

# Calcul par éléments finis de la torsion d'une corde élastique élançée

- Contexte et intérêt
- Difficultés du problème
- Méthode des contraintes initiales
- Implantation dans Cast3M
- Auto contact
- Exemple de calcul
- Conclusion et perspectives

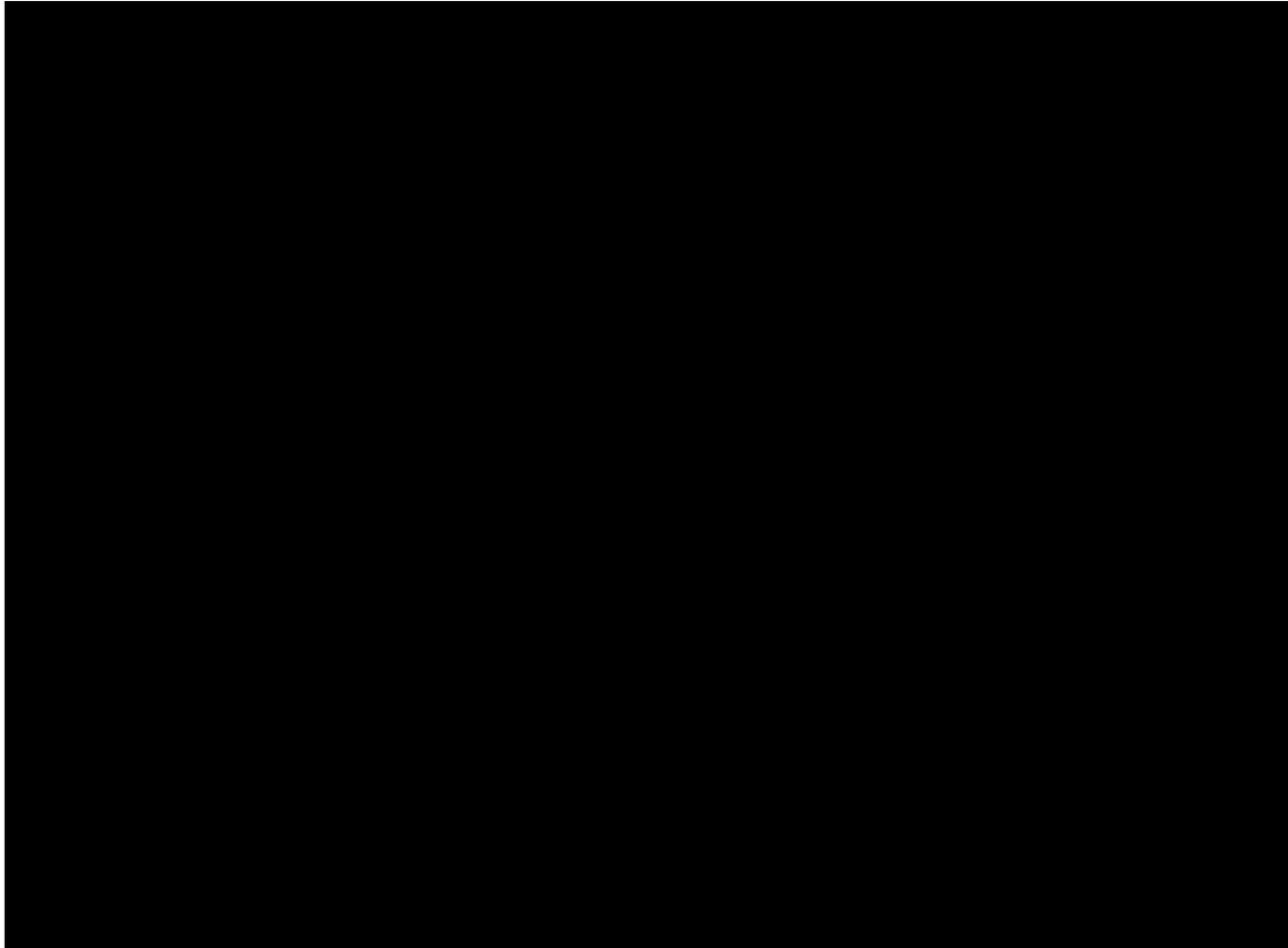
# Contexte au CEA

- Etudes de sûreté, analyses limites, chargements ultimes
- Sollicitation des structures jusqu'à la perte de toute résistance mécanique

## Problématique

- Instabilités, écrouissage négatif, flambages locaux
- Récupération de la stabilité après un saut de déplacements

# Un problème physique



# Difficultés du problème

- Très mauvais conditionnement de la raideur tangente, quasi-indétermination en rotation
- Passage d'instabilités, pas de contrôle possible, perte d'unicité
- Pas de garantie de trouver la solution physique
- Quelle est la solution physique?

# Quasi-statique

- A chaque instant de calcul recherche d'une solution en équilibre statique stable
- $\Delta F = B \Delta \sigma$
- $\Delta \sigma = C(\Delta \varepsilon)$
- $K^t > 0$

# Non linéarités géométriques

- Lagrangien réactualisé
- Terme non linéaire dans le calcul des déformations
- Transport des contraintes initiales
- Intégration sur la configuration finale

# Raideur tangente

- Raideur élastique + raideur transport des contraintes initiales

- Travail des contraintes dans une transformation u

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}$$

$$dW = \int_{\Omega} \sigma d\varepsilon = (F_0 + F)dq \quad \sigma = \sigma_0 + D(\varepsilon_L + \varepsilon_{NL})$$

$$dW = \int (\sigma_0 + D(\varepsilon_L + \varepsilon_{NL})) (d\varepsilon_L + d\varepsilon_{NL}) = (F_0 + F)dq$$

$$dW \approx \int \sigma_0 d\varepsilon_L + \int D\varepsilon_L d\varepsilon_L + \int \sigma_0 d\varepsilon_{NL}$$

$$dqF_0$$

$$dqKq$$

$$dqK_{sig}q$$

$$\varepsilon_{ijNL} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad d\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

# Non linéaire géométrique

$$dqK_{sig}q = \int \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial du}{\partial x}$$

$$u = \sum N_i q_i \quad du = N dq$$

$$\frac{\partial du}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} dq \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} q$$

$$dqK_{sig}q = dq \left( \int_{\Omega} \sigma_0 \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) q$$

# Contacts

- Formulation point-facette
- Condition unilatérale normale à la facette
- Recherche automatique des couples (points facettes) candidats
- Régularisation direction du contact
- Traitement de l'auto-contact

# Contraintes initiales

- Déplacement  $U$
- → Déformations  $\varepsilon$
- → Contraintes  $\sigma$  (avec le comportement)
- → Forces nodales équivalentes :  $F = B \sigma$
- → Actualisation forces extérieures et CL
- → Résidu  $R = F - F_{\text{ext}} - F_{\text{react}}$
- → Incrément déplacement  $\Delta U = O^{-1} R$
- On itère

# Contraintes initiales (convergence)

$$\left| \frac{U_{n+1} - U_e}{U_n - U_e} \right| < 1$$

- $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{elas}} + \mathbf{K}_{\text{sig}}$
- $U_{n+1} = U_n + \mathbf{O}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{K}(U_n))$
- $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{K}(U_e)$
- $U_{n+1} = U_n + \mathbf{O}^{-1} \mathbf{K}'(U_e - U_n)$
- $U_{n+1} - U_e = (\mathbf{I} - \mathbf{O}^{-1} \mathbf{K}') (U_n - U_e)$

# Convergence (suite)

- $-1 < O^{-1} K' < 1$
- $0 < O^{-1} K' < 2$
- Problème :  $K'$  change pendant les itérations (raideur tangente) à cause du changement de la géométrie
- Si  $O^{-1}K'$  petit convergence lente
- $O = K'$  donne la meilleure convergence

# Remarque

- Si  $O$  n'est pas positif:
  - $\Delta U_R$  négatif éventuellement
  - Vérifie l'équilibre mais pas le bon sens
- **→**  $O$  doit être positif
- $O = K_{\text{elas}} + K_{\text{sigm}} + K_{\text{augm}}$

# Critère de convergence

- Équilibre :  $R=0$  (critère absolu)
  - Critère global
  - Numérique → critère relatif
  - Valeur de référence ?
    - Forces extérieures ou réactions (depl imposé)
    - Pb si calcul thermique structure libre
    - Forces internes par rapport forces 1<sup>er</sup> pas
    - Retour à l'état initial

# Critères de convergence -2

- Stabilité des variables (critère de Cauchy)
  - Critère local
    - Déformations, contraintes
    - Variables internes
    - CL ou chargement variable
    - Vérification du comportement
- Nécessité des 2 types de critères : global et local

# Détection non convergence

- Mathématiquement :  $\forall \varepsilon, \exists N \text{ Crit}(N) > \varepsilon$
- Algorithmiquement :  $\forall \varepsilon$  et  $\forall N \text{ Crit}(N) > \varepsilon$
- Nombre d'itérations pas un bon critère car dépend de la vitesse de convergence
- Dans Cast3M : pas d'amélioration du critère au bout de  $\Delta$  itérations :
  - $N \text{ Crit}(N) > \text{Crit}(N - \Delta)$
- 2 critères : convergence  $\varepsilon$  et non convergence  $\Delta$

# Convergence forcée

- En cas de non convergence, utilisation de la solution non convergée:
  - Actualisation de la géométrie
  - Mise à jour des variables internes
  - Recalcul des conditions de contacts
- Pas d'incrément de chargement
  - Nouveau pas avec uniquement le résidu

# Taille des pas

- Linéarisations variées:
  - Déformations
  - Comportement
- Variations raideur tangente
- ➔ Nécessité de limiter la taille des pas
- 1% en incrément de déformation (dans les directions principales)

# Accélérations de convergence

- O non optimal
  - Coût de la résolution
  - Contrainte de positivité
  - Variation de  $K^T$  dans le pas
- ➔ Accélération de convergence
  - Raideur tangente constante
  - Raideur tangente variable

# Raideur tangente constante

- Recherche sur sous espace
- Les itérations définissent des couples  $(U_i, R_i)$  vérifiant l'équilibre :  $F_{\text{ext}} - F_{\text{int}} = R_i$
- Supposons l'existence opérateur tangent  $T$
- $R_i - R_j = T (U_i - U_j)$

# Raideur tangente constante - 2

- $U = U_n + \sum \lambda_i (U_i - U_n)$
- $R = R_n + \sum \lambda_i (R_i - R_n)$
- Minimisation de  $R^2$  (autres normes possibles)
- $R \partial R / \partial \lambda_k = 0$
- $(R_n + \sum \lambda_i (R_i - R_n)) R_k = 0$
- Résolution système linéaire  $\rightarrow \lambda_i$
- continuer avec le nouveau  $U$

# Raideur tangente constante - 3

- Dans Cast3m accélération tous les 2 pas avec 4 itérés. Compromis stabilité vitesse.
- Correction direction de l'incrément
- En fait on accélère les forces (conditions unilatérales)
- Calcul une projection de T sur le sous-espace engendré par les itérés

# Raideur tangente variable

- $U = \lambda U_2 + (1 - \lambda) U_1$
- $K = \lambda K_2 + (1 - \lambda) K_1$
- $dR = KdU = [\lambda K_2 + (1 - \lambda) K_1](U_2 - U_1)d\lambda$
- $dR$  premier degré,  $R$  second degré
- Minimisation de  $R^2$
- $R \partial R / \partial \lambda_k = 0$
- Résolution équation du troisième degré

# Accélération de convergence & contraintes initiales

- Pour être sûr que l'extrémum trouvé par l'accélération de convergence soit dans la bonne direction, correction du calcul du résidu par le terme d'augmentation si il y a lieu pour rendre le problème positif
- $R^* = B\sigma + K_{\text{augm}} \Delta U - F_{\text{ext}}$
- Test de convergence avec le résidu vrai

# Contacts

- Résolution des conditions unilatérales par une méthode de statuts
- Convergence garantie si la raideur hors conditions unilatérales est positive
- Problème: pendant le passage d'une instabilité, la raideur tangente n'est pas positive
  - Cas test: retournement de fond contrôlé par un contact

# Contraintes initiales modifié

- Nouvel algorithme dans Cast3M:
  - Actualisation géométrie
  - Actualisation contact
  - Déséquilibre R
  - Calcul  $O = K_{elas} + K_{sigm}$
  - Si O non positif augmentation de O par  $K_{augm}$

# Boucle interne

- Répéter
  - Calcul  $\Delta U = O^{-1}R$ 
    - Si non convergence contact revoir  $K_{augm}$
    - Si  $\varepsilon$  trop grand réduire proportionnellement  $\Delta U$
  - Calcul  $R = B\sigma - F_{ext} - F_{react}$
  - Si  $K_{augm}$  non nul test non convergence
    - Fin itérations si test ok
  - Si  $K_{augm}$  nul test convergence
    - Sortie si test ok
- Fin Répéter

# Convergence contraintes initiales

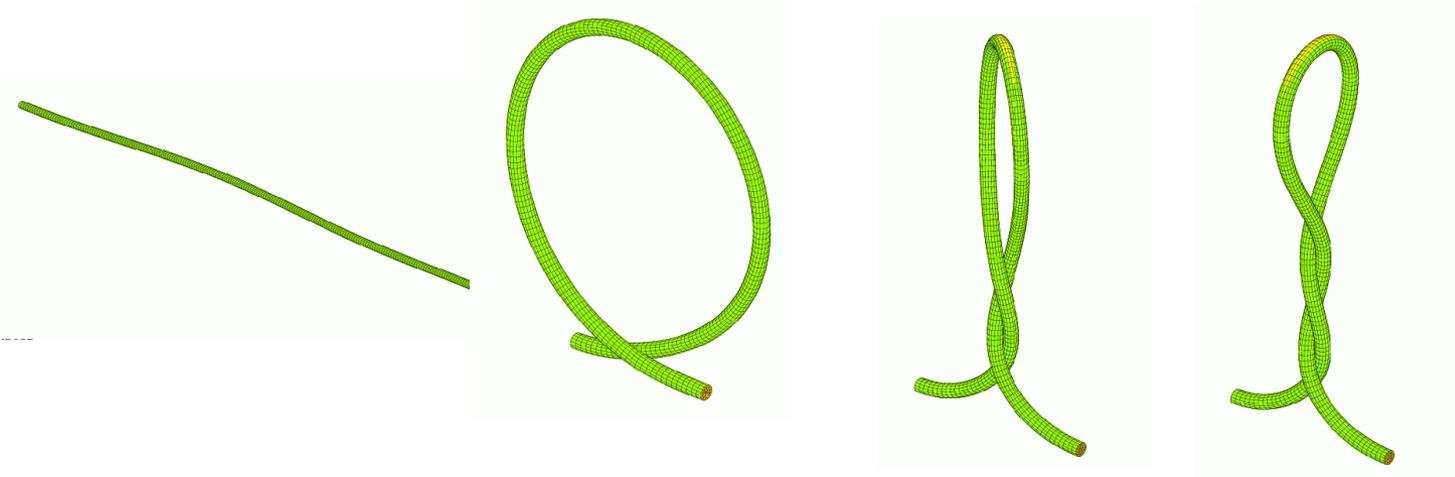
- $K^T > 0$ 
  - Compte tenu des contacts actifs
- $B\sigma - F_{\text{ext}} - F_{\text{react}}$  petit
- Stationnarité des itérations

# Corde élastique

- Longueur  $10^{-1}$  dans la direction UX
- Rayon  $1.414 \cdot 10^{-3}$
- Young indifférent
- NU 0.35
- UX UY UZ bloqué sur extrémité 1
- UY UZ bloqué sur extrémité 2
- Chargement rotation imposée extrémité 2
- 200 pas par tour
- Élément prisme à 6 noeuds

# Résultat corde

- Flambage initial vers 2,8 tours
- Succession d'instabilités entre des états stables.
- Fin (provisoire) du calcul vers 3,2 tours



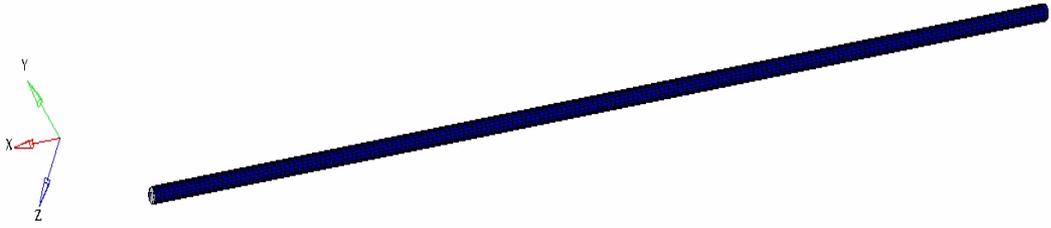
# Résultats

Contour Plot  
Stress(vonMises)  
Analysis system

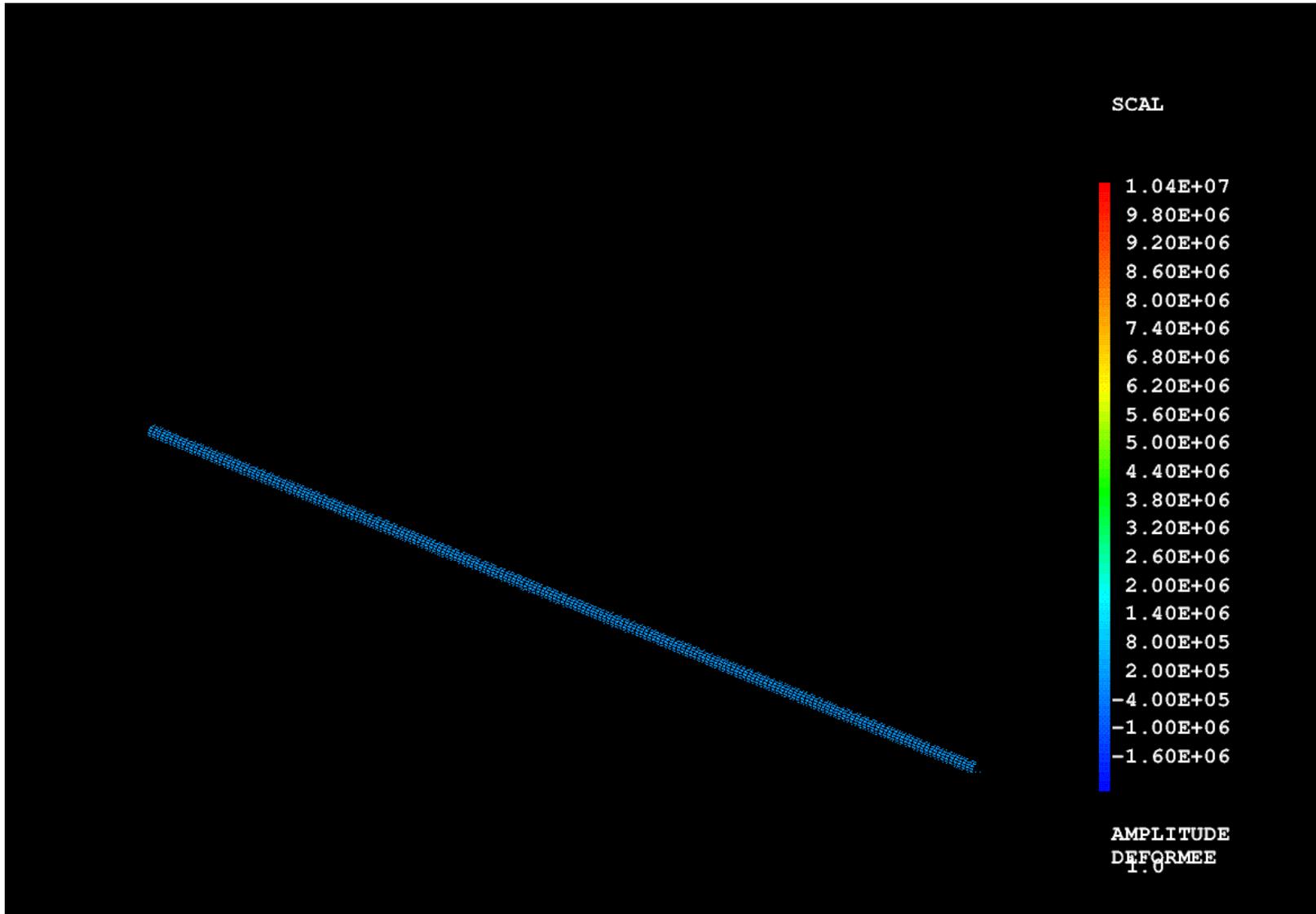
1.095E+01
9.738E+00
8.521E+00
7.303E+00
6.086E+00
4.869E+00
3.652E+00
2.434E+00
1.217E+00
0.000E+00

■ No result  
Max = 1.095E+01  
SOLID 3201  
Min = 0.000E+00  
SOLID 15

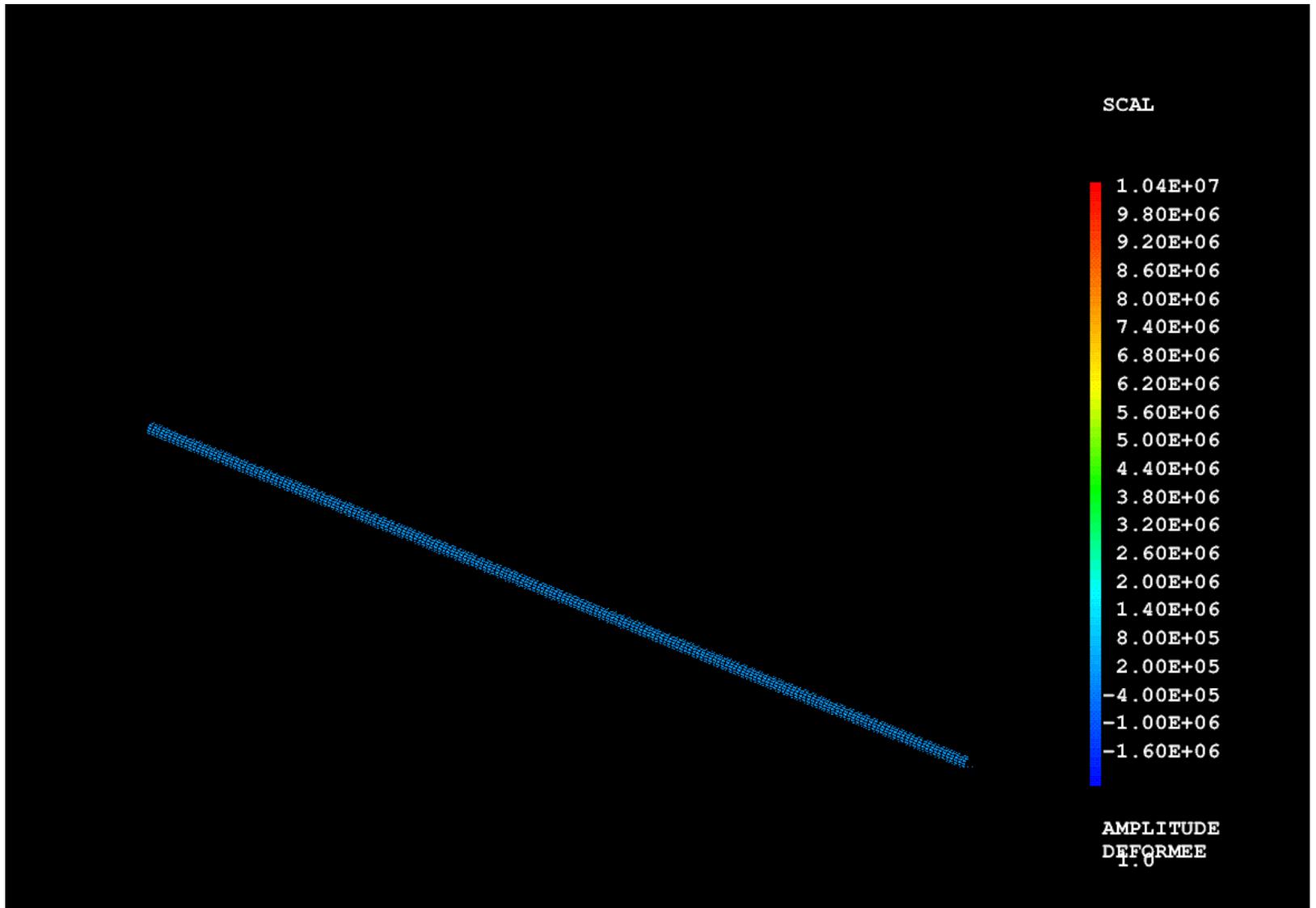
Model info: ficelle  
Result: /home/support/data/Emilien/ficelle/flambement3/ficelle.h3d  
Loadcase 1 : Time = 0.000000  
Frame 1



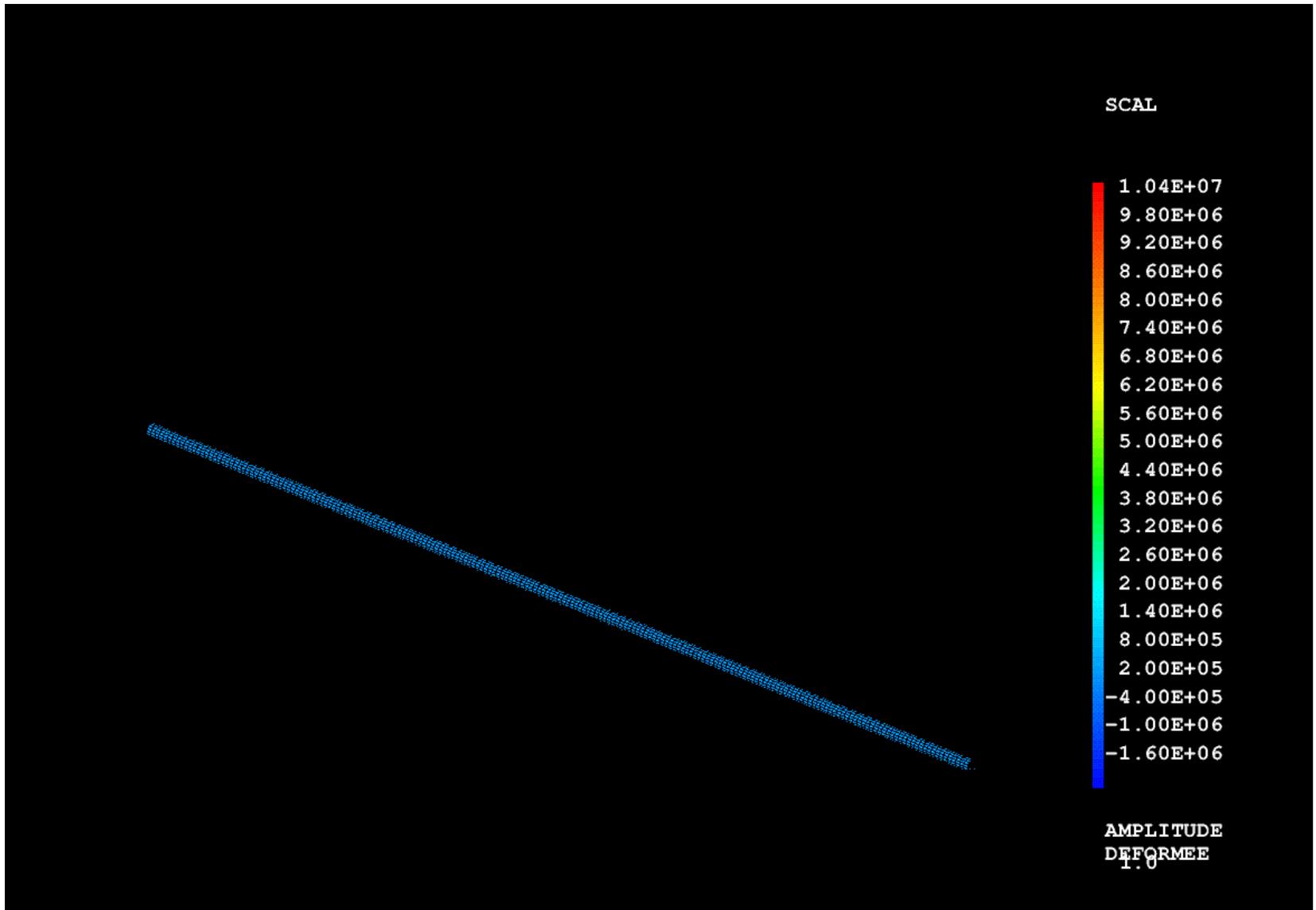
# Equilibre



# Dynamique

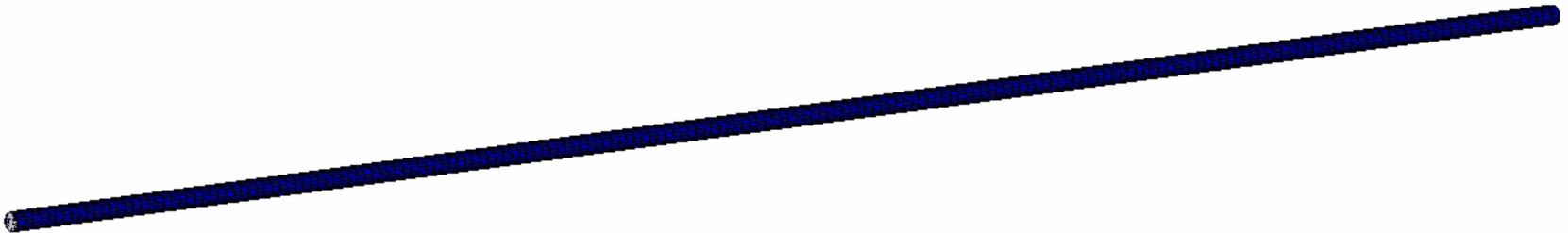


# Libre en rotation



# Avec Radioss

Result: /home/support/dat



# Conclusion

- Possibilité dans Cast3M (2014) de traiter les passages d'instabilités et les problèmes à raideur tangente nulle
- Développement réalisé entièrement en langage de données de Cast3M, utilisation des opérateurs existants

# Reste à faire

- Contrôle déformation élément de contact
- Amélioration calcul augmentation
- Couplage instabilité et NL comportement, plasticité