

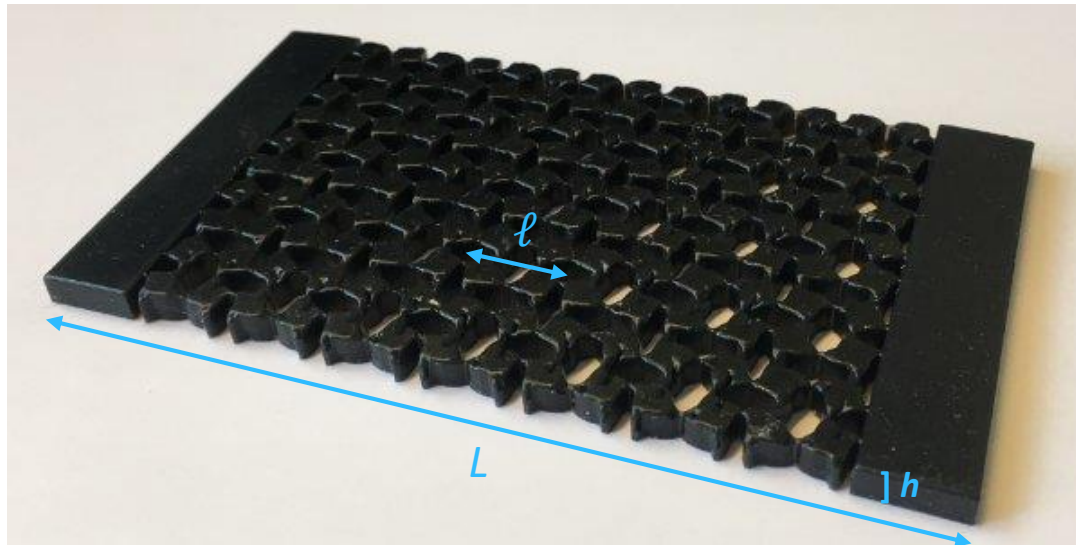
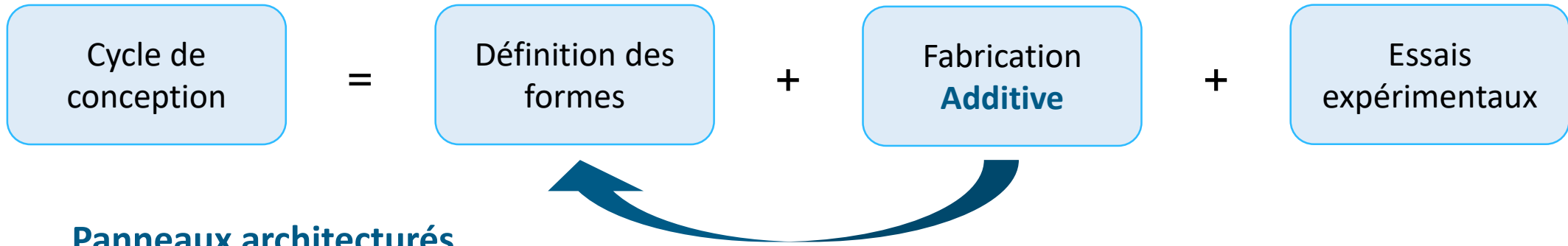
Conception de panneaux périodiques 3D imprimables minces a couplage extension – flexion par optimisation de formes

Club Cast3m

Filippo AGNELLI • Grigor Nika • Andrei Constantinescu

Paris – 26 Novembre 2021

Conception d'objets par impression 3D



- Facteur d'échelle

$$\epsilon = \frac{\ell}{L}$$

- Cellular aspect ratio

$$r = \frac{h}{\ell}$$

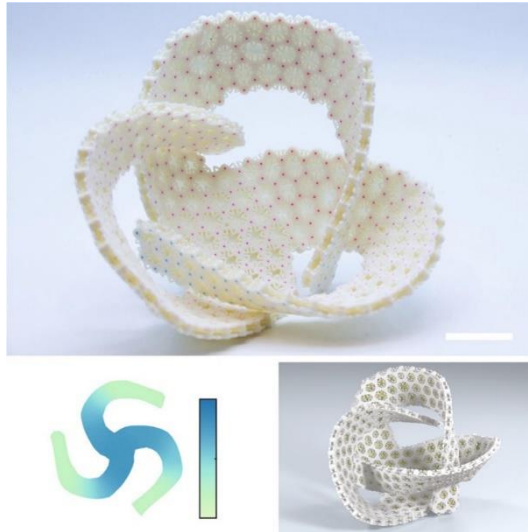
Couplage extension – flexion

Effets de structure

- Déformations incompatibles, flambage
 - Contraintes résiduelles
 - gonflement
 - chaleur
 - Autres phénomènes multiphysiques...



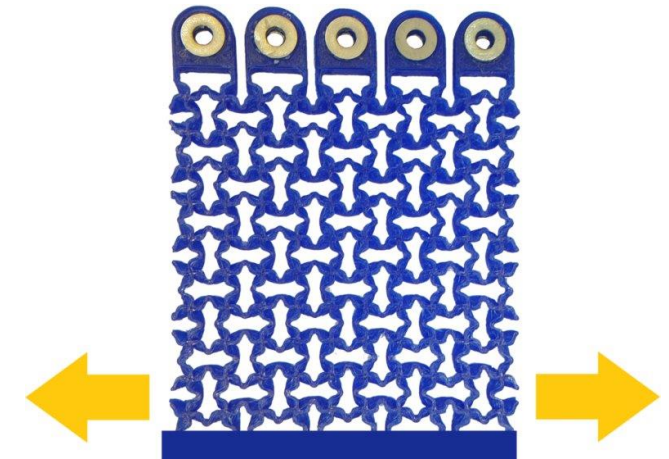
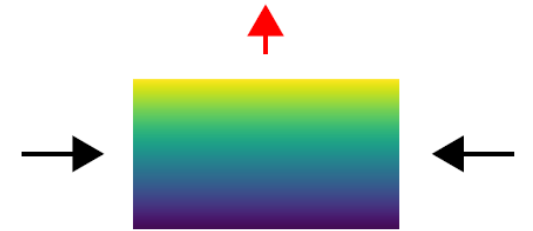
(Siefert et al. *Soft Matter* 2020)



(Guseinov et al. *Nat. Commun.* 2020)

Effets de Matériau

- Gradients de propriétés

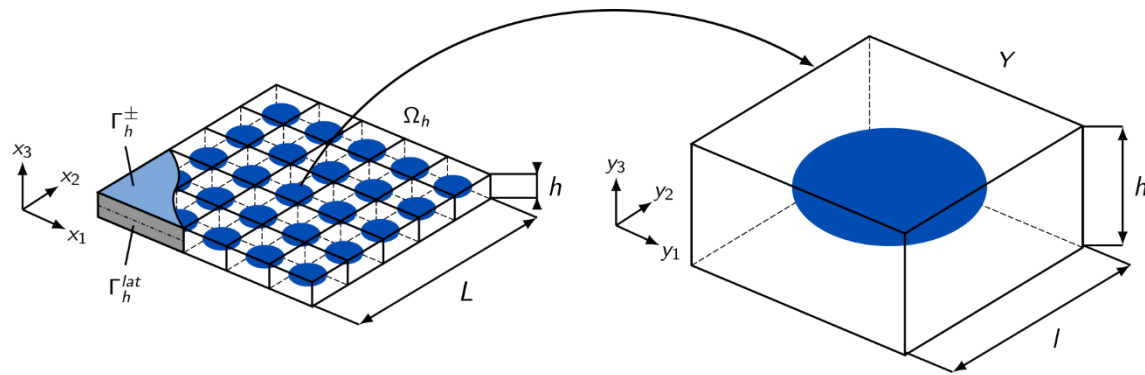


(A., Tricarico & Constantinescu *Extreme Mech. Lett.* 2021)

Plan

- **Caractérisation des plaques périodiques**
 - Théorie de l'homogénéisation asymptotique
 - Modèle macroscopique de Kirchhoff Love généralisé
- **Conception de plaques périodiques par optimisation topologique**
 - Recherche d'une forme associée à un tenseur élastique cible
 - Méthode des surfaces de niveaux « Level set »
- **Caractérisation de plaques optimisées (élasticité linéaire)**

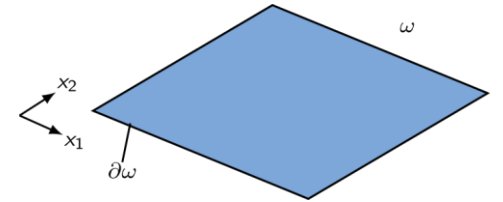
Panneaux élastiques munis d'une microstructure périodique



Panneau périodique

Cellule représentative

Homogénéisation
 $r \approx 1$



Panneau équivalent homogène

Comportement local

Elastique linéaire, isotrope, **hétérogène** mais **périodique**

$$\boldsymbol{\sigma}^{h\epsilon} = \mathbf{C}^{h\epsilon}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\epsilon})$$

Comportement macroscopique

Elastique linéaire, **orthotrope**, homogène

Modèle de plaque minces de Kirchhoff–Love généralisé

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ {}^T\mathbf{B}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{U}_\alpha) \\ \chi_x(U_3) \end{bmatrix}$$

Homogénéisation de plaques minces périodiques

Tenseur de raideur élastique plaque (orthotrope)

$$\begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^{*T} & D^* \end{bmatrix}_{(h^*, t^*)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{ccc} A_{1111}^* & A_{1122}^* & 0 \\ A_{1122}^* & A_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{1212}^* \end{array} & \begin{array}{ccc} B_{1111}^* & B_{1122}^* & 0 \\ B_{2211}^* & B_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & B_{1212}^* \end{array} & \\ \hline \begin{array}{ccc} B_{1111}^* & B_{2211}^* & 0 \\ B_{1122}^* & B_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & B_{1212}^* \end{array} & \begin{array}{ccc} D_{1111}^* & D_{1122}^* & 0 \\ D_{1122}^* & D_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & D_{1212}^* \end{array} & \\ \hline \end{array}$$

Coefficients élastique de raideur macroscopique

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{h}{|Y|} \int_Y C(\mathbf{y}) : \left(\mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}^{\gamma\delta}) \right) : \left(\mathbf{E}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}^{\alpha\beta}) \right) d\mathbf{y}$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{h}{|Y|} \int_Y C(\mathbf{y}) : \left(y_3 \mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^{\gamma\delta}) \right) : \left(\mathbf{E}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}^{\alpha\beta}) \right) d\mathbf{y}$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{h}{|Y|} \int_Y C(\mathbf{y}) : \left(y_3 \mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^{\gamma\delta}) \right) : \left(y_3 \mathbf{E}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\mathbf{y}ij}(\mathbf{p}^{\alpha\beta}) \right) d\mathbf{y}$$

(Caillerie & Nedelec *Math. Methods Appl. Sci.* 1984)

Problème de cellule

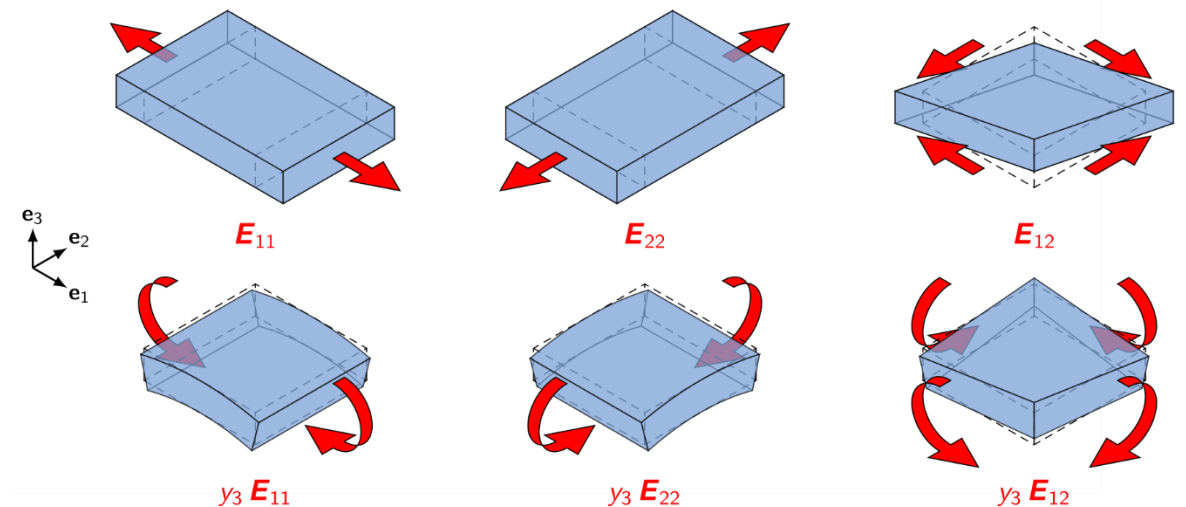
$\mathbf{w}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$ satisfy:

$$\int_Y C(\mathbf{y}) : \left(\mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}^{\gamma\delta}) \right) : \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$

$\mathbf{p}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$ satisfy:

$$\int_Y C(\mathbf{y}) : \left(y_3 \mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^{\gamma\delta}) \right) : \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$

Espace Y-périodique



Homogénéisation asymptotique : implémentation dans Cast3m

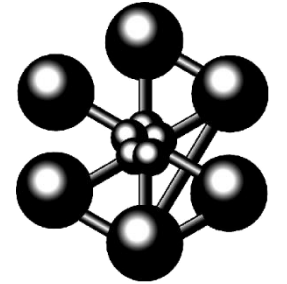
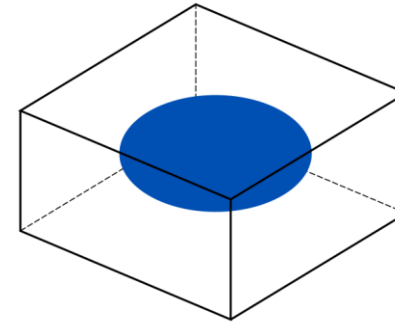
Problème de cellule

$\mathbf{w}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$ satisfy:

$$\int_Y \mathbf{C}(\mathbf{y}) : \left(\mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}^{\gamma\delta}) \right) : \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$

$\mathbf{p}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$ satisfy:

$$\int_Y \mathbf{C}(\mathbf{y}) : \left(y_3 \mathbf{E}^{\gamma\delta} + \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}^{\gamma\delta}) \right) : \varepsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$



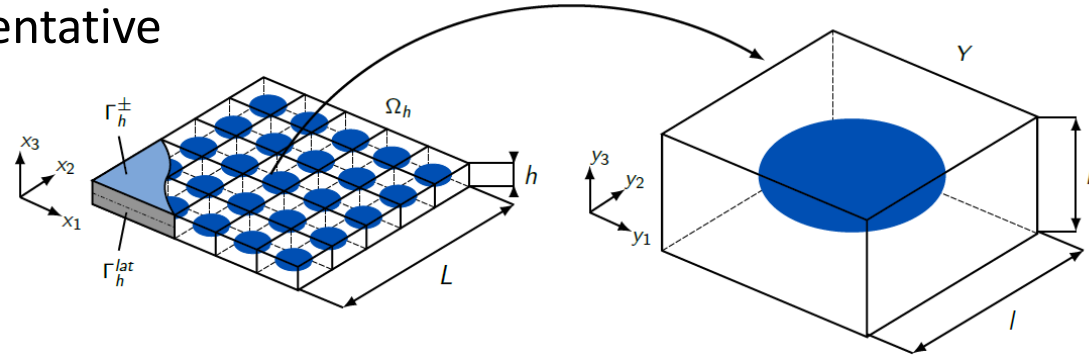
- Conditions périodiques sur les cotés : **RELA 'UX' 'UY' 'YZ'** sur les faces latérales opposées.
- Construction de $\mathbf{E}^{\gamma\delta}$: **MANU 'CHML' ...**
- Construction du champ des forces nodales pour le second membre de **RESO:** **ELAS, BSIG**

Plan

- **Caractérisation des plaques périodiques**
 - Théorie de l'homogénéisation asymptotique
 - Modèle macroscopique de Kirchhoff Love généralisé
- **Conception de plaques périodiques par optimisation topologique**
 - Recherche d'une forme associée à un tenseur élastique cible
 - Méthode des surfaces de niveaux « Level set »
- **Caractérisation de plaques optimisées (élasticité linéaire)**

Tailoring elastic response

- Cellule élémentaire représentative



- A^* , B^* et D^* s'obtiennent par homogénéisation asymptotique
- Loi de comportement des plaques élastiques fines: modèle de Kirchhoff-Love généralisé

$$\mathbf{C}^{\text{target}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{1111}^* & A_{1122}^* & \star & B_{1111}^* & B_{1122}^* & \star \\ A_{1122}^* & A_{2222}^* & \star & B_{2211}^* & B_{2222}^* & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hline B_{1111}^* & B_{2211}^* & \star & D_{1111}^* & D_{1122}^* & \star \\ B_{1122}^* & B_{2222}^* & \star & D_{1122}^* & D_{2222}^* & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{array} \right]$$

Problème d'optimisation

La forme $S \subset Y$ est un sous-ensemble lisse, ouvert et borné de Y :

$$\mathcal{J}(S) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^{\text{target}}\|_{\eta_A}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^{\text{target}}\|_{\eta_B}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{D}^* - \mathbf{D}^{\text{target}}\|_{\eta_D}^2$$

- $\|\cdot\|$: norme Euclidienne pondérée η : poids
- $\mathbf{A}^{\text{target}}$, $\mathbf{B}^{\text{target}}$ and $\mathbf{D}^{\text{target}}$: valeur cibles du tenseur plaque mince elastique de raideur

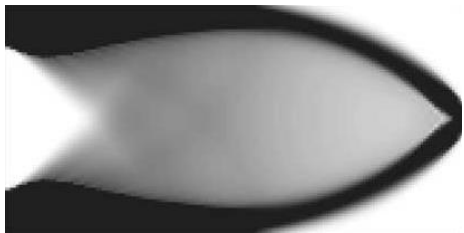
Problème d'optimisation

$$\inf_{S \subset U_{ad}} \mathcal{J}(S)$$
$$\mathbf{w}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y) \text{ satisfy: } \int_Y C_{ijpq} (\delta_{p\gamma} \delta_{q\delta} + \varepsilon_{ypq}(\mathbf{w}^{\gamma\delta})) \varepsilon_{yij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$
$$\mathbf{p}^{\gamma\delta} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y) \text{ satisfy: } \int_Y C_{ijpq} (y_3 \delta_{p\gamma} \delta_{q\delta} + \varepsilon_{ypq}(\mathbf{p}^{\gamma\delta})) \varepsilon_{yij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}(Y)$$

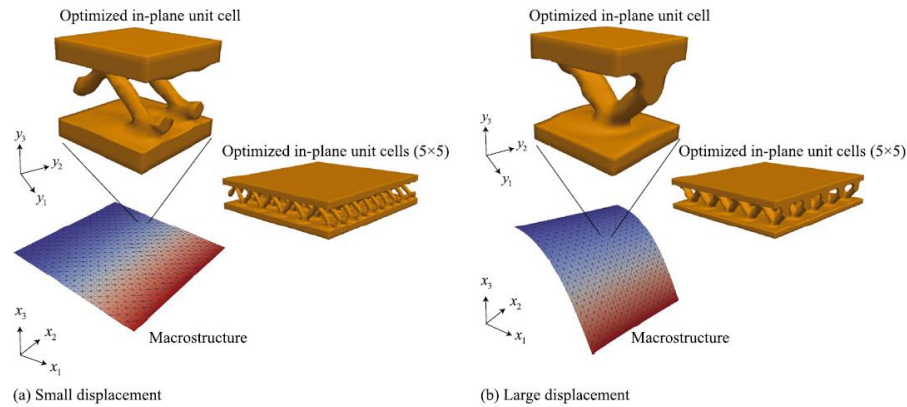
Optimisation topologique: méthodes

- **Méthodes de densité**

- Homogenisation method, SIMP



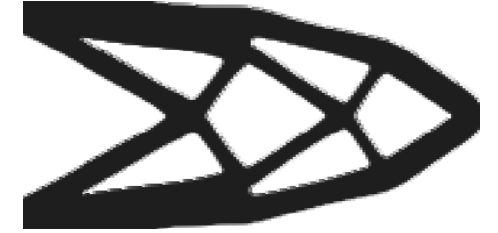
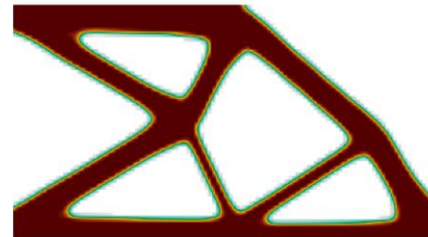
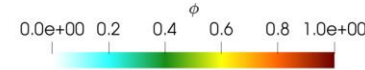
(Allaire et al. *J. Comp. Phys.* 2004)



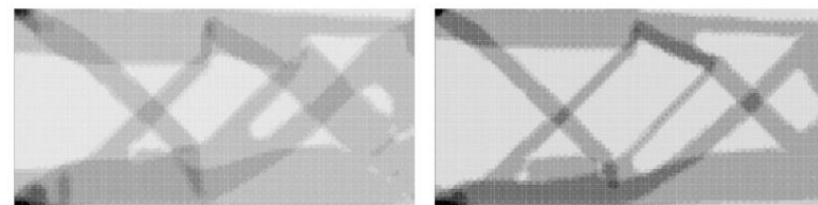
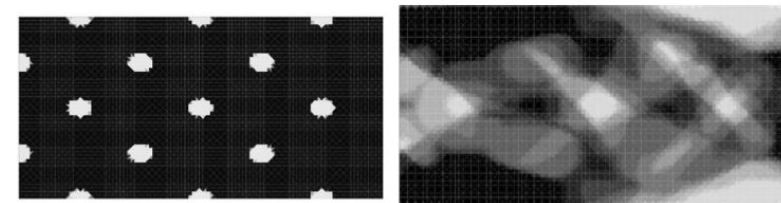
(Nishi et al. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2017)

- **Méthodes implicites**

- Méthodes phase-field, Level set



(Carraturo et al. 2019 *Comp. Mech.* 2019) (Allaire et al. *J. Comp. Phys.* 2004)



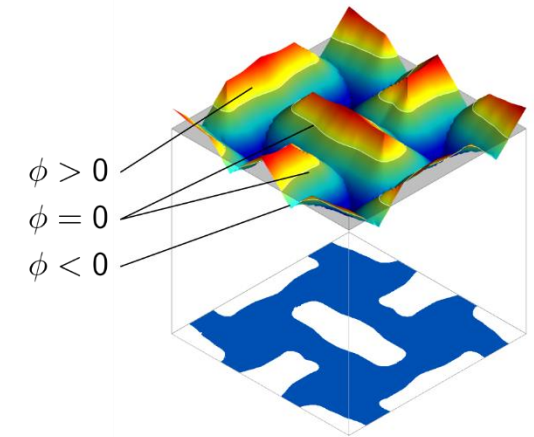
(Allaire & Delgado *J. Mech. Phys. Solids* 2016)

Optimisation topologique par la méthode de surfaces de niveaux (level set)

- Fonction « level set » ϕ pour représenter la distribution de matière

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{y}) < 0 & \text{if } \mathbf{y} \in S & \text{(material)} \\ \phi(\mathbf{y}) = 0 & \text{if } \mathbf{y} \in \partial S & \text{(boundary)} \\ \phi(\mathbf{y}) > 0 & \text{if } \mathbf{y} \in Y \setminus S & \text{(void)} \end{cases}$$

(Osher & Sethian *J. Comp. Phy.* 1988)



- Inter-phase épaisse

$$C^e(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_e(\phi)(C^{\bar{S}} - C^S) + C^S \quad \mathcal{H}_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < -e \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{e} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{e}\right) \right) & \text{if } |t| \leq e \\ 1 & \text{if } t > e \end{cases}$$

(Allaire, Dapogny, Delgado & Michailidis *ESAIM: COCV* 2014)

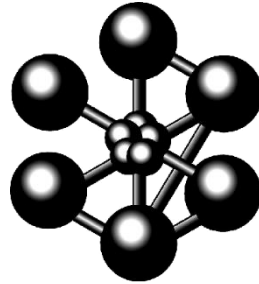
- Evolution du contour

- Introduction d'un pseudo temps $t \in \mathbb{R}^+$ pour caractériser l'évolution de $S(t)$
- Différenciation de $\phi(\mathbf{y}(t), t) = 0 \quad \forall \mathbf{y}(t) \in \partial S(t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{y}, t) + V(\mathbf{y}, t) |\nabla \phi(\mathbf{y}, t)| = 0 \quad \forall t, \forall \mathbf{y} \in Y \quad \text{Equation d'Hamilton-Jacobi}$$

Equation d'Hamilton-Jacobi: implémentation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{y}, t) + V(\mathbf{y}, t) |\nabla \phi(\mathbf{y}, t)| = 0 \quad \forall t, \forall \mathbf{y} \in Y$$



- **Essais initiaux (Cast3m)**

1) Modèle 'NAVIER_STOKES'
EQEX EXEC

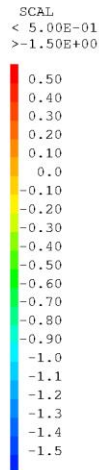
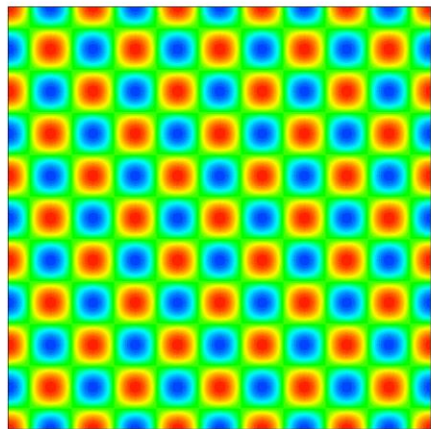
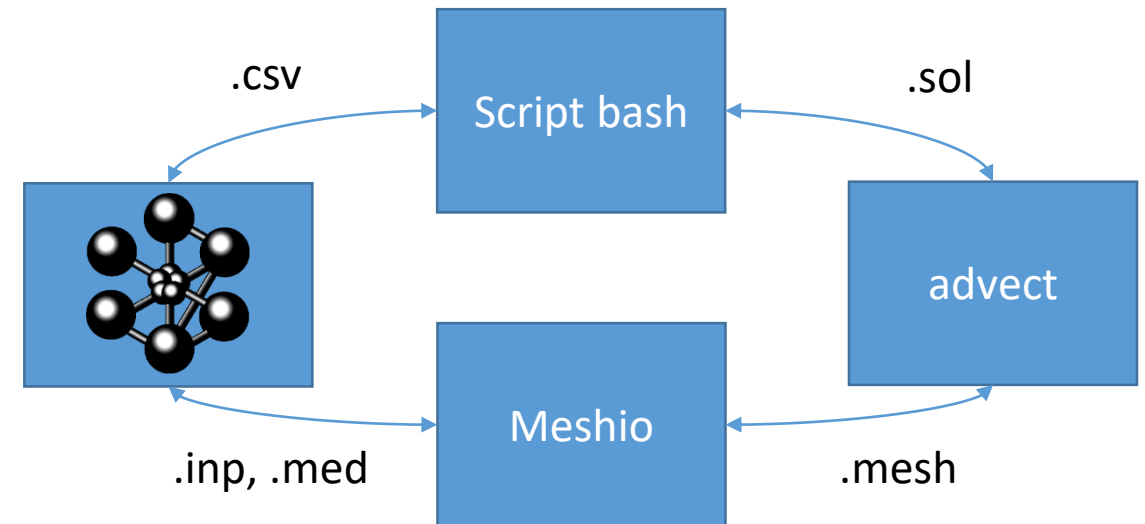
2) Modèle 'THERMIQUE' : ADVE

- **Solution retenue**

- Package advect
(Bui et al. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 2011)

- Méthode des caractéristiques

- Echange de données avec Cast3M

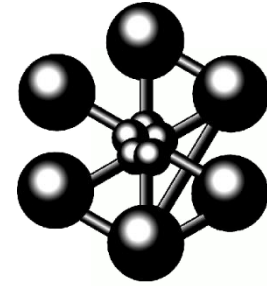


Initial guess PHI0

Fonction Level set

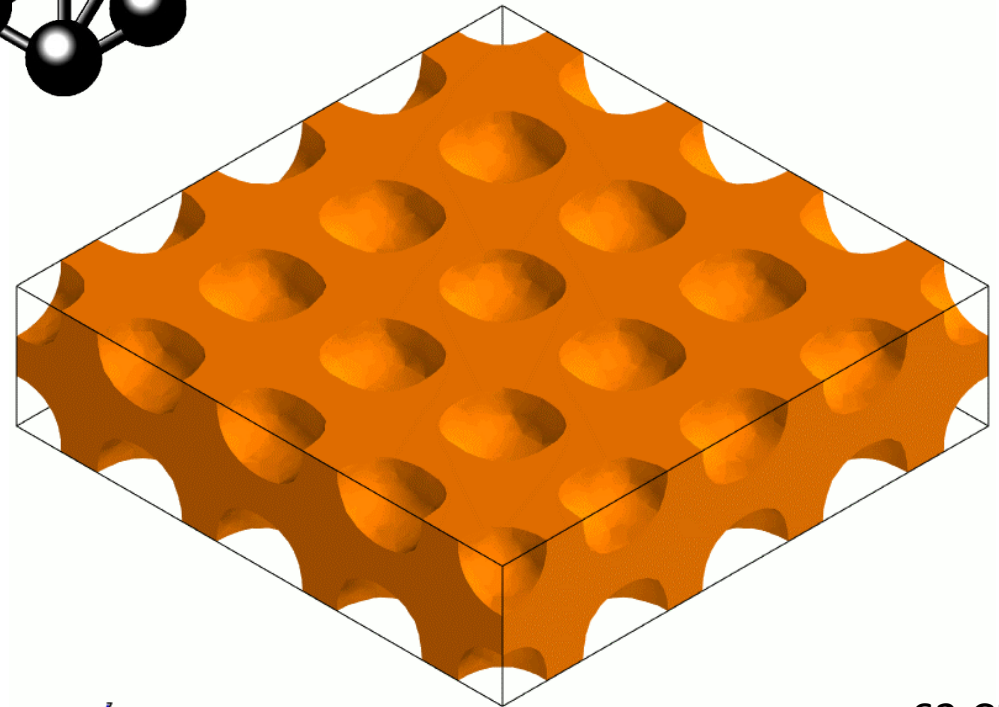
Algorithme numérique

- Initialisation de la fonction level set ϕ_0 correspondant à une forme initiale S_0
- **REPE**ter $k \geq 0$ jusqu'à convergence
 - Redistanciation de ϕ_k en fonction de distance signée d_{S_k}
 - Calcul des champs $\mathbf{w}^{\gamma\delta}$ and $\mathbf{p}^{\gamma\delta}$ solutions des problèmes de cellule
 - Calculer le gradient de forme $J(S^k)(\boldsymbol{\theta}^k)$ associé au domaine S^k
 - Déformation du domaine S_k en résolvant l'équation d'Hamilton-Jacobi.
// Fraction volumique bornée dans un intervalle donné
// Le pas de temps t est choisi tel que $J(S_{k+1}) \leq J(S_k)$
- Algorithme adapté de (Allaire et al. *J. Comp. Phys.* 2004)
- Redistancing performed using `mshdist` (Dapogny & Frey *Calcolo* 2012)
- Hamilton-Jacobi eq. solved using `advect` (Bui et al. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 2011)



Iteration 0

$$r = \frac{1}{4}$$



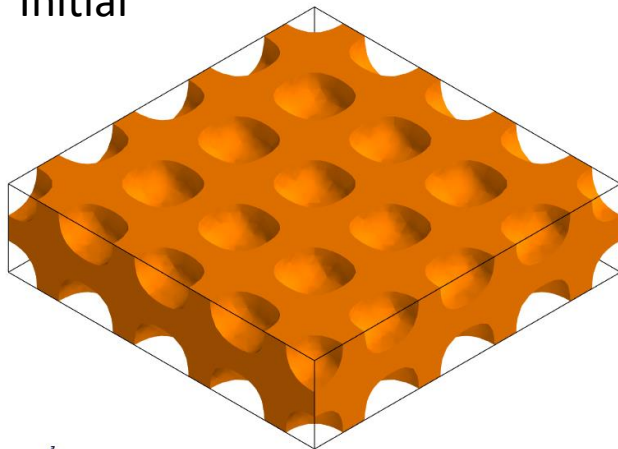
62 CPU
~ 35 min

(A., Nika & Constantinescu *submitted* 2021)

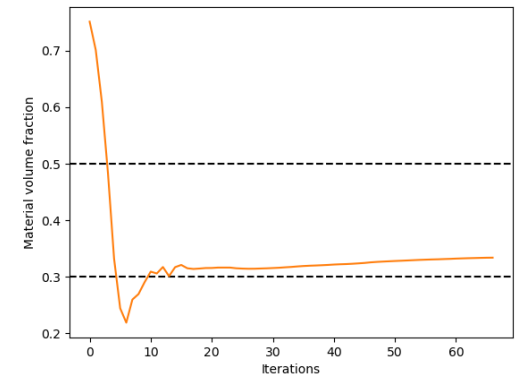
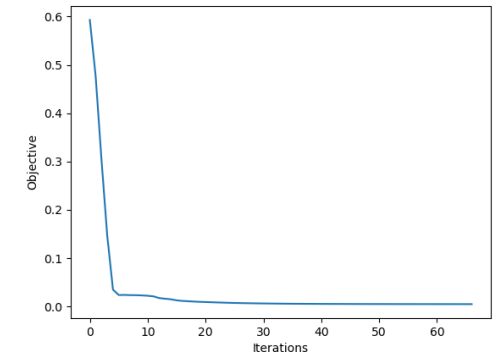
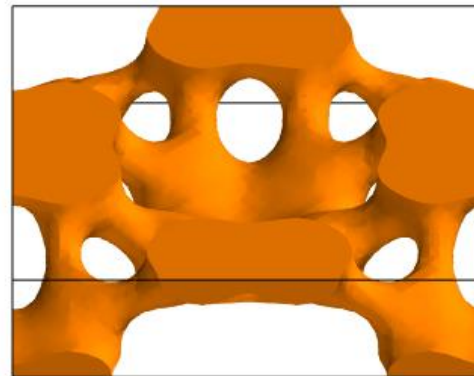
Résultats numériques

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{C}^{\text{target}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 0.12 & -0.06 & * & * & 2.3e^{-3} & * \\
 -0.06 & 0.12 & * & 2.3e^{-3} & * & * \\
 * & * & * & * & * & * \\
 \hline
 * & 2.3e^{-3} & * & 6.3e^{-4} & * & * \\
 2.3e^{-3} & * & * & * & 6.3e^{-4} & * \\
 * & * & * & * & * & *
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{C}^* \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 0.097 & -0.033 & 0 & 2.9e^{-4} & 2.2e^{-4} & 0 \\
 -0.033 & 0.098 & 0 & 2.7e^{-4} & 2.8e^{-4} & 0 \\
 0 & 0 & 0.023 & 0 & 0 & 1.8e^{-4} \\
 \hline
 2.9e^{-4} & 2.7e^{-4} & 0 & 2.7e^{-4} & 6.2e^{-5} & 0 \\
 2.2e^{-4} & 2.8e^{-4} & 0 & 6.2e^{-5} & 2.7e^{-4} & 0 \\
 0 & 0 & 1.8e^{-4} & 0 & 0 & 2.0e^{-4}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

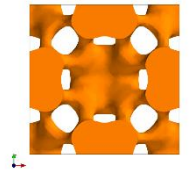
Initial



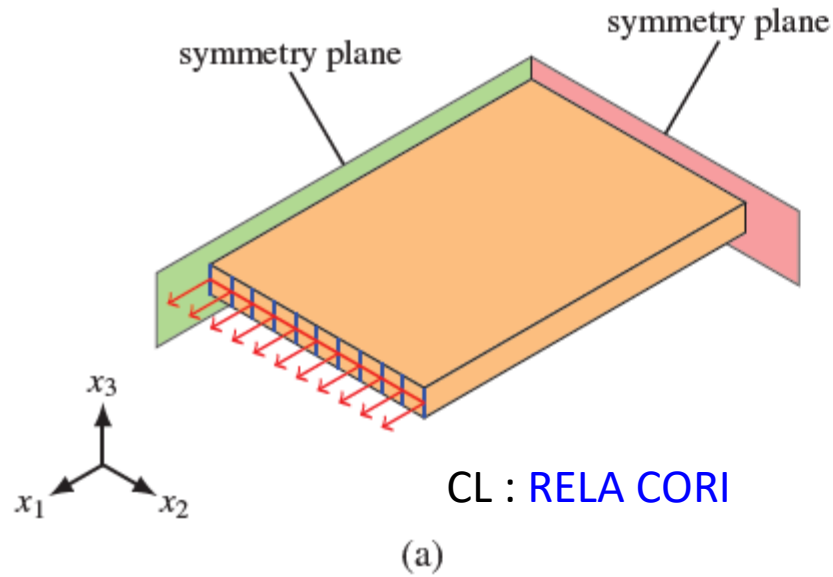
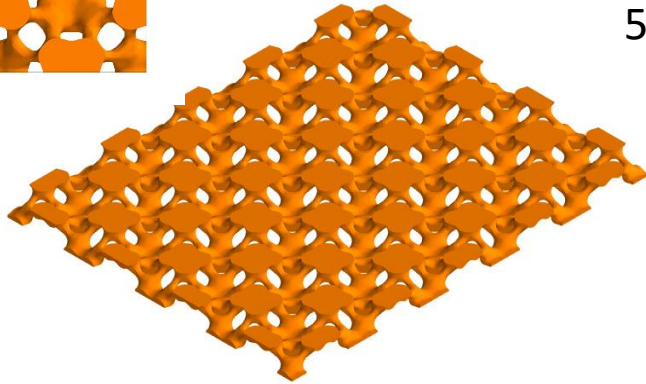
Final



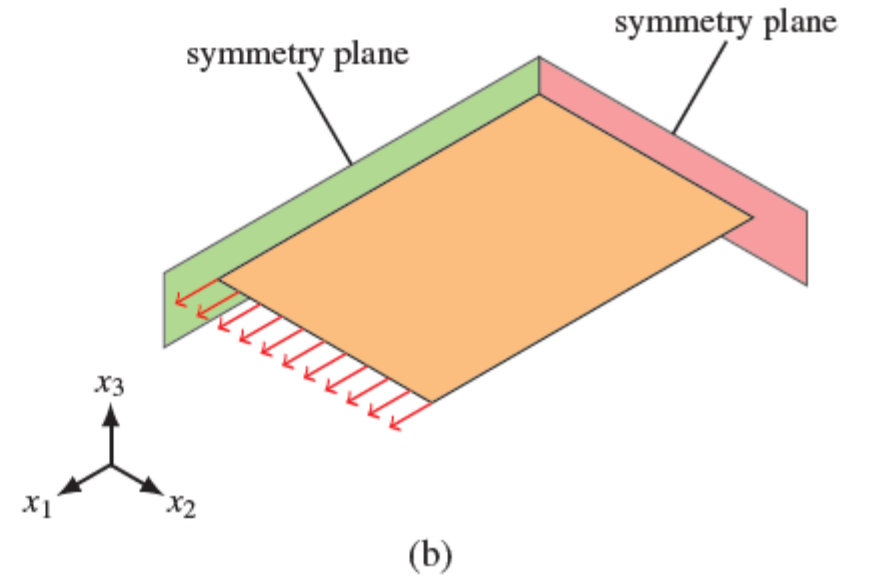
CL associées à un essai de traction selon la direction X1



Panneau périodique :
5 x 4 cellules

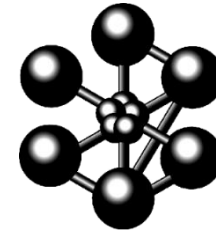


Matrice de **HOOK** construite
MANUellement à partir des
résultats d'optimisation –
elements DKT

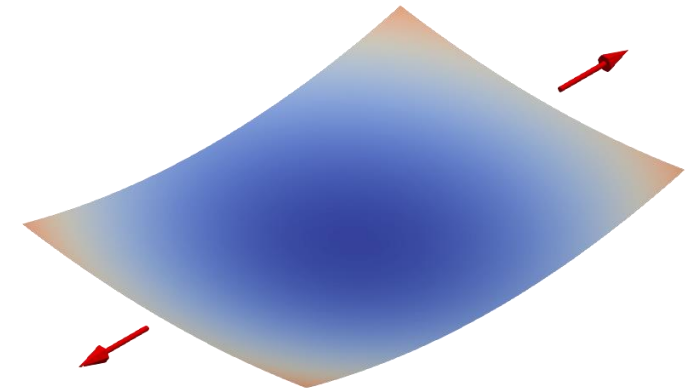
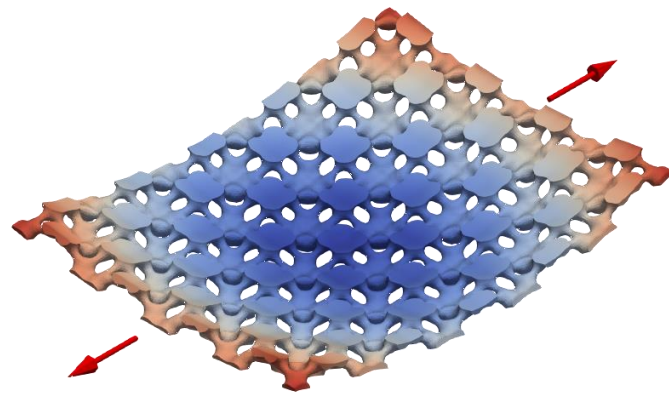
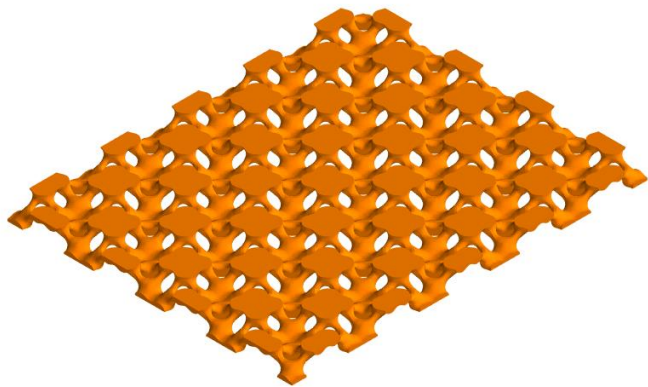


Déformation sous un chargement de traction (direction X1)

$$S^* = \begin{bmatrix} 11.74 & 4.024 & 0. & -14.23 & -10.47 & 0. \\ 4.024 & 11.63 & 0. & -13.12 & -12.33 & 0. \\ 0. & 0. & 43.79 & 0. & 0. & -39.41 \\ -14.23 & -13.12 & 0. & 3934 & -878.1 & 0. \\ -10.47 & -12.33 & 0. & -878.1 & 3927 & 0. \\ 0. & 0. & -39.41 & 0. & 0. & 5035 \end{bmatrix}$$



Formes obtenues avec [ISOV](#),
exportation vers Paraview



...tentative avec un maillage plus fin

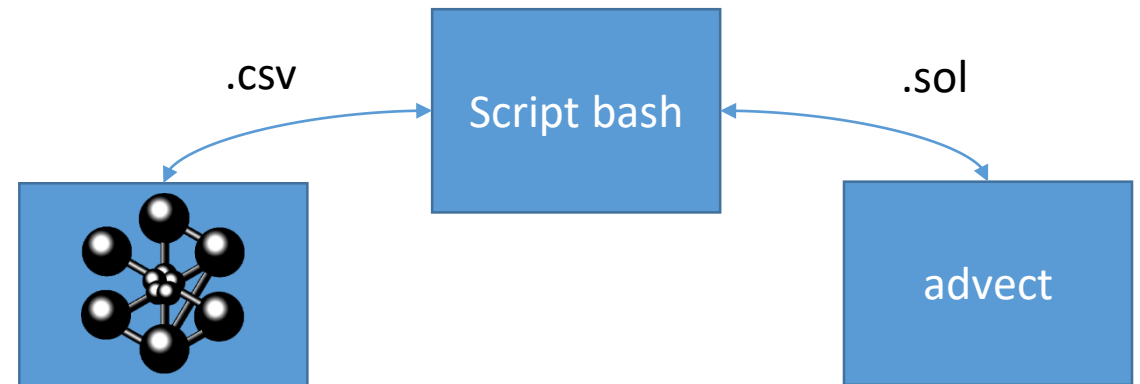
- Maillage **TET4**

- 100 x 100 x 25
 - 265 226 nœuds – 1250000 elements
- 80 x 80 x 20
 - 137 781 nœuds – 640000 elements
- 60 x 60 x 15
 - 59 536 nœuds – 270000 elements

Au bout de quelques itérations, erreurs de résolution du problème de cellule (homogénéisation)

- Maillage **CUB8**

- 100 x 100 x 25
 - 265 226 nœuds - 250000 elements
- Advect non compatible avec **CUB8** => **TET4**
- **CHPO SCAL** level set défini au nœuds

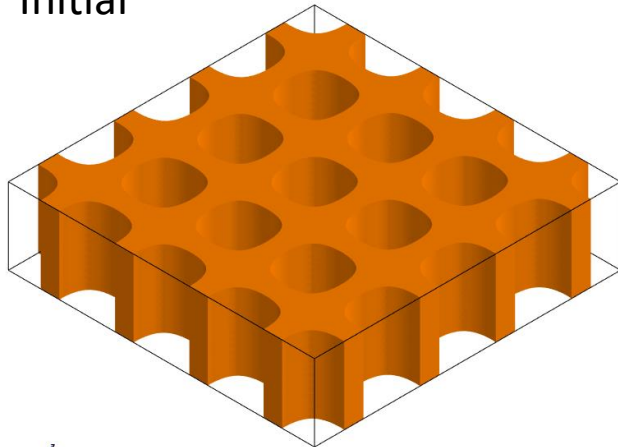


Résultats numériques

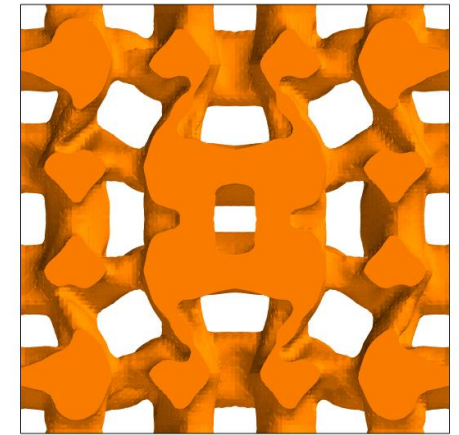
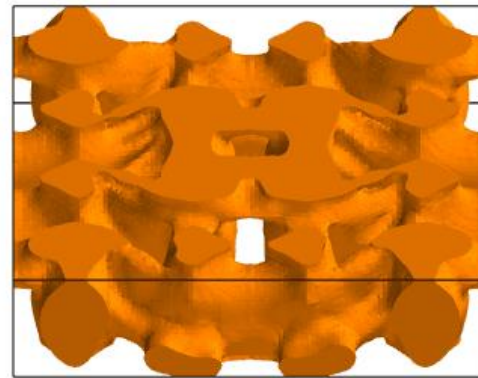
$$C^{\text{target}} = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.06 & * & * & 2.3e^{-3} & * \\ -0.06 & 0.12 & * & 2.3e^{-3} & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \hline * & 2.3e^{-3} & * & 6.3e^{-4} & * & * \\ 2.3e^{-3} & * & * & * & 6.3e^{-4} & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0.120 & -0.059 & 0 & -1.5e^{-3} & 1.8e^{-3} & 0 \\ -0.059 & 0.119 & 0 & 1.7e^{-3} & 1.0e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & -2.7e^{-4} \\ \hline -1.5e^{-3} & 1.7e^{-3} & 0 & 6.1e^{-4} & -3.2e^{-5} & 0 \\ 1.8e^{-3} & 1.0e^{-4} & 0 & -3.2e^{-5} & 6.0e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2.7e^{-4} & 0 & 0 & 1.7e^{-4} \end{bmatrix}$$

Initial



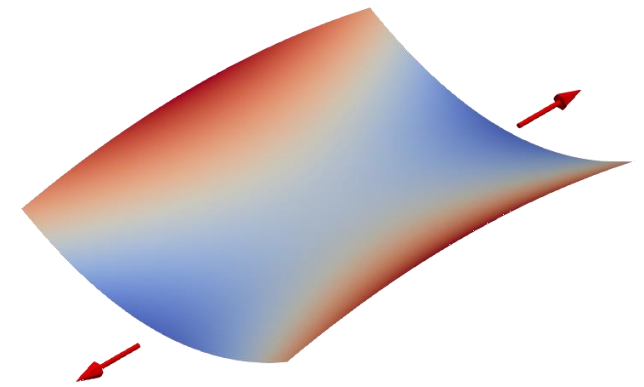
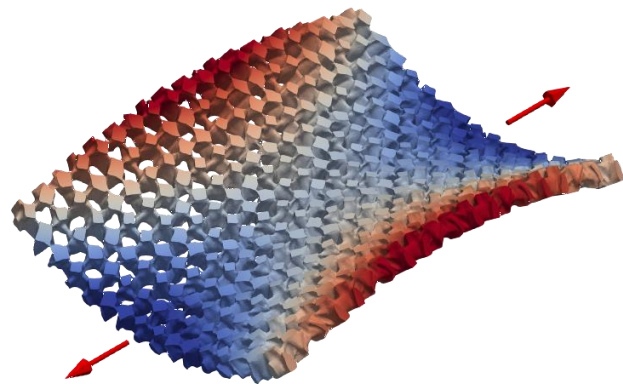
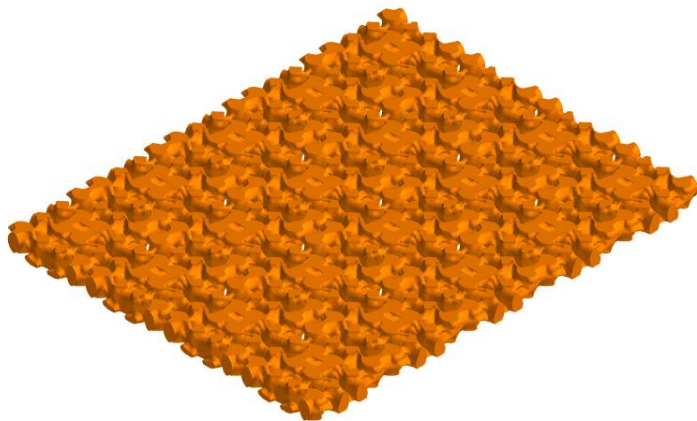
Final



Déformation sous un chargement de traction (direction X1)

$$S^* = \begin{bmatrix} 11.83 & 5.736 & 0. & 11.23 & -35.85 & 0. \\ 5.736 & 11.54 & 0. & -19.10 & -20.15 & 0. \\ 0. & 0. & 33.82 & 0. & 0. & 53.71 \\ 11.23 & -19.10 & 0. & 1723 & 61.42 & 0. \\ -35.85 & -20.15 & 0. & 61.42 & 1781 & 0. \\ 0. & 0. & 53.71 & 0. & 0. & 5968 \end{bmatrix}$$

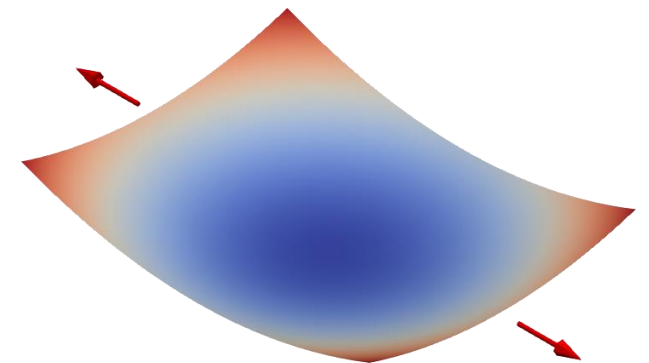
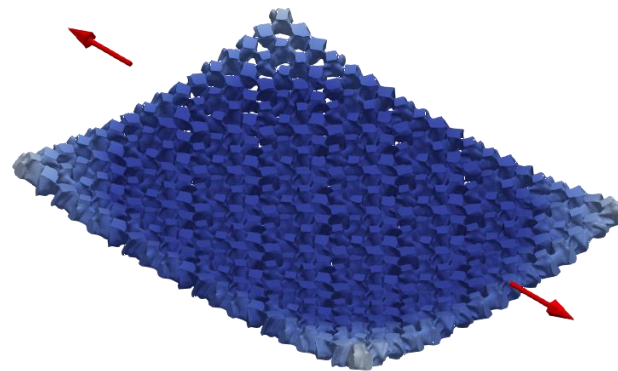
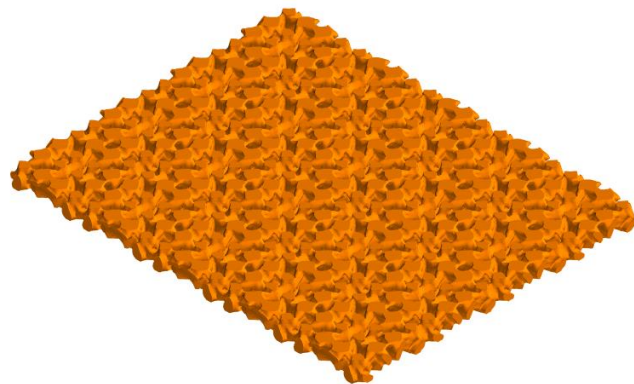
Formes obtenues avec [ISOV](#),
exportation vers Paraview



Déformation sous un chargement de traction (direction X2)

$$S^* = \begin{bmatrix} 11.83 & 5.736 & 0. & 11.23 & -35.85 & 0. \\ 5.736 & 11.54 & 0. & -19.10 & -20.15 & 0. \\ 0. & 0. & 33.82 & 0. & 0. & 53.71 \\ 11.23 & -19.10 & 0. & 1723 & 61.42 & 0. \\ -35.85 & -20.15 & 0. & 61.42 & 1781 & 0. \\ 0. & 0. & 53.71 & 0. & 0. & 5968 \end{bmatrix}$$

Formes obtenues avec [ISOV](#),
exportation vers Paraview



Conclusion

Optimisation de microstructures pour des panneaux à couplage extension – flexion

- Hypothèse des petites déformations
- Elasticité linéaire

Résultats

- Extension des techniques d'optimisation classique en 2D
- Génération de nouvelles formes
- Comportement élastique des formes finales assez proche de la cible

Perspectives

- Optimisation avec une interface fine

F. Agnelli, G. Nika, A. Constantinescu. “Design of thin micro-architected panels with extension-bending coupling effects using topology optimization” *submitted (2021)*



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS



Merci de votre attention!

filippo.agnelli@polytechnique.edu

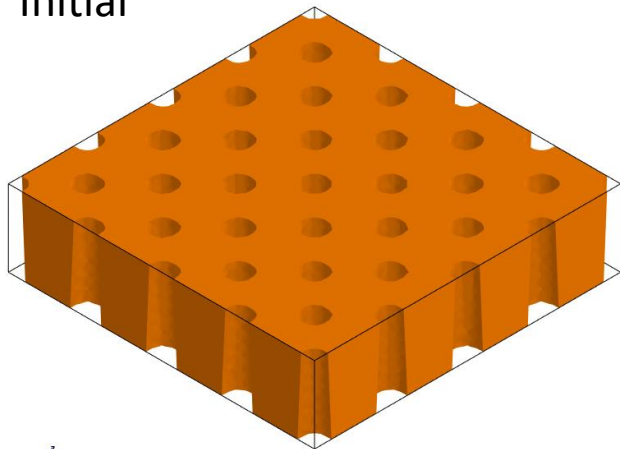


Numerical results

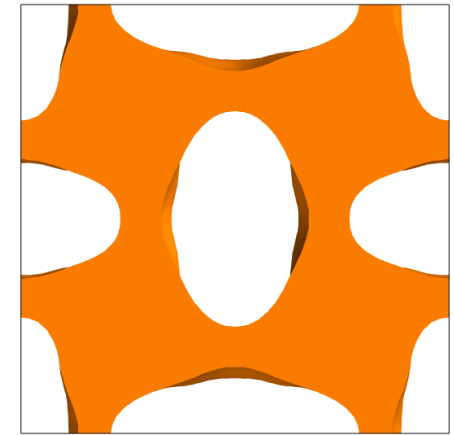
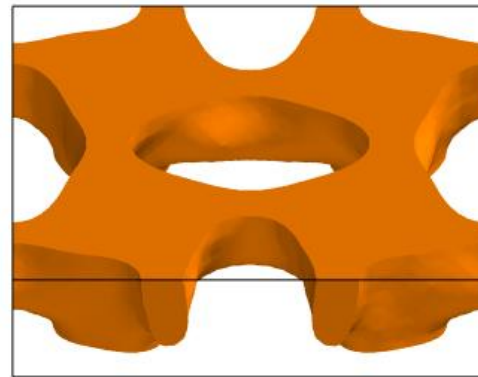
$$C^{\text{target}} = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.06 & * & * & 2.3e^{-3} & * \\ -0.06 & 0.12 & * & 2.3e^{-3} & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \hline * & 2.3e^{-3} & * & 6.3e^{-4} & * & * \\ 2.3e^{-3} & * & * & * & 6.3e^{-4} & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0.124 & -0.056 & 0 & 3.8e^{-3} & 1.2e^{-4} & 0 \\ -0.056 & 0.125 & 0 & -2.1e^{-4} & 2.9e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.028 & 0 & 0 & 8.5e^{-4} \\ \hline 3.8e^{-3} & -2.1e^{-4} & 0 & 8.8e^{-4} & 7.7e^{-5} & 0 \\ 1.2e^{-4} & 2.9e^{-3} & 0 & 7.7e^{-5} & 9.4e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 8.5e^{-4} & 0 & 0 & 3.2e^{-4} \end{bmatrix}$$

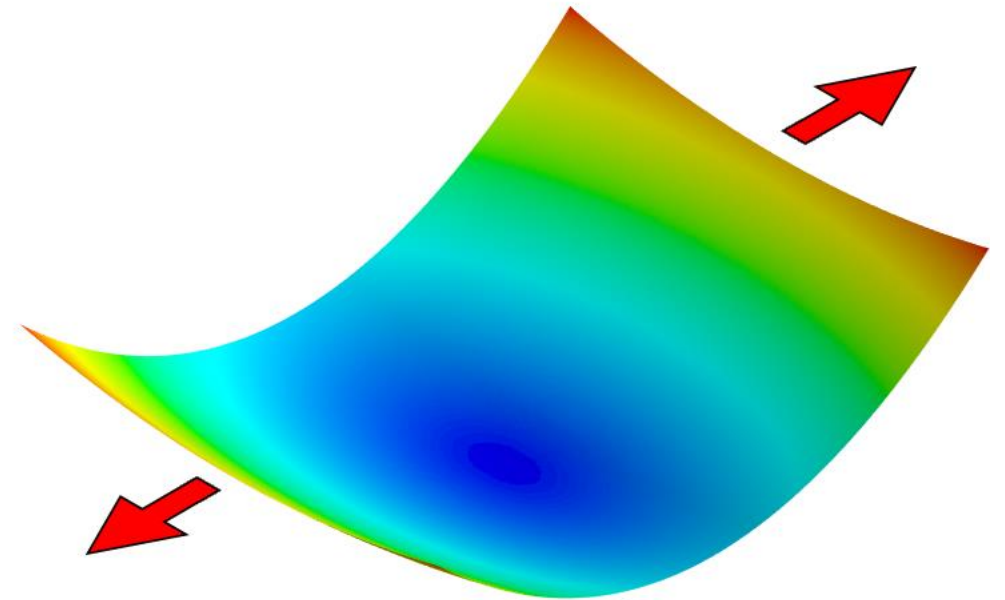
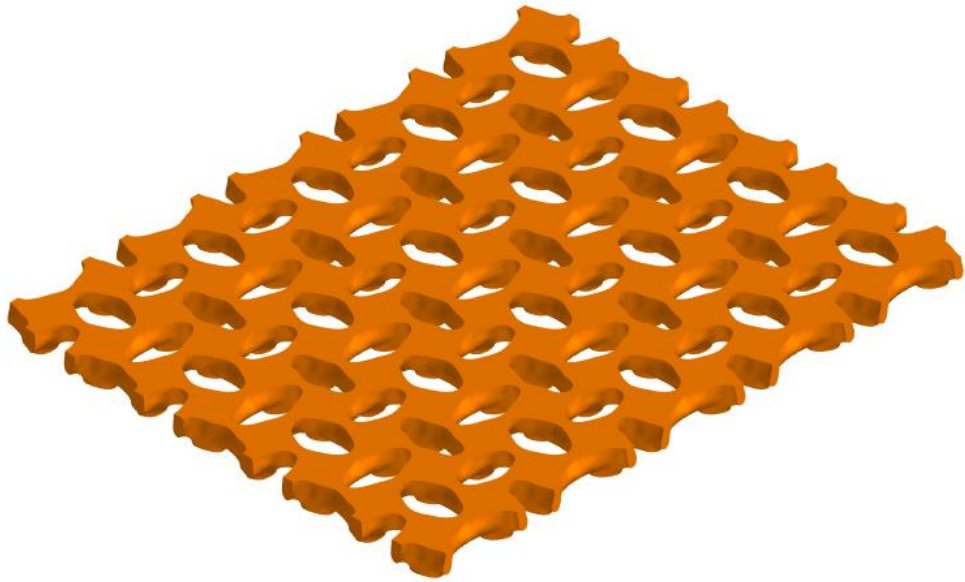
Initial



Final



Response under uniaxial tensile test

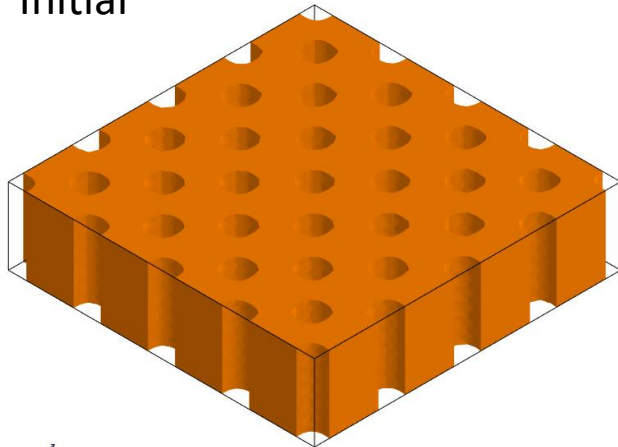


Numerical results

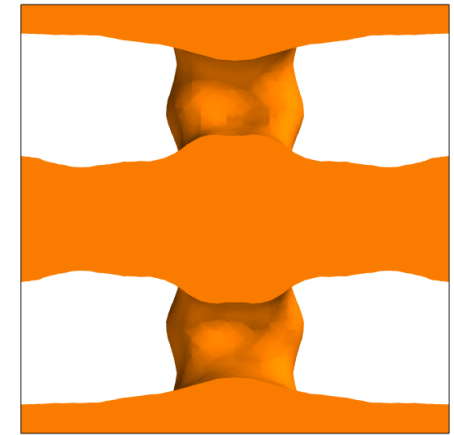
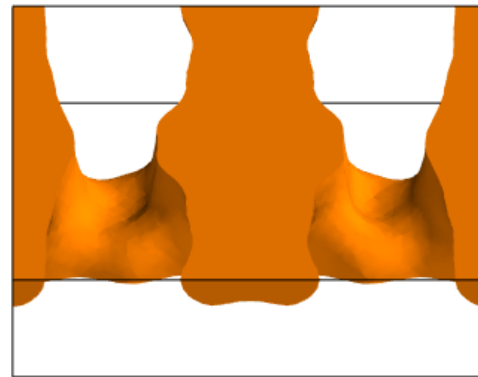
$$C^{\text{target}} = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.06 & * & * & 2.3e^{-3} & * \\ -0.06 & 0.12 & * & 2.3e^{-3} & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \hline * & 2.3e^{-3} & * & 6.3e^{-4} & * & * \\ 2.3e^{-3} & * & * & * & 6.3e^{-4} & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0.124 & -0.056 & 0 & 3.8e^{-3} & 1.2e^{-4} & 0 \\ -0.056 & 0.125 & 0 & -2.1e^{-4} & 2.9e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.028 & 0 & 0 & 8.5e^{-4} \\ \hline 3.8e^{-3} & -2.1e^{-4} & 0 & 8.8e^{-4} & 7.7e^{-5} & 0 \\ 1.2e^{-4} & 2.9e^{-3} & 0 & 7.7e^{-5} & 9.4e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 8.5e^{-4} & 0 & 0 & 3.2e^{-4} \end{bmatrix}$$

Initial



Final



Response under uniaxial tensile test

