

Décomposition de Helmholtz discrète et applications

Stéphane Gounand¹, Olivier Lafitte², Jean-Paul Magnaud¹, Etienne Studer¹, Roberta Scarpa³

+ discussions Pascal Omnes, Jacques Segré,...

¹CEA-Saclay, Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
(stephane.gounand@cea.fr)

² Institut Galilée, Université Paris XIII

³ Université de Pise

27 novembre 2013



Plan

1. Contexte : décomposition de Helmholtz et Mécanique des Fluides ;
2. Une méthode éléments finis pour le calcul de la décomposition de Helmholtz ;
3. Application 1 : réduction des “vitesses parasites” ;
4. Application 2 : post-traitement d’un champ vectoriel.

Décomposition de Helmholtz



Théorème fondamental de l'analyse vectoriel (Helmholtz-Hodge, 1858)

Soit $\mathbf{u} = o(|r|^{-1}) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ alors il existe (ϕ, ψ) potentiels scalaire et vecteur tels que :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \mathbf{rot}\psi$$

Propriétés :

- Unicité : pour $\phi, \psi = o(|r|^{-1})$ moyennant : $\nabla(\phi + C^{\text{ste}}) = \nabla\phi$ et $\mathbf{rot}(\psi + \nabla f) = \mathbf{rot}\psi$;
- Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \psi = 0$;
- Orthogonalité \mathcal{L}^2 : $\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi \cdot \mathbf{rot}\psi \, dV = 0$.

Réciproque :

Étant donnés ρ et \mathbf{j} , trouver \mathbf{u} tel que : $\nabla \cdot \mathbf{u} = \rho$ et $\mathbf{rot}\mathbf{u} = \mathbf{j}$.

Applications de la décomposition de Helmholtz

Théorie : G. Schwarz [Schwarz, 1995], Girault-Raviart [Girault and Raviart, 1986]

Article de synthèse (100 références) : Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V., and Bremer, P.-T. (2013). The Helmholtz-Hodge Decomposition A Survey. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 19(8) :1386–1404

Domaines d'application :

- Graphisme, visualisation ;
- Reconnaissance de forme et robotique ;
- Analyse d'image ;
- Mathématiques ;
- Astrophysique et Géophysique ;
- Physique : électromagnétisme et mécanique des fluides...

Applications en mécanique des fluides incompressibles

1. Méthode de projection (Chorin-Temam, 1967) :

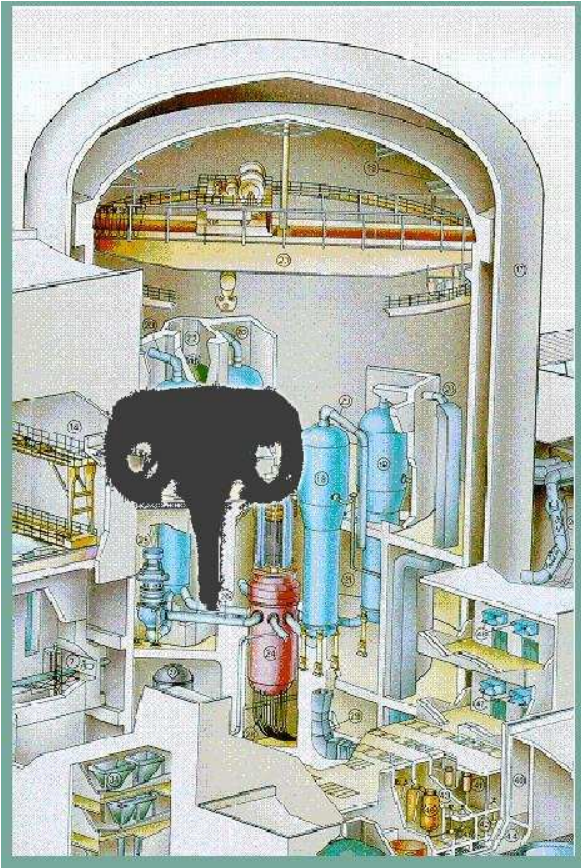
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Prédiction } \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^n + \nu \Delta \mathbf{u}^n \\ \textcircled{2} \text{ Correction } \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \end{array}$$

2. Stokes incompressible avec terme source :

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} \textcircled{1} \mathbf{f} = \nabla \phi + \text{rot } \psi \\ \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p_2 + \text{rot } \psi \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, p_2 - \phi)$$

Problématique des vitesses parasites : situation physique

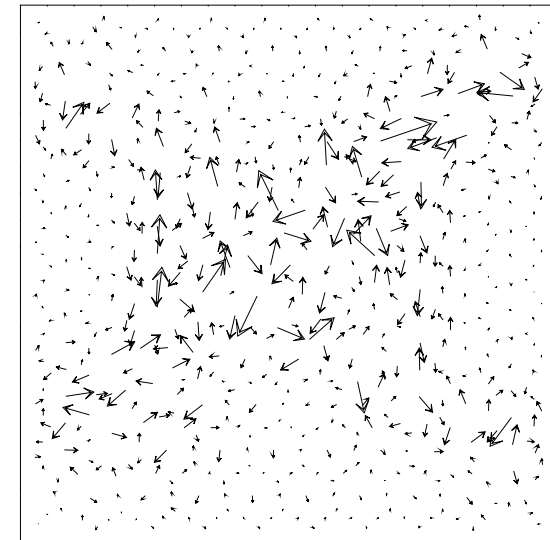
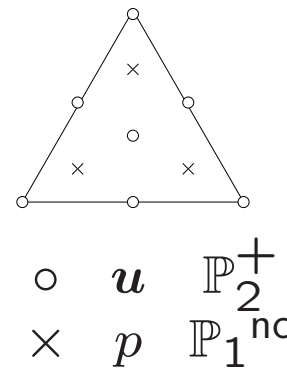
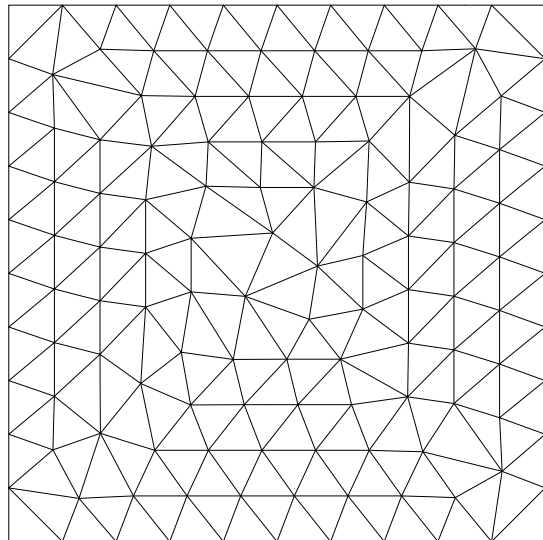


- zones en écoulement fort : $u \gg 1$;
- zones stratifiées :
 - $u \approx 0$;
 - $f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_z(z) \end{pmatrix} = \nabla F(z)$

Accident grave dans les centrales
nucléaires

Problématique des vitesses parasites : modèle numérique

$$\textcircled{1} \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} = \nabla F(z) = \nabla \left\{ z - \frac{1}{\pi} \sin[\pi(z - 0.5)] \right\}$$



Maillage $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$

$\|\mathbf{u}\|_\infty = 8.57 \times 10^{-6}$

Problématique des vitesses parasites : modèle numérique

Vitesses parasites :

- absentes en maillage structuré aligné sur les horizontales ;
- gênantes ? Pas toujours en tant que tel mais modèle de turbulence : $\nu_{\text{turb}} \propto \left\| \nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \right\|_2$.

Solutions envisagées :

- raffiner ;
- être plus précis sur la décomposition : changer d'éléments finis (Trio_U) ;
- être plus précis sur la décomposition : décomposition explicite.

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} \textcircled{1} \mathbf{f} = \nabla \phi + \mathbf{rot} \psi \\ \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p_2 + \mathbf{rot} \psi \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \end{array} \\
 (\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, p_2 - \phi)
 \end{array}$$

En discret, on gagne une liberté sur le choix des espaces pour ϕ et ψ .

Décomposition de Helmholtz-Hodge-Morrey (I)

En domaine borné Ω :

$$u = \nabla\phi + \text{rot}\psi + u_h$$

Partie harmonique :

$$u_h = \nabla\phi_h \quad \text{ou} \quad u_h = \text{rot}\psi_h$$

Propriétés :

$$\nabla \cdot u_h = 0 \Rightarrow \Delta\phi_h = 0$$

ou

$$\text{rot} u_h = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \psi_h = 0 \Rightarrow \Delta\psi_h = 0$$

Décomposition de Helmholtz-Hodge-Morrey (III)

Dimension 2 :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \mathbf{rot}\psi + \mathbf{u}_h$$

Définitions :

$$\mathbf{rot}\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u_x v_y - u_y v_x$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \circlearrowleft \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$

Relations :

$$\mathbf{rot}\psi = -\circlearrowleft \nabla\psi \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot \circlearrowleft \mathbf{v}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{u} = -\nabla \cdot \circlearrowleft \mathbf{u} \quad = \circlearrowleft \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{div}\mathbf{rot}\psi = 0$$

$$\mathbf{rot}\nabla\psi = 0$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{rot}\psi = -\Delta\psi + \nabla\nabla \cdot \psi$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{rot}\psi = -\nabla \cdot \nabla\psi = -\Delta\psi$$

Décomposition de Helmholtz-Hodge-Morrey (III)

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \mathbf{rot} \psi + \left\{ \begin{array}{l} \nabla \phi_h \\ \mathbf{rot} \psi_h \end{array} \right\}$$

Unicité : en domaine borné Ω , pas d'unicité : si (ϕ, ψ, ϕ_h) est une solution, alors $(\phi + \phi_h, \psi, 0)$ l'est aussi.

Choix : d'une solution $(\phi, \psi, \phi_h, \psi_h)$ à l'aide de conditions aux limites permettant de satisfaire les 5 conditions d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{u}_h \, d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Calcul de ϕ et ϕ_h (I)

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \text{rot}\psi + \nabla\phi_h$$

Problème d'optimisation (Neumann avec terme source)

$$\min_{\phi_N \in \mathcal{H}^1 \setminus \mathbb{R}} I(\phi_N) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla\phi_N - \mathbf{u})^2 \, d\Omega$$

Formulation faible (condition nécessaire de minimisation)

$$\forall \phi^* \quad \delta_{\phi^*} I(\phi_N) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} I(\phi_N + \epsilon\phi^*) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla\phi_N \cdot \nabla\phi^* - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi^* \, d\Omega = 0$$

EDP (avec intégration par parties)

$$\forall \phi^* \int_{\Omega} \text{EDP} \times \phi^* \, d\Omega + \int_{\delta\Omega} \text{C. Lim.} \times \phi^* \, d\delta\Omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\Delta\phi_N = -\nabla \cdot \mathbf{u} & \text{sur } \Omega \\ \nabla\phi_N \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

Cours Ensta [Gounand, 2012] pour plus de précisions.

Calcul de ϕ et ϕ_h (II)

Problème d'optimisation (Dirichlet avec terme source)

Problème d'optimisation

$$\text{ext}_{(\phi_D, \lambda_\phi)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \phi_D - \mathbf{u})^2 d\Omega + \int_{\delta\Omega} \lambda_\phi \phi_D d\delta\Omega$$

Formulation faible

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi^* - \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^* d\Omega + \int_{\delta\Omega} \lambda_\phi \phi^* + \phi_D \lambda^* d\delta\Omega = 0 \quad \forall (\phi^*, \lambda^*)$$

EDP

$$\begin{cases} -\Delta \phi_D = -\nabla \cdot \mathbf{u} & \text{sur } \Omega \\ \nabla \phi_D \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \lambda_\phi & \text{sur } \delta\Omega \\ \phi_D = 0 & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

Différence Dirichlet-Neumann (plus de terme source) [Angot et al., 2013]

Formulation faible $\int_{\Omega} \nabla \phi_{N-D} \cdot \nabla \phi^* d\Omega + \int_{\delta\Omega} \lambda_\phi \phi^* d\delta\Omega = 0 \quad \forall \phi^*$

EDP

$$\begin{cases} -\Delta \phi_{N-D} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla \phi_{N-D} \cdot \mathbf{n} = -\lambda_\phi & \text{sur } \delta\Omega \\ \phi_{N-D} = \phi_N & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

d'où : $\nabla \phi_D \perp \nabla \phi_{N-D}$ car : $\int_{\Omega} \nabla \phi_{N-D} \cdot \nabla \phi_D d\Omega = - \int_{\delta\Omega} \lambda_\phi \phi_D d\delta\Omega = 0$

Calcul de ψ et ψ_h

$$u = \nabla\phi + \text{rot } \psi + \text{rot } \psi_h$$

Problème de Neumann avec terme source :

Problème d'optimisation

$$\min_{\psi_N \in \mathcal{H}^1 \setminus \mathbb{R}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\text{rot } \psi_N - u)^2 \, d\Omega$$

Formulation faible

$$\int_{\Omega} \text{rot } \psi_N \cdot \text{rot } \psi^* - u \cdot \text{rot } \psi^* \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi^*$$

EDP

$$\begin{cases} \text{rot rot } \psi_N = \text{rot } u & \text{sur } \Omega \\ \text{rot } \psi_N \wedge n = u \wedge n & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

EDP2

$$\begin{cases} -\Delta\psi_N = \text{rot } u & \text{sur } \Omega \\ \nabla\psi_N \cdot n = u \cdot t & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

Conditions d'orthogonalité

Si on choisit :

$$(\phi, \psi, \phi_h, \psi_h) = (\phi_D, \psi_D, \phi_{N-D}, \psi_{N-D}) \text{ pour } \mathbf{u} = \nabla \phi + \mathbf{rot} \psi + \left\{ \begin{array}{l} \nabla \phi_h \\ \mathbf{rot} \psi_h \end{array} \right\}$$

On a bien :

Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega &= \underbrace{- \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{rot} \psi) \phi \, d\Omega}_0 + \int_{\delta\Omega} \phi (\mathbf{rot} \psi \cdot \mathbf{n}) \, d\delta\Omega \\ &= \underbrace{+ \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \nabla \phi) \psi \, d\Omega}_0 + \int_{\delta\Omega} \psi \cdot (\nabla \phi \wedge \mathbf{n}) \, d\delta\Omega \end{aligned}$$

Relations d'orthogonalités

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \mathbf{rot} \psi_D \, d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \mathbf{rot} \psi_{N-D} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \phi_{N-D} \cdot \mathbf{rot} \psi_D \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi_{N-D} \, d\Omega &= - \int_{\delta\Omega} \phi_D \lambda_{\phi} \, d\delta\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \psi_D \cdot \mathbf{rot} \psi_{N-D} \, d\Omega &= - \int_{\delta\Omega} \psi_D \lambda_{\psi} \, d\delta\Omega = 0 \end{aligned}$$

Discrétisation

Discrétisation naturelle : éléments finis conformes (Cast3M) ;

Coût : 4 laplaciens à résoudre pour trouver tous les potentiels ;

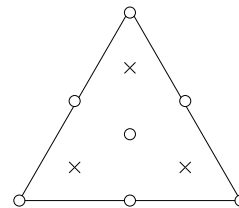
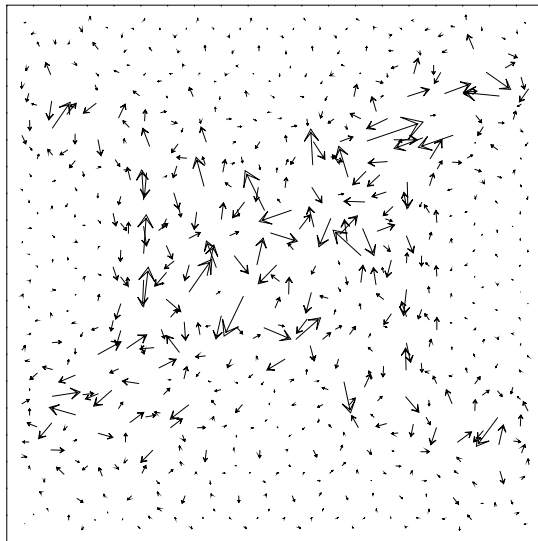
Différentes formes possibles de la décomposition :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \nabla \phi_D + \mathbf{rot} \psi_D + \nabla \phi_{N-D} \\
 \mathbf{u} &= \nabla \phi_D + \mathbf{rot} \psi_D + \mathbf{rot} \psi_{N-D} \\
 \mathbf{u} &= \nabla \phi_N + \mathbf{rot} \psi_N - \mathbf{u}_h \\
 \mathbf{u} &= \nabla \phi_N + \mathbf{rot} \psi_D \\
 \mathbf{u} &= \nabla \phi_D + \mathbf{rot} \psi_N
 \end{aligned}$$

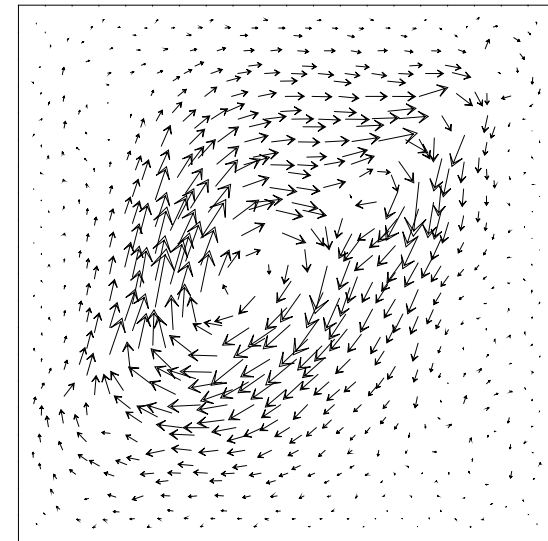
Note : lorsque $\text{div} \mathbf{u} = 0$, on a $\phi_D = 0$ et ψ_N s'appelle fonction de courant.

Application 1 : vitesses parasites (I)

$$\textcircled{1} \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{1} \mathbf{f} = \nabla \phi_N + \mathbf{rot} \psi_D \\ \textcircled{2} \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p_2 + \mathbf{rot} \psi_D \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \end{cases}$$



\circ \mathbf{u}, \mathbf{v} \mathbb{P}_2^+
 ϕ_N, ψ_D
 \times p, p_2 \mathbb{P}_1^{nc}



$$\|\mathbf{u}\|_\infty = 8.57 \times 10^{-6}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = 1.74 \times 10^{-7}$$

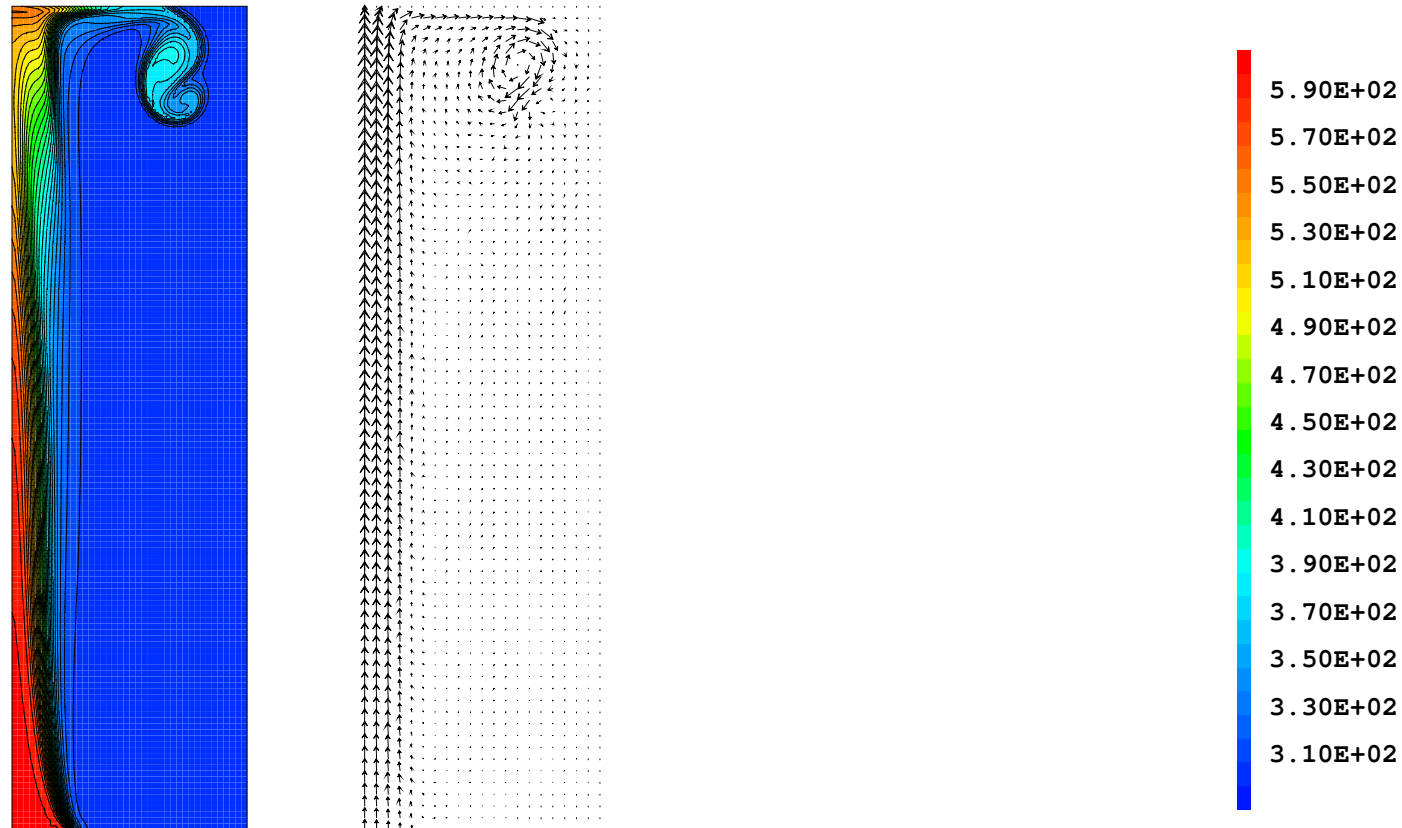
Application 1 : vitesses parasites (II)

Diminution des vitesses parasites :

Quantité	Méthode 1	Méthode 2	Gain
$\ u\ _\infty$	8.6×10^{-6}	1.7×10^{-7}	50
$\ u\ _2$	1.2×10^{-6}	5.3×10^{-8}	20
$ \nabla u _2$	9.5×10^{-5}	7.0×10^{-7}	135
$\ f - \nabla \phi_N - \text{rot } \psi_D\ _2$		2.1×10^{-3}	

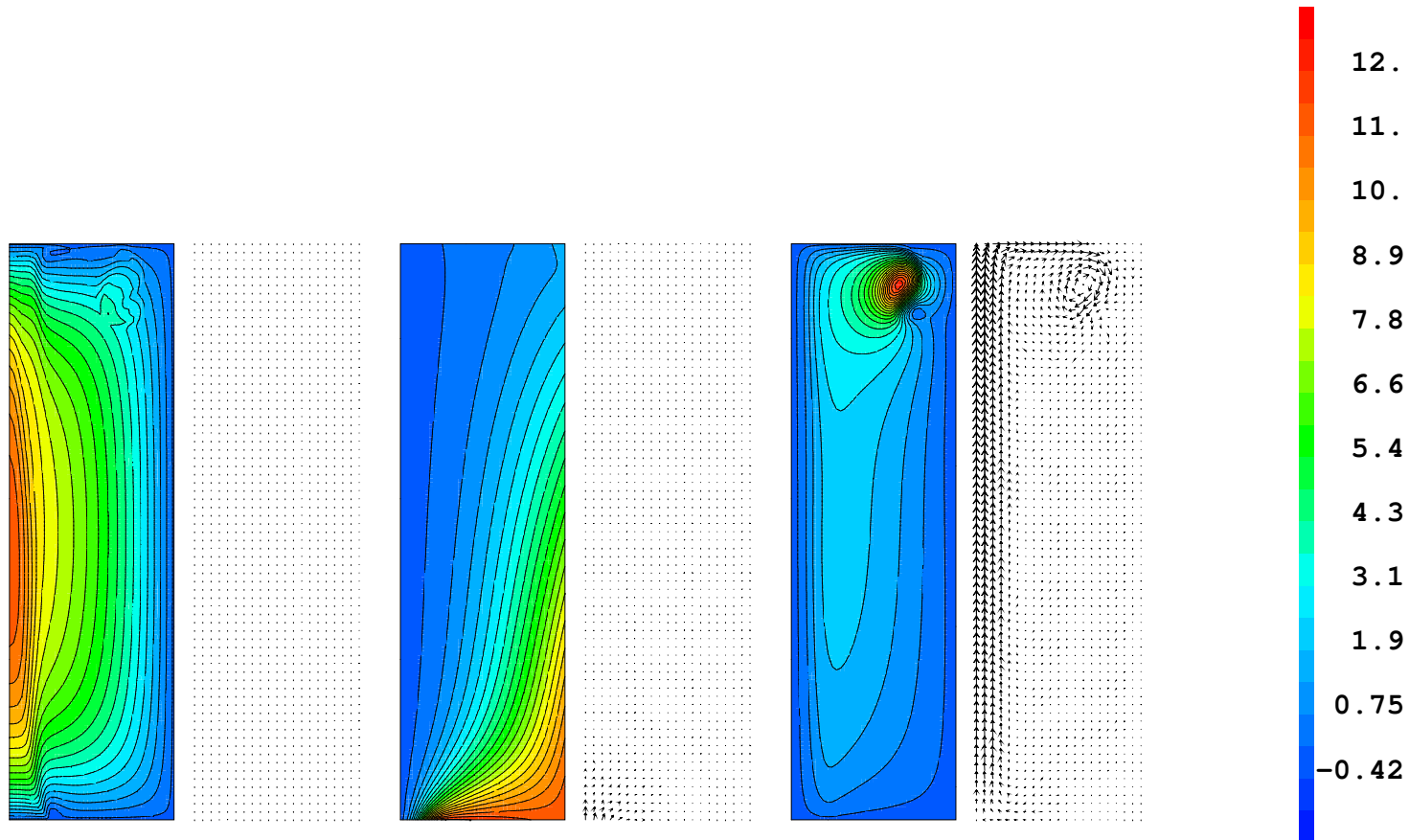
Condition d'orthogonalité : Zéro machine pour toutes les conditions.

Application 2 : post-traitement (I)



Injection d'air chaud dans une enceinte fermée. Modèle Bas Mach 2D
géométrie cylindrique $Re_{\text{injection}} = 200$. $t = 3s$.

Application 2 : post-traitement (II)



Décomposition de Helmholtz du champ des vitesses à $t = 3s$.
 $600 \times \phi, 10 \times \psi_h, \psi$.

Conclusion

Décomposition de Hodge :

—> 2D axisymétrique et 3D, procédure Cast3M.

Applications avec vitesses parasites :

—> Cas réaliste (benchmark OCDE), choix des éléments finis, ordre de convergence.

Bibliographie

- [Schwarz, 1995]** Schwarz, G. (1995). *Hodge Decomposition - A Method for Solving Boundary Value Problems*. Number 1607 in Lecture notes in mathematics. Springer.
- [Girault and Raviart, 1986]** Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations - Theory and Algorithms*. Number 5 in Springer series in Computational Mathematics. Springer.
- [Bhatia et al., 2013]** Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V., and Bremer, P.-T. (2013). The Helmholtz-Hodge Decomposition A Survey. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 19(8) :1386–1404.
- [Gounand, 2012]** Gounand, S. (2012). Introduction à la méthode des éléments finis en mécanique des fluides incompressibles. Technical report, CEA. Cours ENSTA Paristech B2-1 (129 pages). <http://www-cast3m.cea.fr/index.php?xml=supportcours>.
- [Angot et al., 2013]** Angot, P., Caltagirone, J.-P., and Fabrie, P. (2013). Fast discrete helmholtz-hodge decompositions in bounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 26(4) :445 – 451.