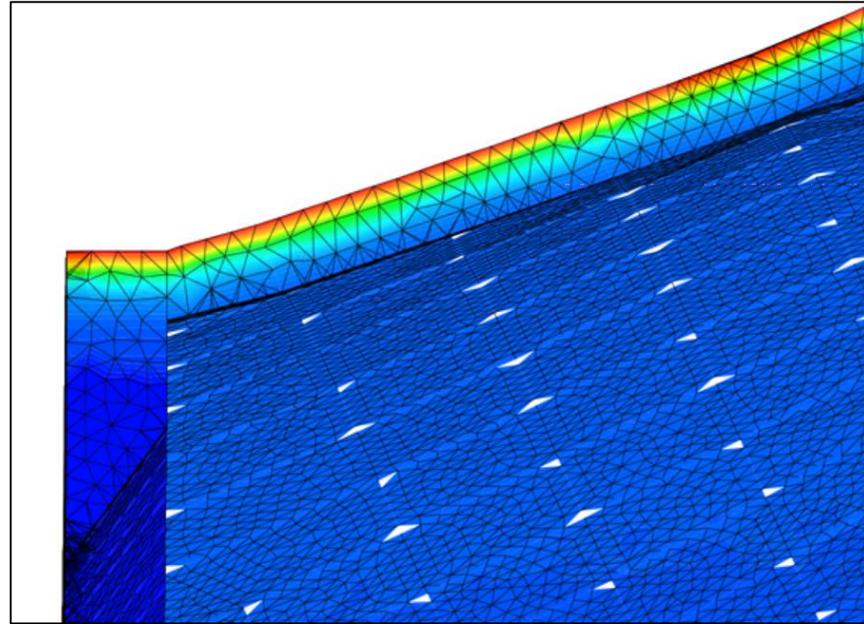
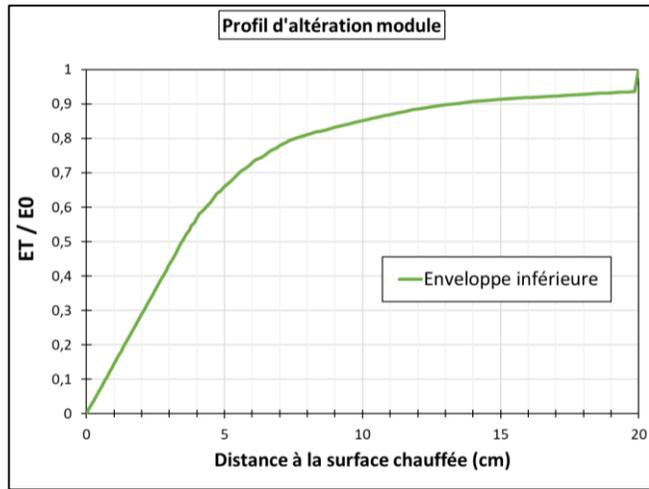
- Critère de résidu minimum de la procédure PASAPAS
- Densité du maillage
- Vitesse de la loi de chargement



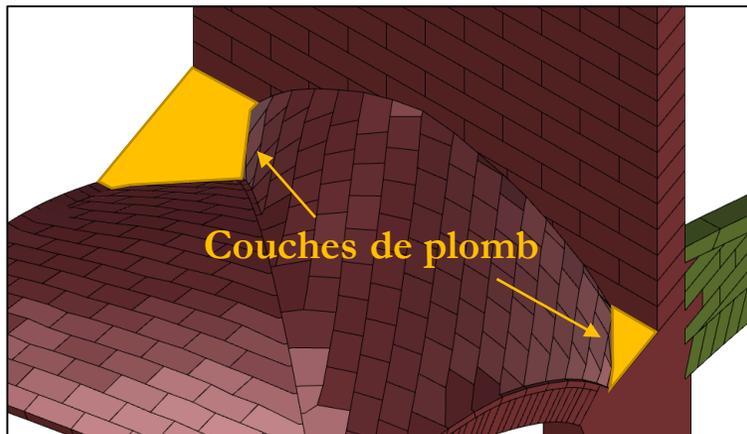
| | Résidu minimum | Densité du maillage | Vitesse du chargement |
|--|---|---|---|
| Diminution (toutes choses égales par ailleurs) | Diminution de la "viscosité numérique" Augmentation du temps de calcul | Diminution de la "viscosité numérique" Augmentation du temps de calcul | Augmentation de la "viscosité numérique" Diminution du temps de calcul |
| Augmentation (toutes choses égales par ailleurs) | Augmentation de la "viscosité numérique" Diminution du temps de calcul | Augmentation de la "viscosité numérique" Diminution du temps de calcul | Diminution de la "viscosité numérique" Augmentation du temps de calcul |

2. Structure sous poids propre et incendie

"Viscosité numérique" et précision



Gradient de dégradation du module d'Young E dans les voûtains suite à l'incendie
rouge = 1 % du E de base, bleu = 100 %



Simulation de l'incendie :

- État initial : structure après poids propre
- Incendie appliqué à l'extrados des voûtains
- Hypothèse : dégradation du module d'Young des pierres uniquement
- Chargement vertical de plomb sur les arases supérieures des tas de charge

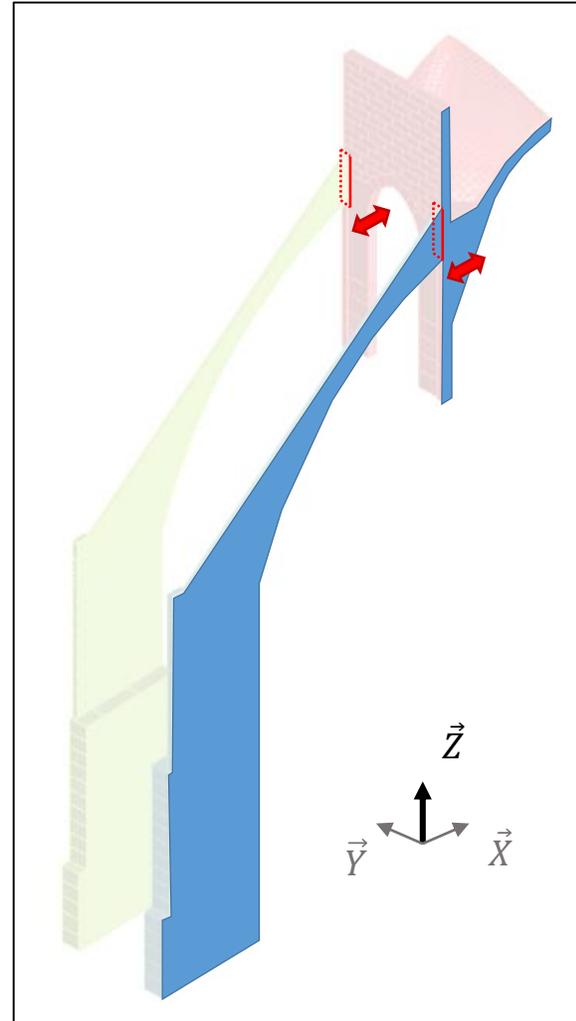
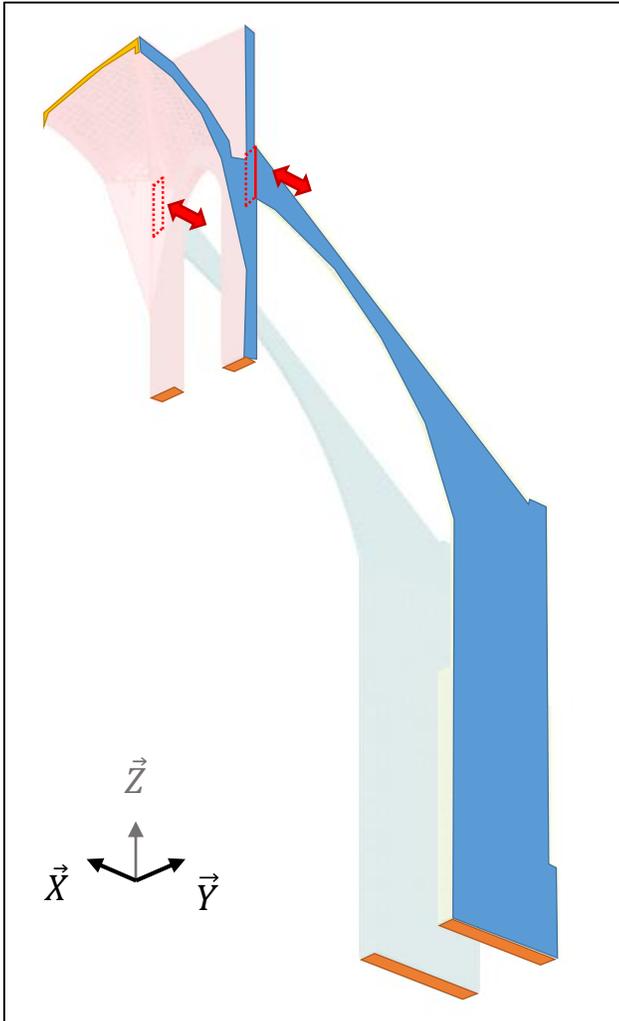
Cette simulation particulière de l'incendie ne permet pas de retrouver les ordres de grandeurs des déformations constatées in situ entre avant et après l'incendie : le couplage thermomécanique est nécessaire (étude en cours)

3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

3. Déplacements des appuis

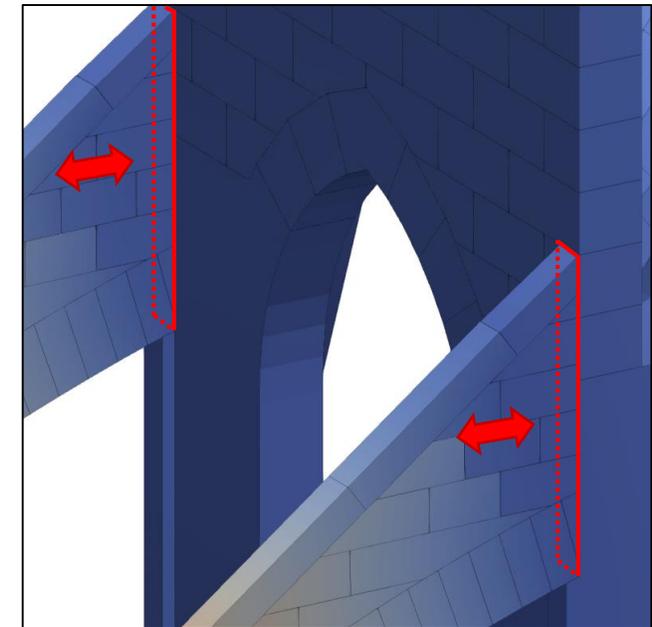
Points de fonctionnement



Déplacements des interfaces appuis-voûtes :

Conditions limites :

- Conditions de symétries : déplacement **bloqué en X**, déplacement **bloqué en Y**
- Déplacement **bloqué en X, Y, Z**
- Déplacement **imposé selon +/- X**

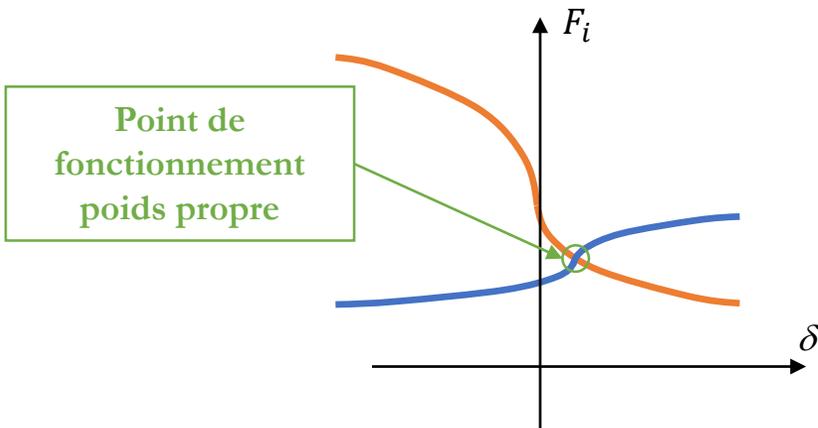
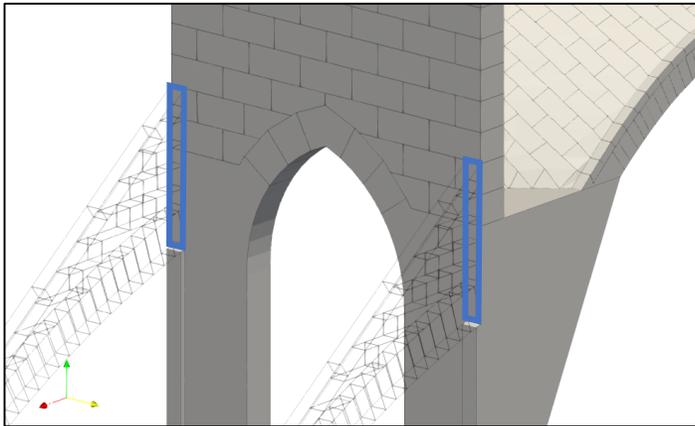


Calcul des voûtes de Notre-Dame de Paris

3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

Principe : on sollicite en déplacement horizontal δ les interfaces appuis-voûte et on récupère les efforts résultants F_i aux interfaces

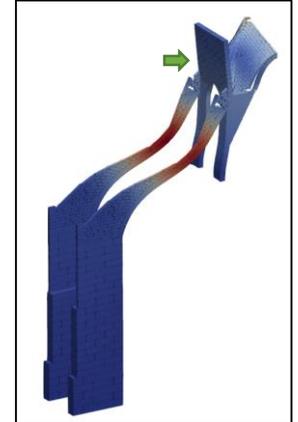


Calcul des voûtes de Notre-Dame de Paris

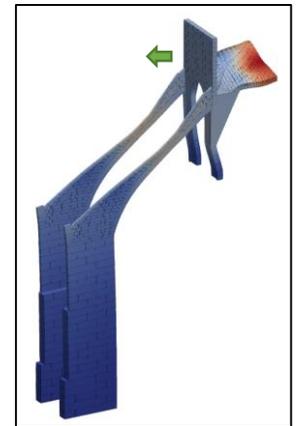
2^{ème} étape :

Mises en déplacements...

...vers l'intérieur du vaisseau central



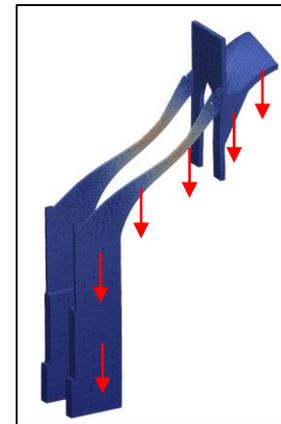
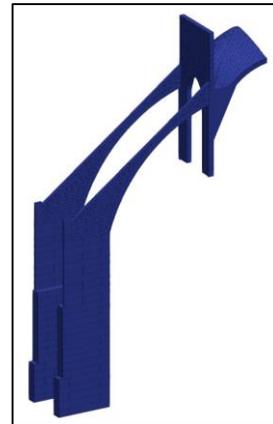
...vers l'extérieur du vaisseau central



Lois de comportement : poussées en fonction du déplacement horizontal

1^{ère} étape :

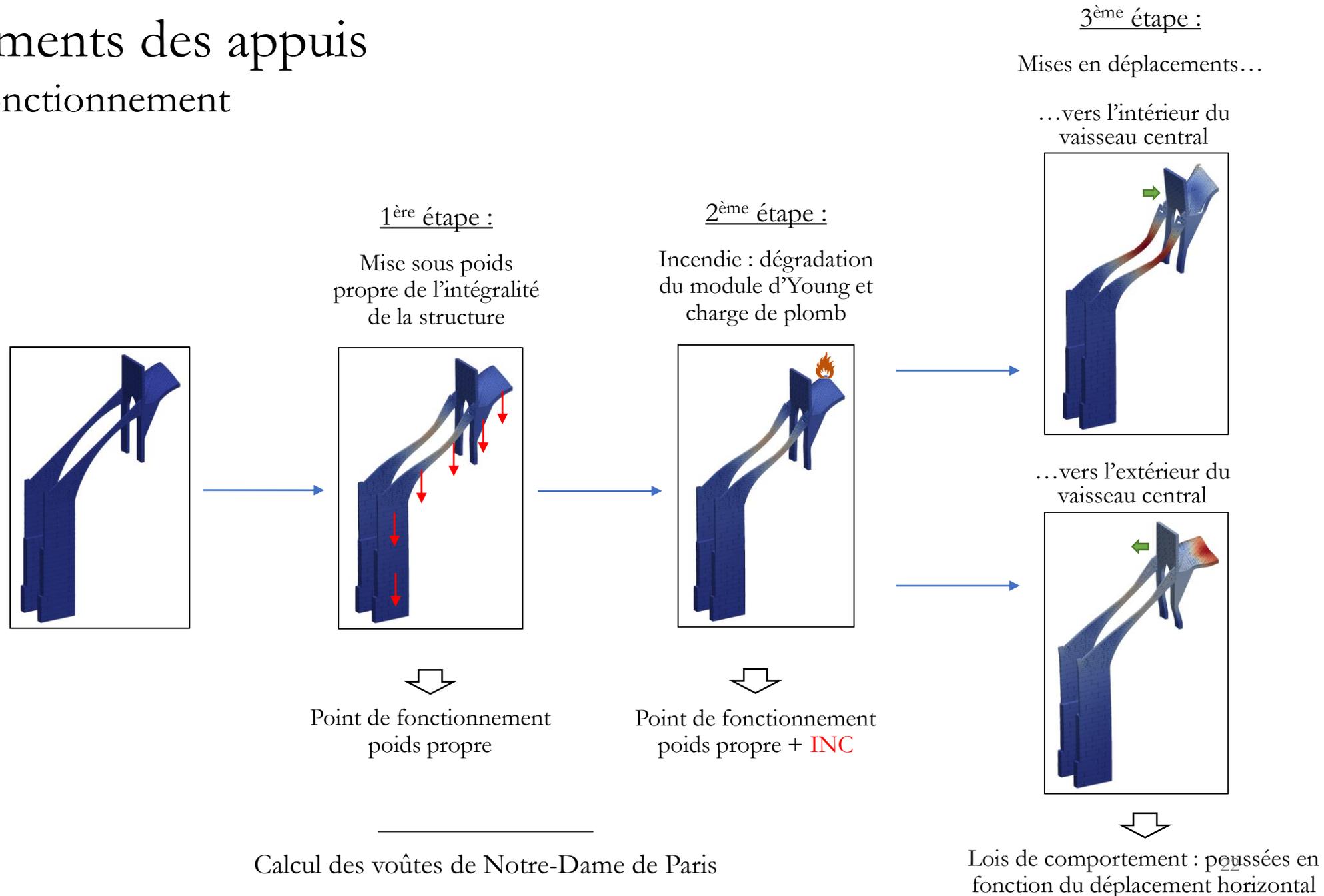
Mise sous poids propre de l'intégralité de la structure



Point de fonctionnement poids propre

3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

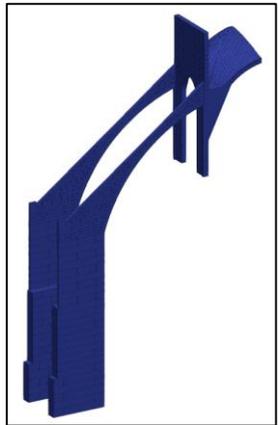


3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

1^{ère} étape :

Mise sous poids propre de l'intégralité de la structure



Point de fonctionnement poids propre

2^{ème} étape :

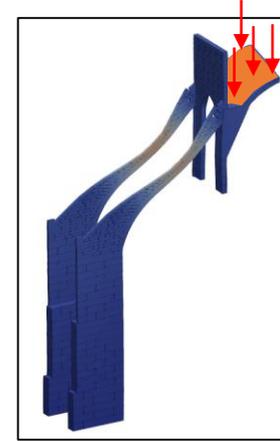
Incendie : dégradation du module d'Young et charge de plomb



Point de fonctionnement poids propre + INC

3^{ème} étape :

Ajout et séchage de la chape sur l'extrados déformé des voûtains + surcouche d'isolant

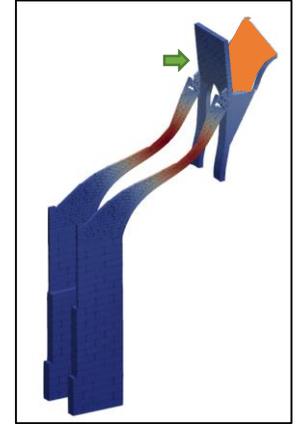


Point de fonctionnement avec chape de confortation

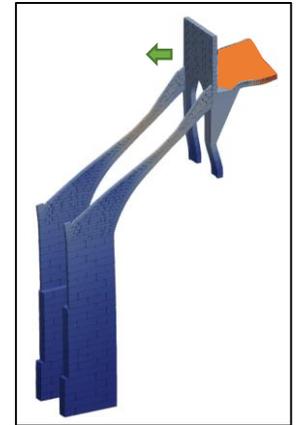
4^{ème} étape :

Mises en déplacements...

...vers l'intérieur du vaisseau central



...vers l'extérieur du vaisseau central



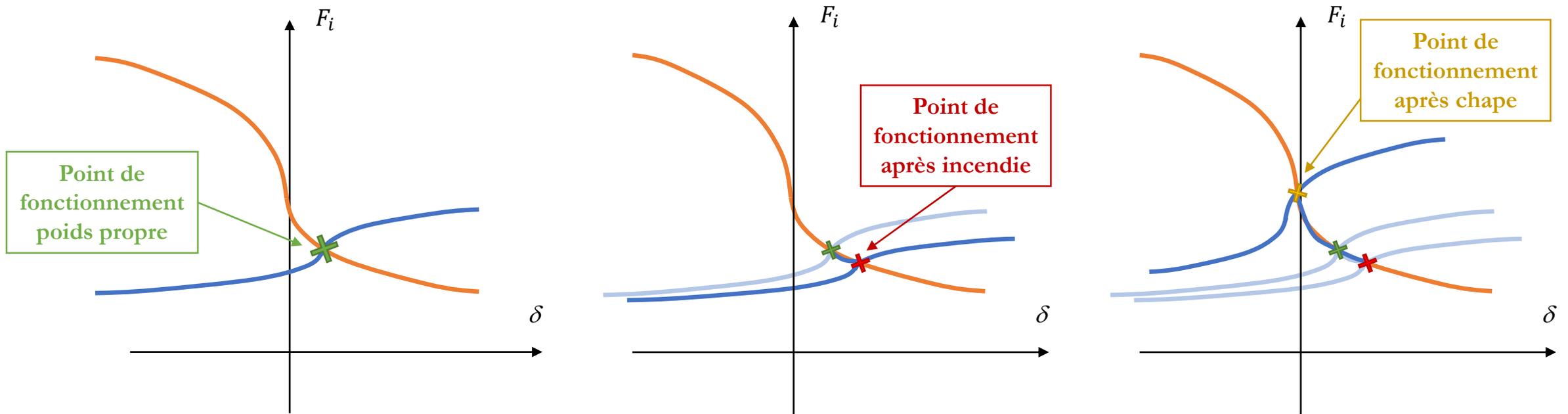
Lois de comportement : poussées en fonction du déplacement horizontal

3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

On obtient ainsi :

- Les réserves de capacités en force côté **arc-boutant** et côté **voûte** selon les cas
- Une manière de comparer les différentes voûte de la cathédrale
- Une évaluation de l'effet de l'incendie, de l'ajout d'une chape de confortation ou de tout autre chargement sur les capacités de la voûte



3. Déplacements des appuis

Points de fonctionnement

Quelques ordres de grandeur de calculs numériques :

Nombre d'éléments :

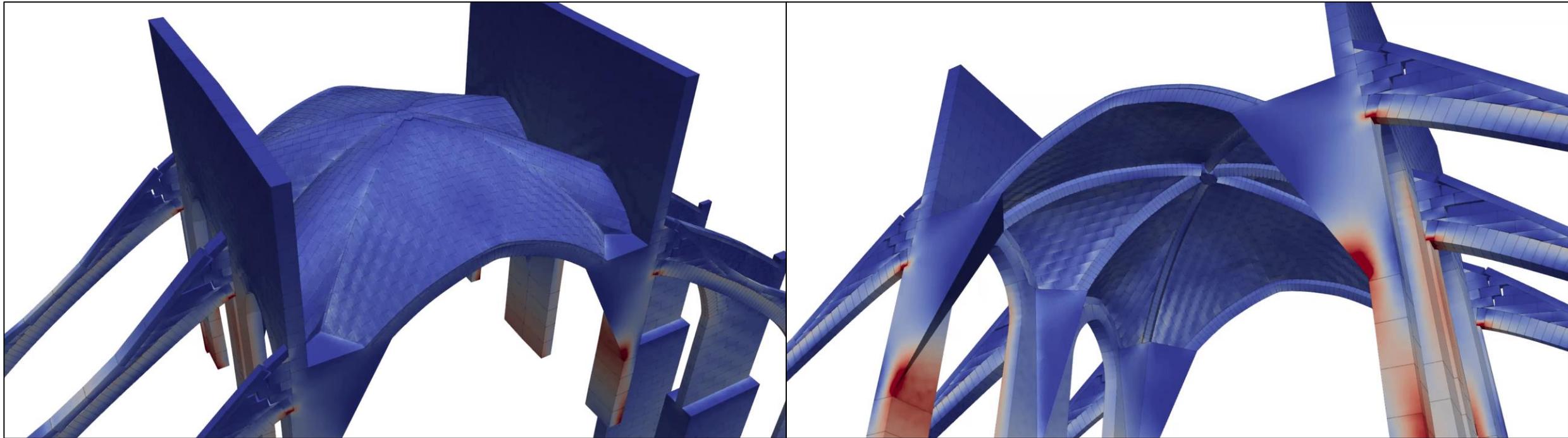
384 855 nœuds
1 101 813 éléments

Puissance de calcul à distance  CRIANN :

28 processeurs 2,4 GHz
120 Go de RAM

Durée de calcul :

6 - 7 jours pour un déplacement imposé de 15 mm



Déplacements vers l'intérieur

Contrainte principale σ_{III} sur la déformée amplifiée 20 fois

Déplacements vers l'extérieur