

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



# ANALYSES NON-LINÉAIRES DE ROTOR AVEC DÉFAUTS

Benoit Prabel

*CEA Saclay - DEN/DM2S/SEMT/DYN*

*benoit.prabel@cea.fr*

[www.cea.fr](http://www.cea.fr)

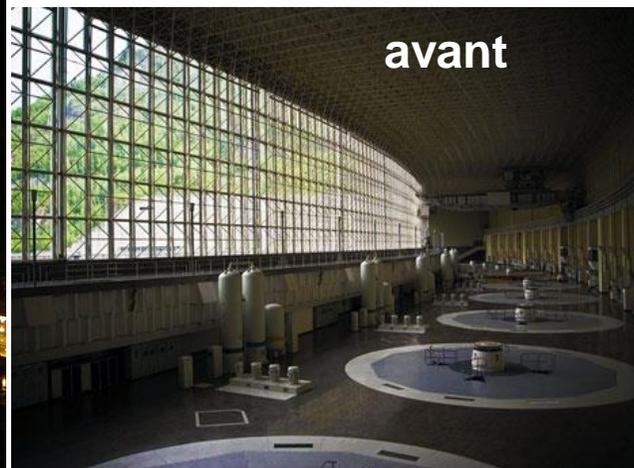
<http://www-cast3m.cea.fr/>

# Position du problème

- Contexte : Etude des machines tournantes
  - But : maîtrise des risques liés aux vibrations en conditions normales et accidentelles de fonctionnement



- Accident du barrage hydraulique de Sayano-Shushenskaya



# Position du problème

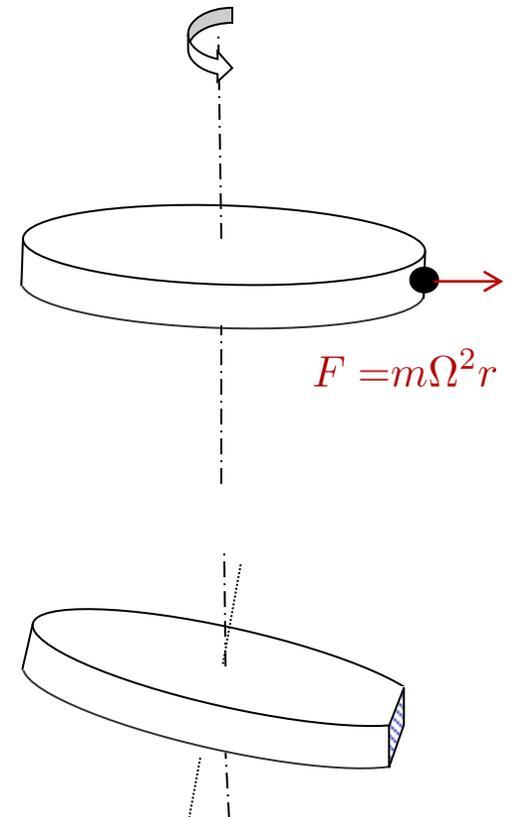
- Modélisation des machines tournantes :
  - Analyses linéaires aujourd'hui « standards » dans Cast3M mais parfois insuffisantes pour reproduire la physique
- 2 Exemples avec des Non-Linearités :
  - Exemple 1 : Montée en vitesse d'un rotor avec défaut  
→ Effets centrifuges non-linéaires
  - Exemple 2 : Réponse au balourd avec des composants hydrodynamiques (paliers, ...) non-linéaires

# Plan

- Exemple 1 : Montée en vitesse d'un rotor avec défaut  
→ Effets centrifuges non-linéaires
- Exemple 2 : Réponse au balourd avec des composants hydrodynamiques non-linéaires

# Position du problème

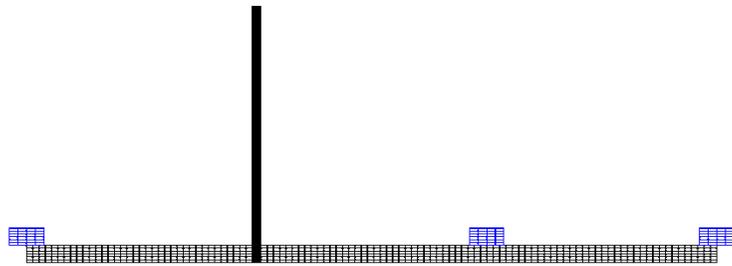
- Soit un **rotor avec un défaut de géométrie** :
  1. Quel sera l'impact de ce défaut sur le comportement **vibratoire** de la structure ?
  2. La réponse obtenue est-elle stable ?
- Réponse « classique » :  
modélisation du rotor sans défaut  
et introduction d'un **balourd**
- Réponse envisagée :  
modélisation **3D** avec prise en compte  
du **défaut dès le maillage** !



# Modélisations possibles

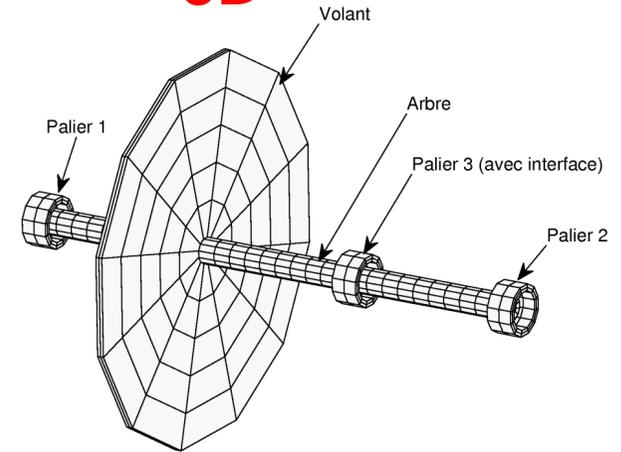
- Modélisations :
  - Éléments de **poutre** dans le repère fixe
  - Éléments massifs et de coque dans le repère tournant (+ interaction avec stator défini dans repère fixe)

mode de **Fourier** (axisymétrique)



$$\underline{u}(r, z, \theta) = \begin{bmatrix} N_i(r, z) \cos(n\theta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(r, z) \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(r, z) \sin(n\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} UR \\ UZ \\ UT \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} N_i(r, z) \sin(n\theta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(r, z) \sin(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(r, z) \cos(n\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} IUR \\ IUZ \\ IUT \end{pmatrix}$$

**3D**



$$\underline{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} N_i(x, y, z) & & \\ & N_i(x, y, z) & \\ & & N_i(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} UX \\ UY \\ UZ \end{pmatrix}$$

# Modélisation dans le repère tournant

- Equilibre dans le repère tournant

- Repère tournant pour le rotor

- Cinématique :

- Position :

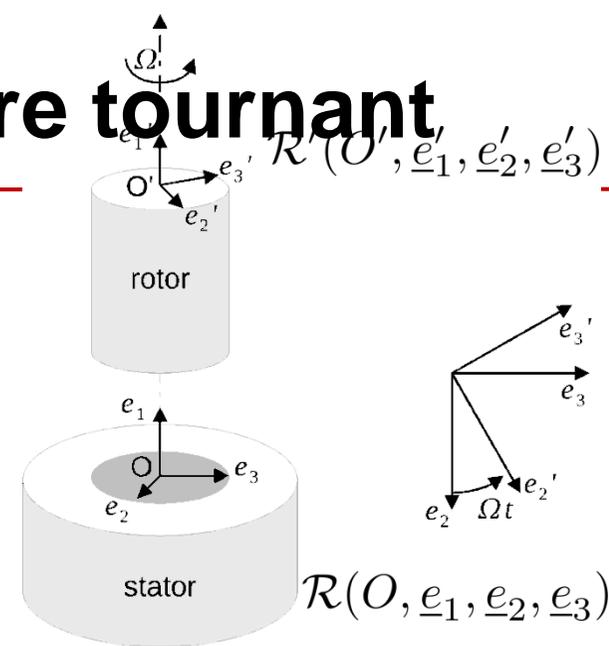
$$y = s + [R](x + u)$$

- Vitesse :

$$\dot{y} = \dot{s} + [R]\dot{u} + \underline{\Omega} \wedge ([R](x + u))$$

- Accélération :

$$[R]^T \ddot{y} = [R]^T \ddot{s} + \ddot{u} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge (x + u) + \underline{\Omega} \wedge \underline{\Omega} \wedge (x + u) + 2\underline{\Omega} \wedge \dot{u}$$



- PPV :  $\forall \delta \underline{v} \in V^0 = \{\delta \underline{v}, \text{ tel que } \delta \underline{v} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{D}_u\},$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \ddot{u} \cdot \delta \underline{v} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{e}}(\underline{v}) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{f}}_d \cdot \delta \underline{v} d\mathcal{D} + \int_{\partial \mathcal{D}_F} \underline{\underline{F}}_d \cdot \delta \underline{v} d\Gamma$$

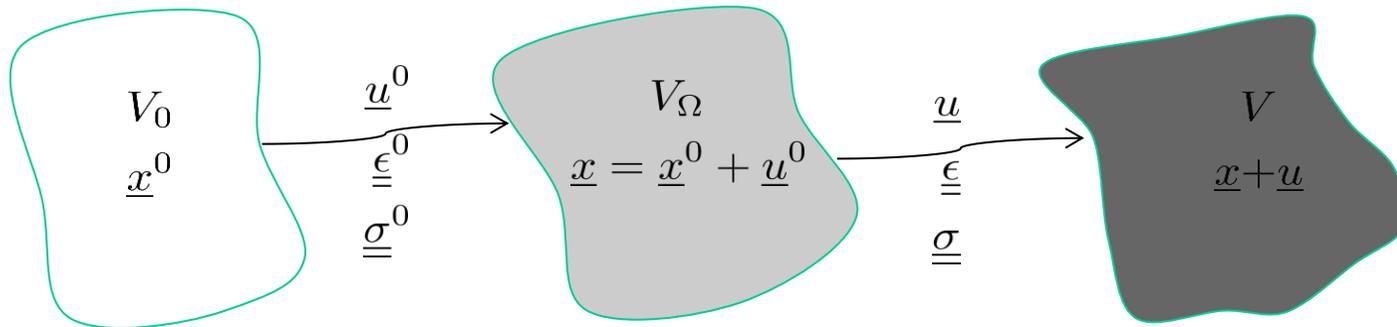
- Accélération + PPV  $\rightarrow$  Equilibre dynamique :

$$M \ddot{u} + \left[ \rho \dot{\underline{\Omega}} \wedge + \rho \underline{\Omega} \wedge \underline{\Omega} \wedge \right] \underline{u} + \rho 2\underline{\Omega} \wedge \dot{\underline{u}} + F_{visc} + F_{int} = F_{ext} - M \ddot{s} - \left[ \rho \dot{\underline{\Omega}} \wedge + \rho \underline{\Omega} \wedge \underline{\Omega} \wedge \right] \underline{x}$$

Effets **d'Euler**, **Centrifuge** et **de Coriolis**

# Modélisation dans le repère tournant

- Méthodologie d'analyse : décomposition du mouvement
  - Etude des vibrations autour d'un état d'équilibre :



$$F_{int} = F_{cent}$$

$$\int B^T \sigma^0 = -[\rho \Omega \wedge \Omega \wedge](x^0 + u^0)$$

Grands déplacements

→ pasapas

Forces centrifuges suivieuses

→ charmeca + KENT

$$\left[ \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} U \\ IU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul harmonique → IMPE

Liaison → RELA

## Equilibre

Hyp : équilibre statique du rotor dans son repère (et donc mouvement harmonique  $+\Omega$  du stator) + eq. de liaison

## Vibrations

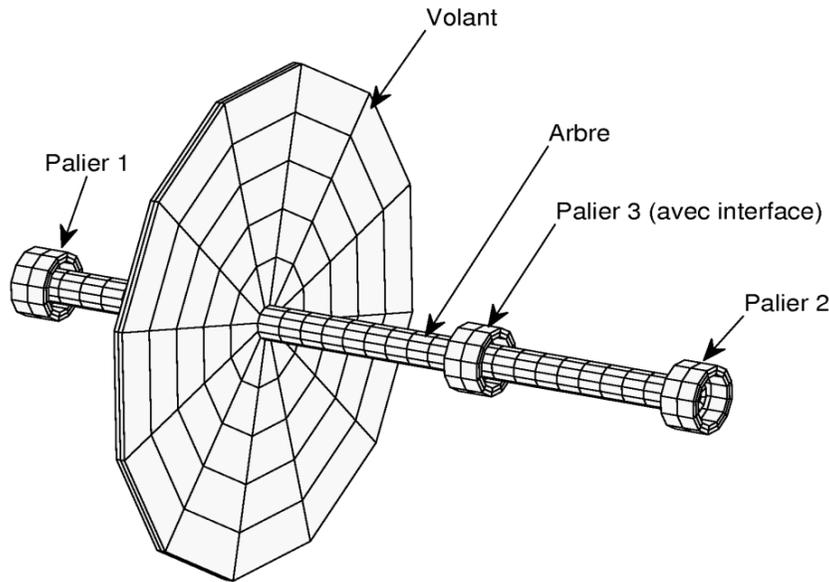
Hyp : petits mouvements dynamique  
→ on linéarise l'équilibre dynamique

$$M\ddot{u} + [\Omega G \wedge + C_{visc}] \dot{u} + [\Omega^2 K_{cent} + K(\underline{\sigma}^0) + K_{elas}] u = 0$$

Opérateurs « modaux » VIBR, PJBA, VIBC...

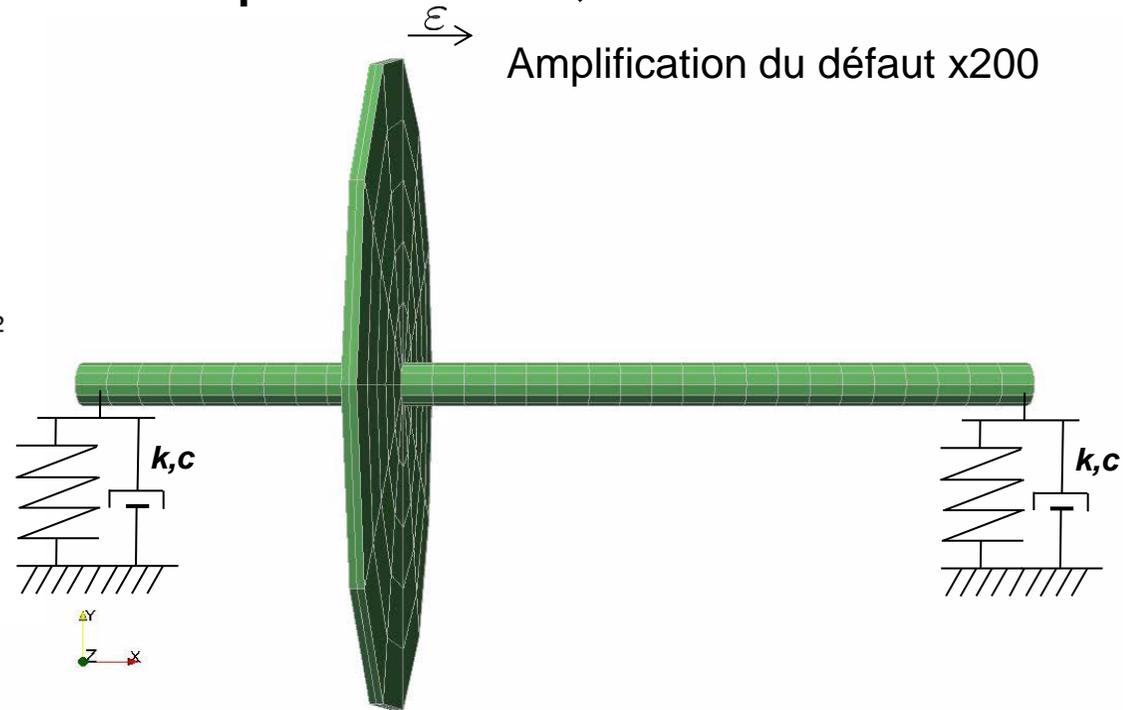
# Calcul EF 3D en Non-Linéaire

- Soit un rotor avec un défaut potentiel  $\varepsilon$ ,



Palier 1 et 2 :  $K=50000$ ;  $C=0,0002K$

Palier 3 :  $K=C=0$



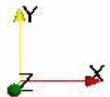
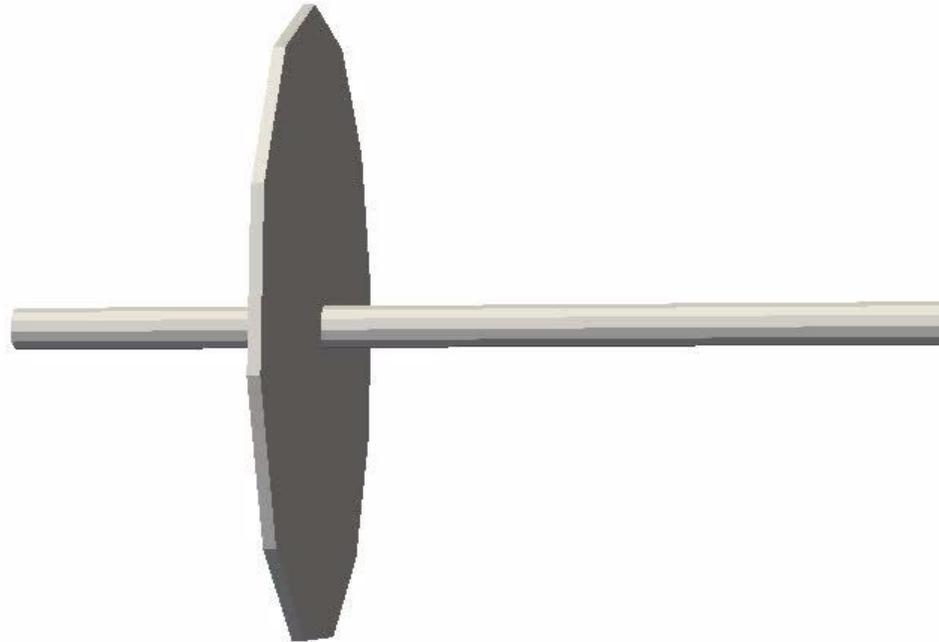
*Fonction REST dans Matlab*

*SORT 'VTK'*

1. Quelles seront les vibrations engendrées par ce déséquilibre lors de la montée en vitesse ?
2. Cette réponse sera-t-elle stable ?

# Calcul EF 3D en Non-Linéaire

- Montée en vitesse d'un rotor avec défaut

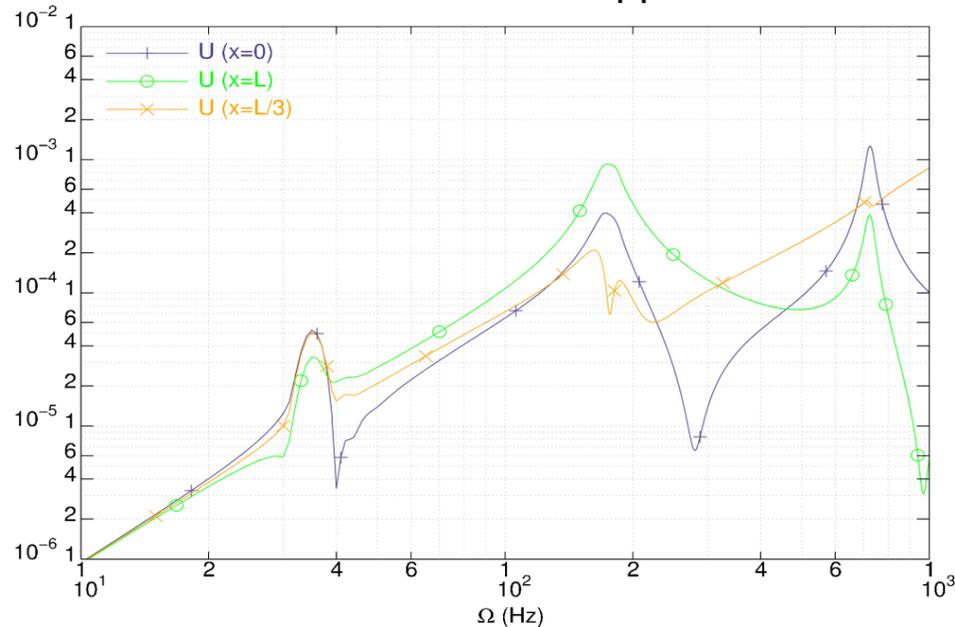


amplification x100

# Calcul EF 3D en Non-Linéaire

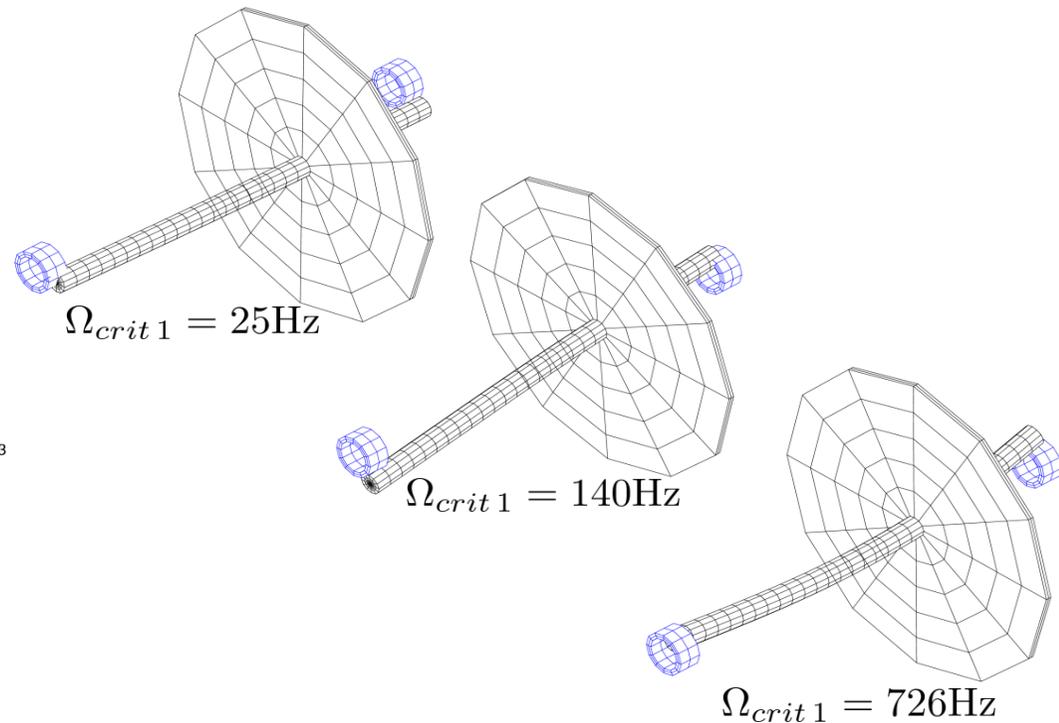
- Application à un rotor avec défaut
  - Montée en vitesse

Les résonances apparaissent aux vitesses critiques prédites linéairement



$$[K^{rot} - \Omega^2 [K^{ce} + K^{\sigma}]] U^{rot} = 0$$

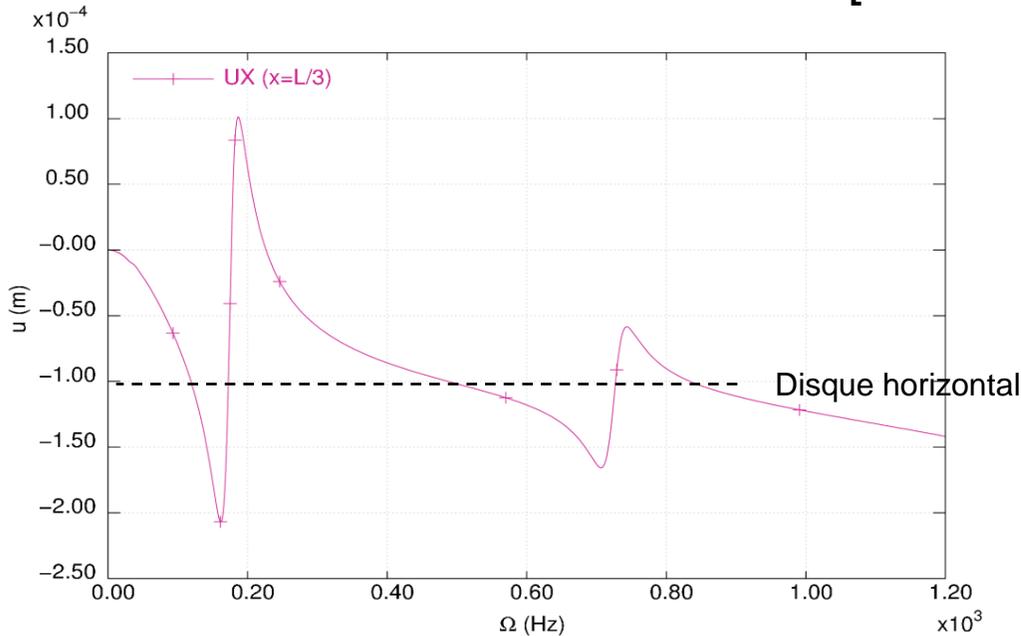
$$[K^{sta} + \cancel{i\Omega C} - \Omega^2 M^{sta}] U^{sta} = 0$$



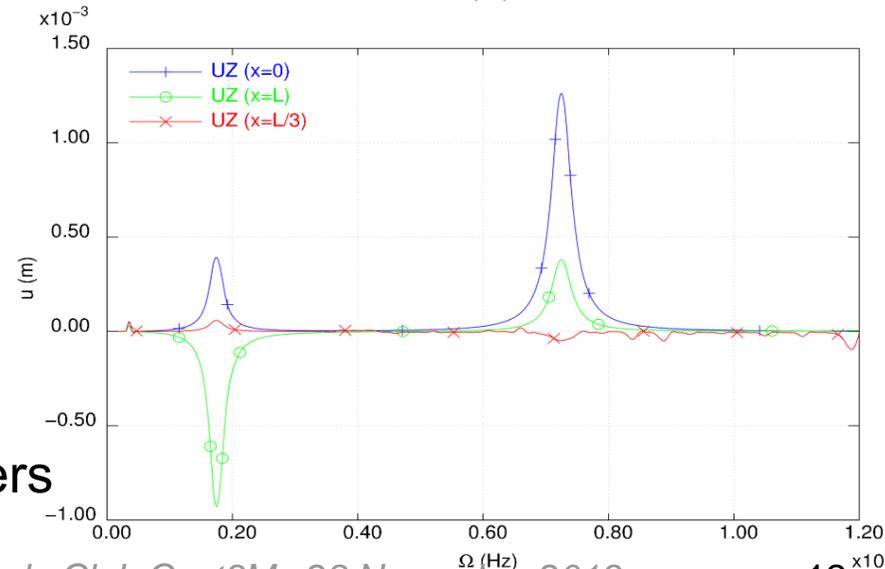
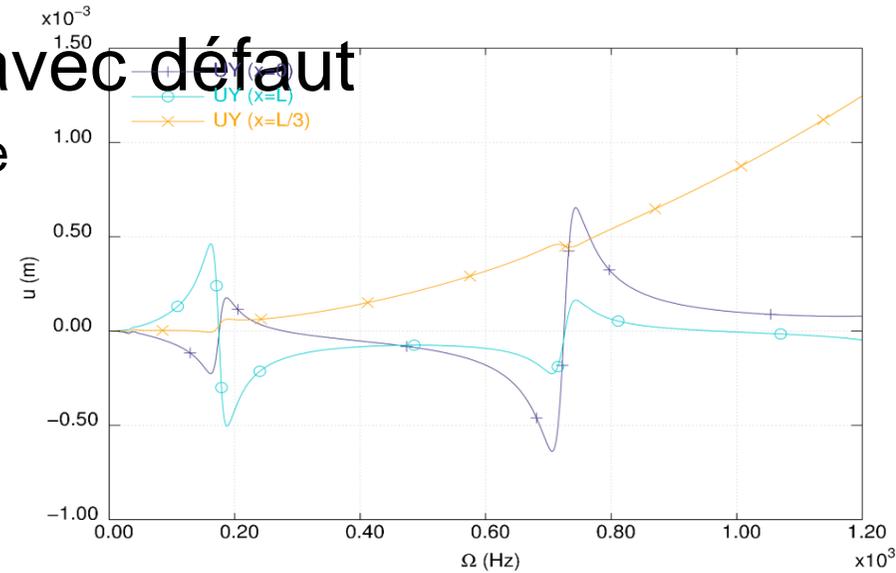
# Calcul EF 3D en Non-Linéaire

- Montée en vitesse d'un rotor avec défaut

- Redressement du disque se couple aux autres modes de déformation  
→ 3 résonances dans [0 -1200Hz]



- Difficulté : passage des résonance  
→ role de l'amortissement des paliers



# Plan

- Exemple 1 : Montée en vitesse d'un rotor avec défaut  
→ Effets centrifuges non-linéaires
- Exemple 2 : Réponse au balourd avec des composants hydrodynamiques non-linéaires

# Quelques non-linéarités localisées

- Squeeze-film damper,
- Palier et butée hydrodynamique,
- Palier magnétique,
- Couplages fluide-structure aubes...

Pour les 2 premières, **Eq de Reynolds** :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = & 6\rho(V_{10} - V_{1h}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(V_{30} - V_{3h}) \frac{\partial h}{\partial x_3} \\ & + 6h \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho (V_{10} + V_{1h})) + 6h \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho (V_{30} + V_{3h})) \\ & + 12\rho V_{2h} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

→ Résolution : analytique, DF, EF...

# Résolution de l'équation de Reynolds

## Calcul Cast3M : méthodologie

- **Hauteur du film d'huile** : expression analytique possible sur cas simples (cylindres, sphères...), sinon opérateur PSIP par ex.
- **Résolution de l'équation de Reynolds**

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = 6\rho(V_{10} - V_{1h}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(V_{30} - V_{3h}) \frac{\partial h}{\partial x_3} + 6h \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho(V_{10} + V_{1h})) + 6h \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho(V_{30} + V_{3h})) + 12\rho V_{2h} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Diagramme de l'équation de Reynolds avec des annotations :

- Le terme  $\frac{\rho h^3}{\mu}$  est noté **k** (conductivité).
- Le terme  $\frac{\partial p}{\partial x_1}$  est noté **T** (température).
- Le terme  $12h \frac{\partial \rho}{\partial t}$  est noté **Q** (charge).

### Analogie avec la thermique :

- Pression  $p \rightarrow$  température  $T$
  - Conductivité en  $h^3$
  - éléments de coque thermique coq3 et coq4 (ou coq6 et coq8)
  - Ici  $TSUP = T = TINF$
- ☺ Il suffit de résoudre : **[K] p = Q**

- **Force** obtenue par intégration et **Caractéristiques** de raideur et d'amortissements obtenues par perturbation ou différentiation

# Modélisation de la butée hydrodynamique

- Cavitation
  - Prise en compte des conditions de cavitation

Film complet (ou *Sommerfeld's condition*)

p obtenu directement :  $p^{full} \in [-\infty + \infty]$

$\pi$ -film (ou *Gumbel's condition*)

restriction de p :  $p^{Gumbel} = \{p^{full}\}^+$

Reynolds' condition

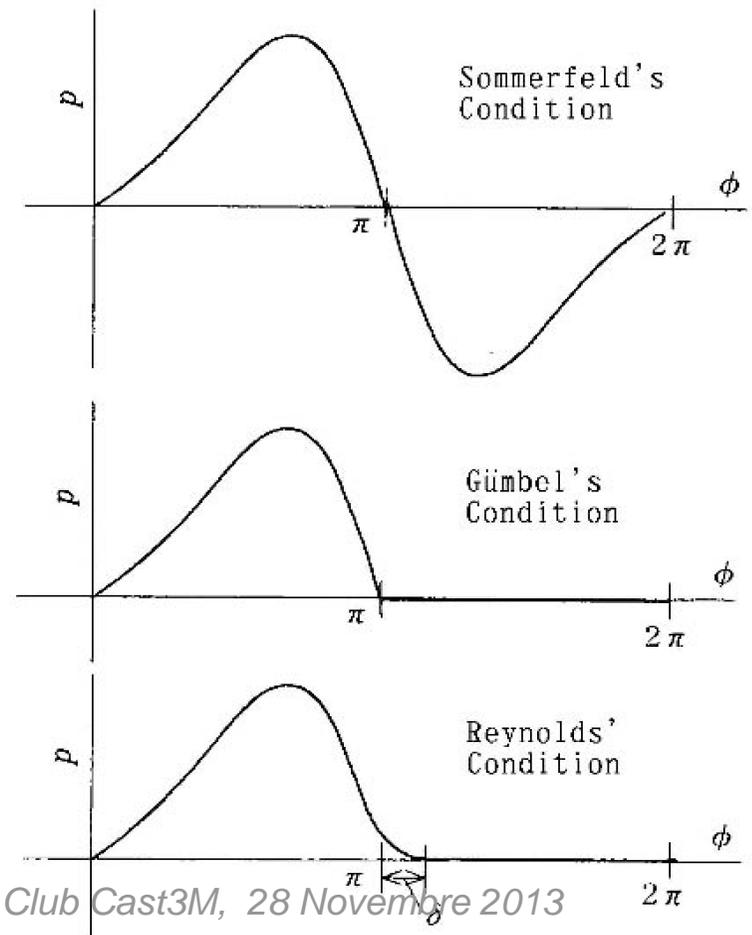
on itère jusqu'à vérifier :  $p^{Reynolds} \geq 0$

difficulté : autant d'inégalités que d'inconnues  
(très différents des cas habituels de contact)

→ adaptation de la stratégie de la procédure **unilater**

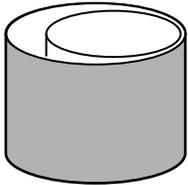
RELA MINI

RESO (*unilater*)

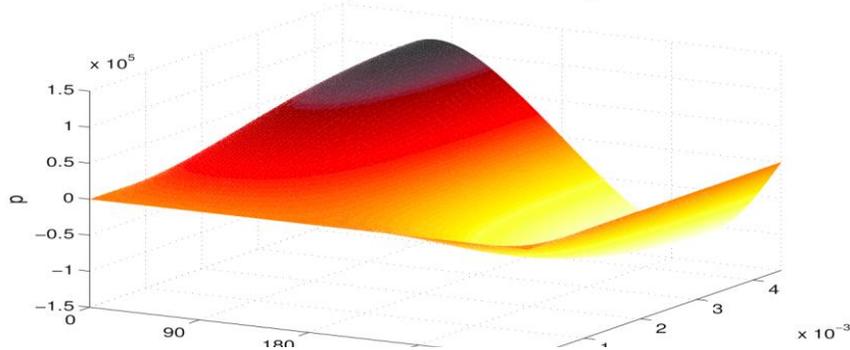


# Résolution de l'équation de Reynolds

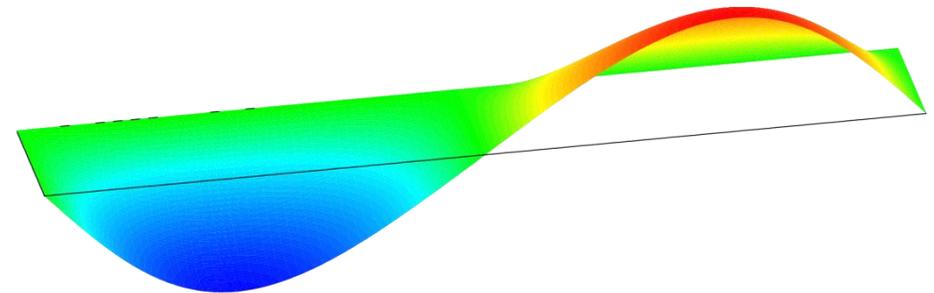
- Calcul Cast3M : validation
  - Validation sur cas du squeeze-film cylindrique



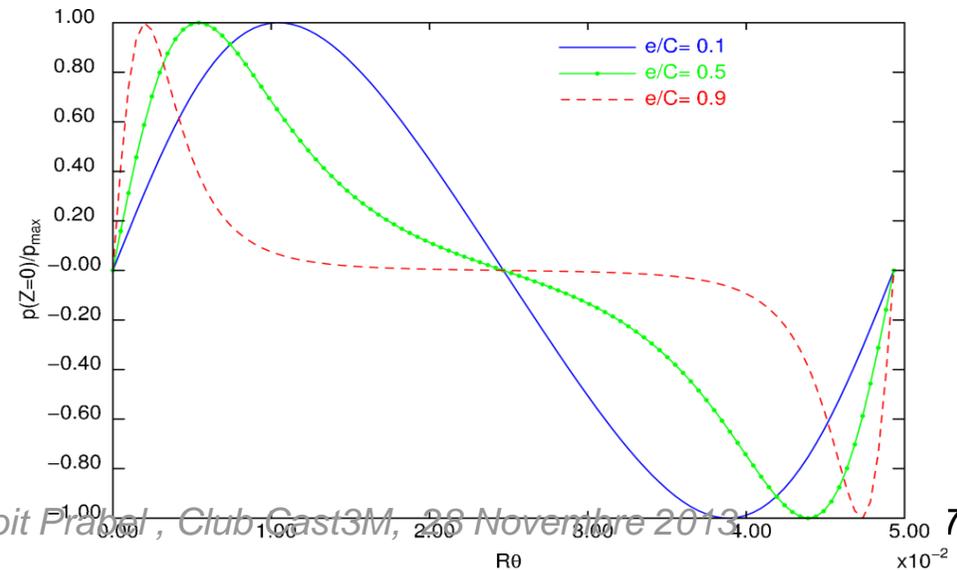
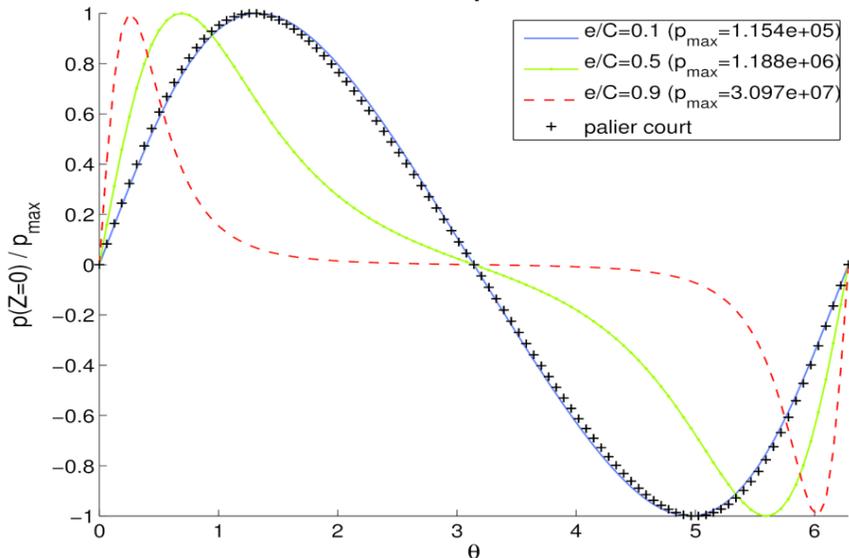
Calcul par différence finies  
Pression calculée par différences finies pour  $e/C=0.1$



Calcul Cast3M

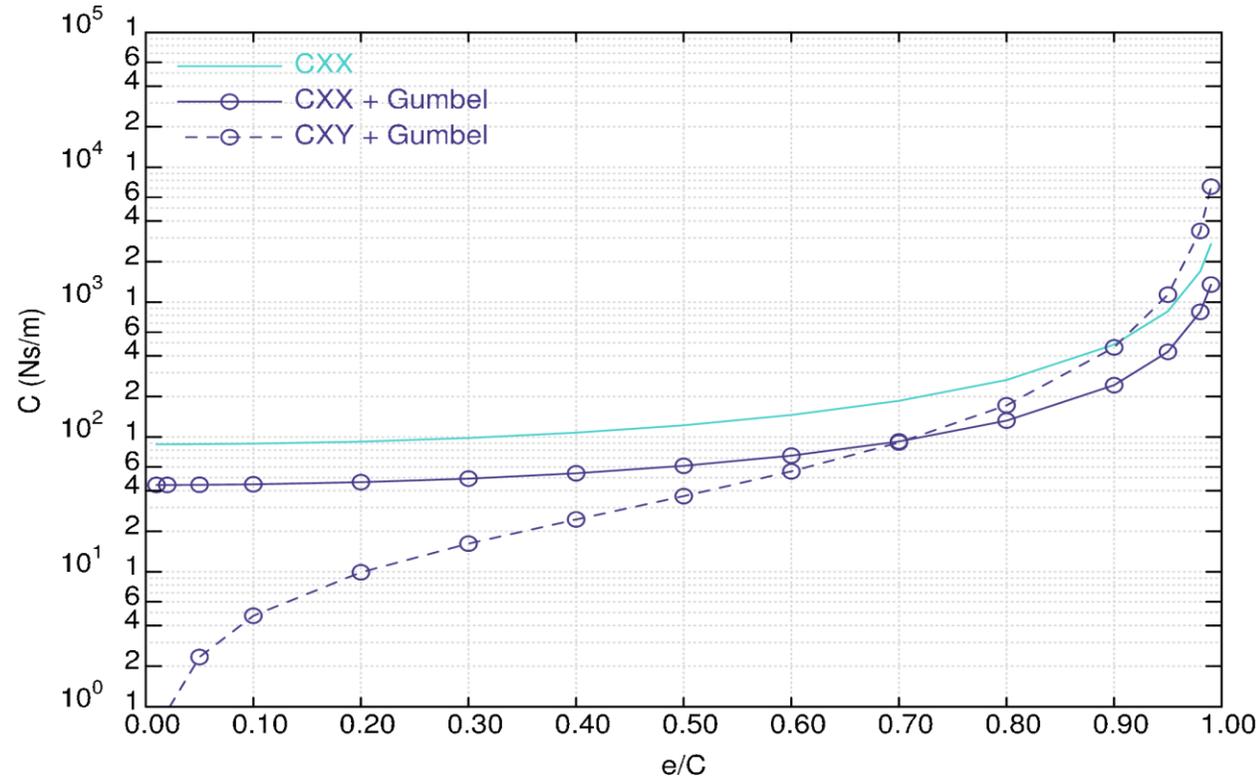
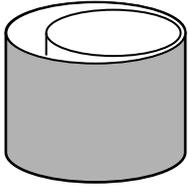


Evolution de la pression avec  $\theta$



# Résolution de l'équation de Reynolds

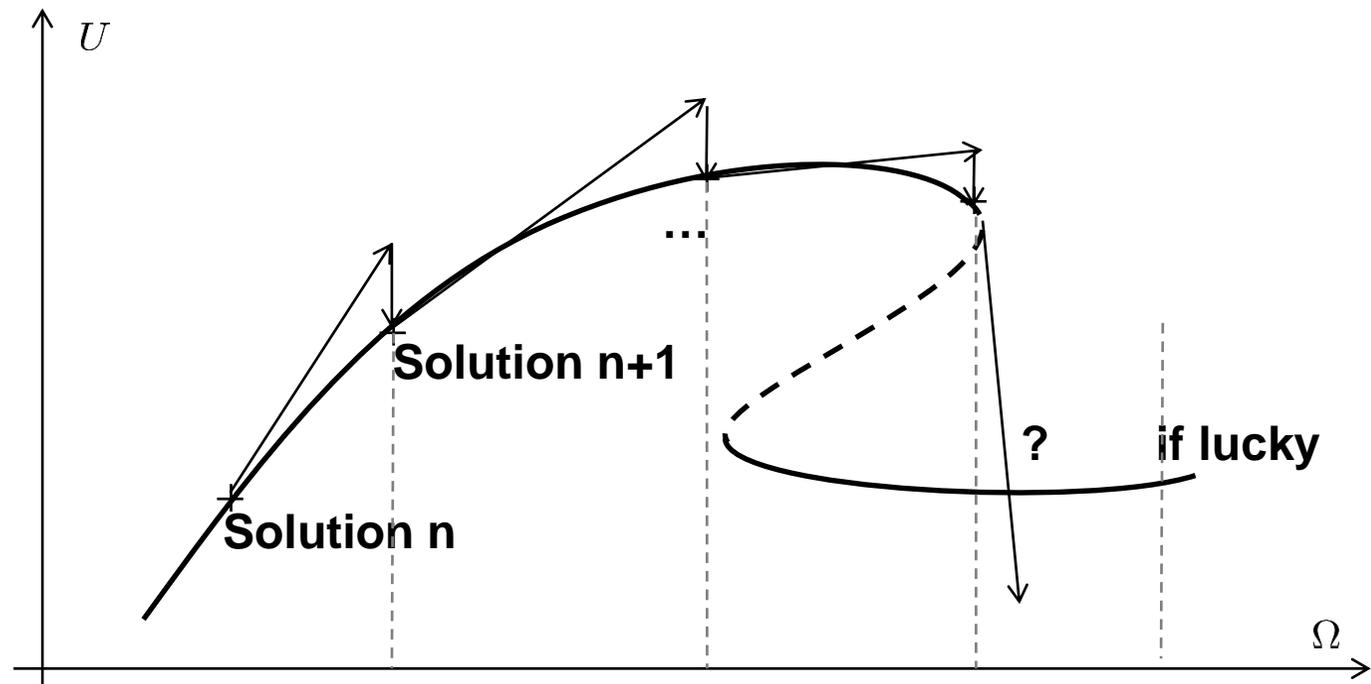
- Calcul Cast3M : validation
  - Validation sur cas du squeeze-film cylindrique



Evolution de l'amortissement – Résultats Cast3M

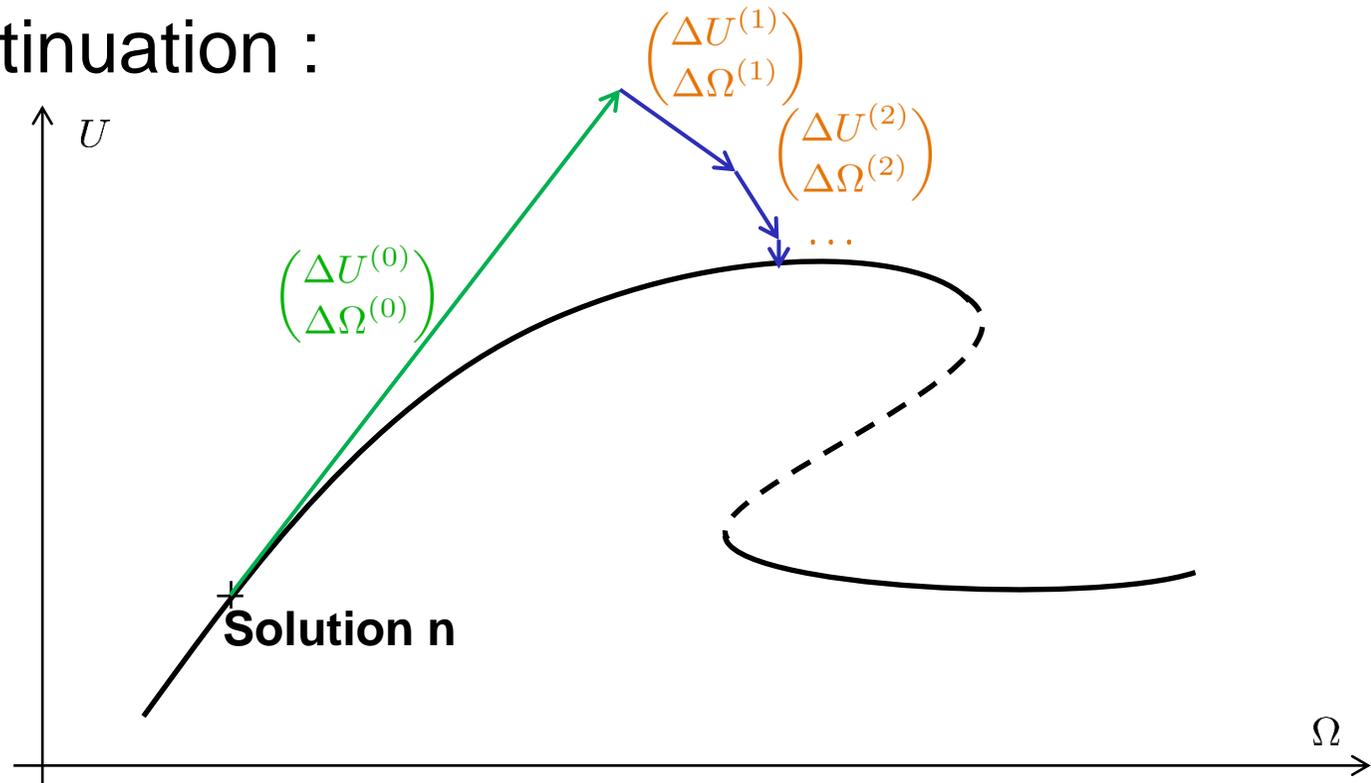
# Calcul de la réponse par continuation

- Utilisation des caractéristiques non-linéaires  
→ plusieurs solutions à certains régimes → snap-back
- Pb du calcul incrémental :



# Calcul de la réponse par continuation

- Utilisation des caractéristiques non-linéaires  
→ plusieurs solutions à certains régimes → snap-back
- $\Omega$  est une inconnue (presque) comme les autres
- Calcul par continuation :
  1. Prédiction
  2. Correction



# Calcul de la réponse par continuation

- Calcul de la réponse au balourd par continuation :

Résidu :  $\mathcal{R}(U, \Omega) = -K^{dyn}U + F^{bal}(\Omega^2) + F^{NL}(U, \Omega)$

with  $K^{dyn} = K^r + K^s + \Omega C^s + \Omega^2 M^s$

qu'on différentie :  $\mathcal{R}(U + \delta U, \Omega + \delta \Omega) \simeq \mathcal{R}(U, \Omega) + \dots$

+ eq longueur d'arc :  $\frac{\Delta \Omega^2}{\Delta \Omega_{ref}^2} + \frac{\Delta U^T \cdot \Delta U}{\Delta U_{ref}^2} = 1$

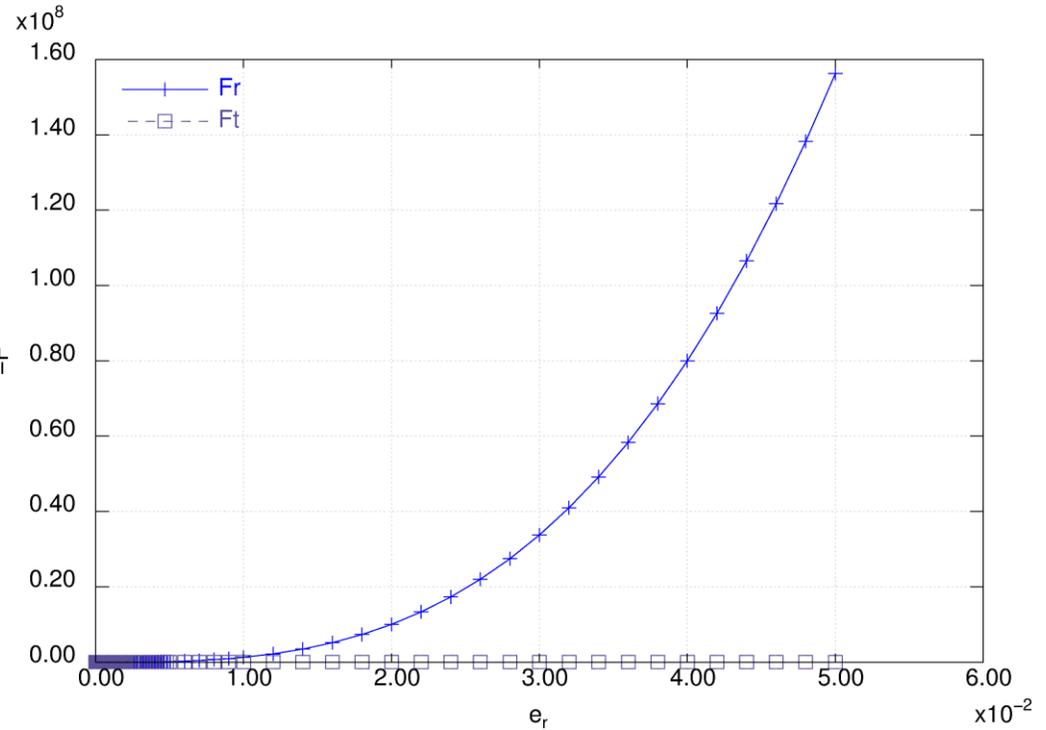
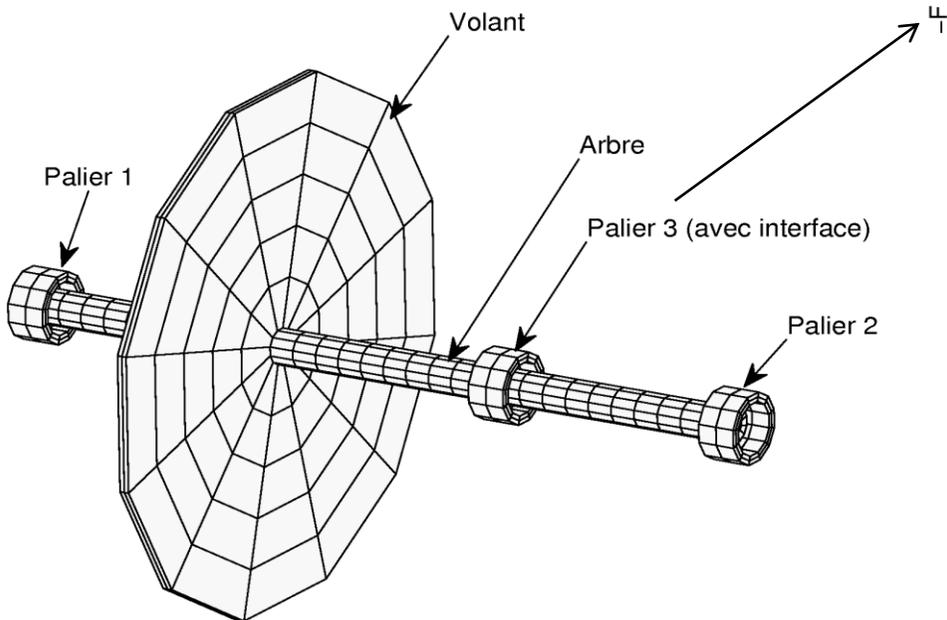
1. **Prédiction** :  $[K^{dyn} + K^{NL}] \Delta U^p = \left[ 2\Omega F^{bal}(\Omega = 1) + \frac{\partial F^{NL}}{\partial \Omega} - D^{dyn}U \right] \Delta \Omega^p$

2. **Correction** :  $\begin{bmatrix} K^{dyn} + K^{NL} & D^{dyn}U - 2\Omega F^{bal}(\Omega = 1) - \frac{\partial F^{NL}}{\partial \Omega} \\ \frac{1}{\Delta U_{ref}^2} \Delta U^T & \frac{1}{\Delta \Omega_{ref}^2} \Delta \Omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta U \\ \delta \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{(i-1)} \\ 0 \end{pmatrix}$

MANU RIGI ('COLO' ou 'LIGN')

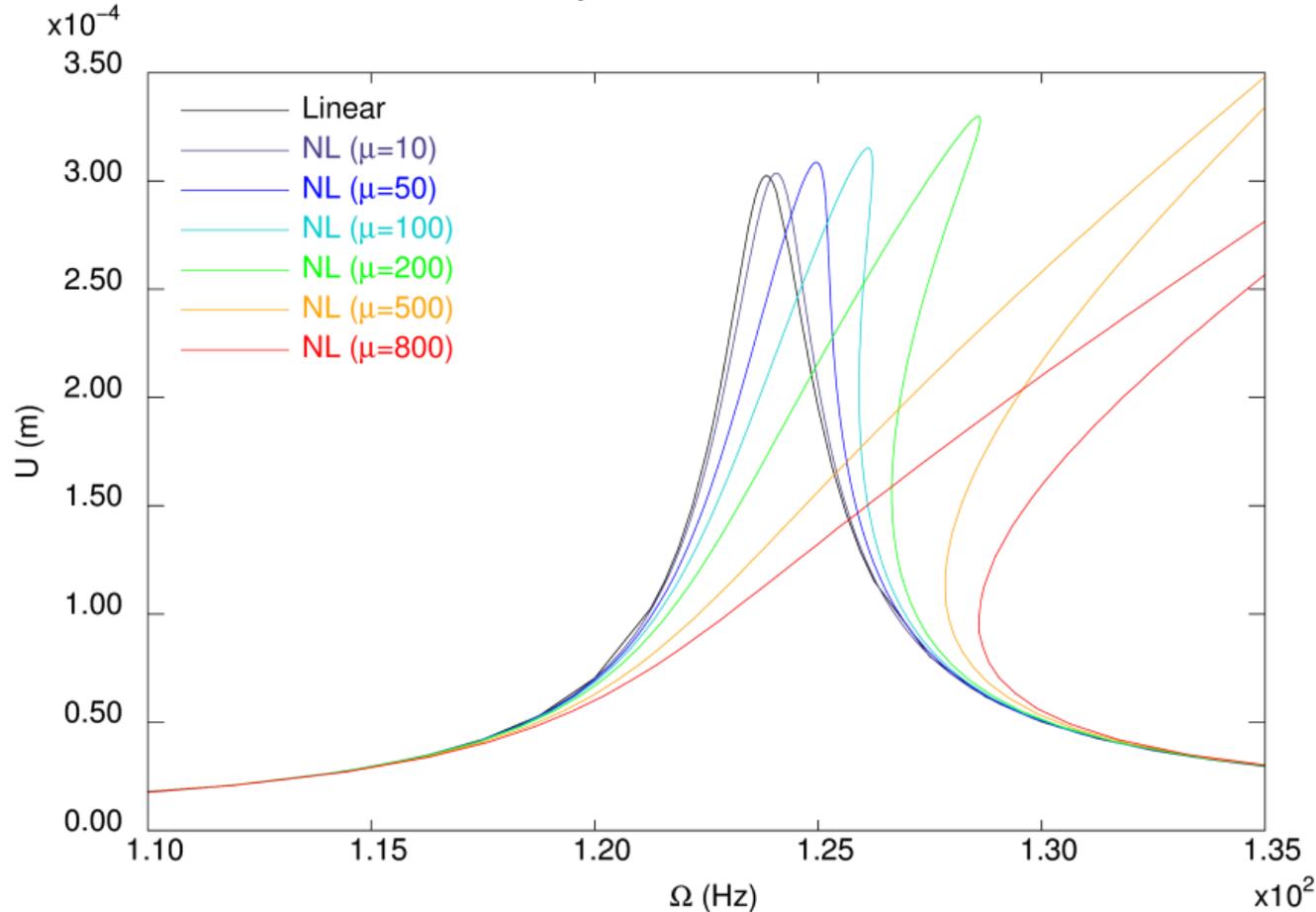
# Calcul de la réponse par continuation

- Ex : Raideur NL (en  $u_r^3$ ) d'un palier :



# Calcul de la réponse par continuation

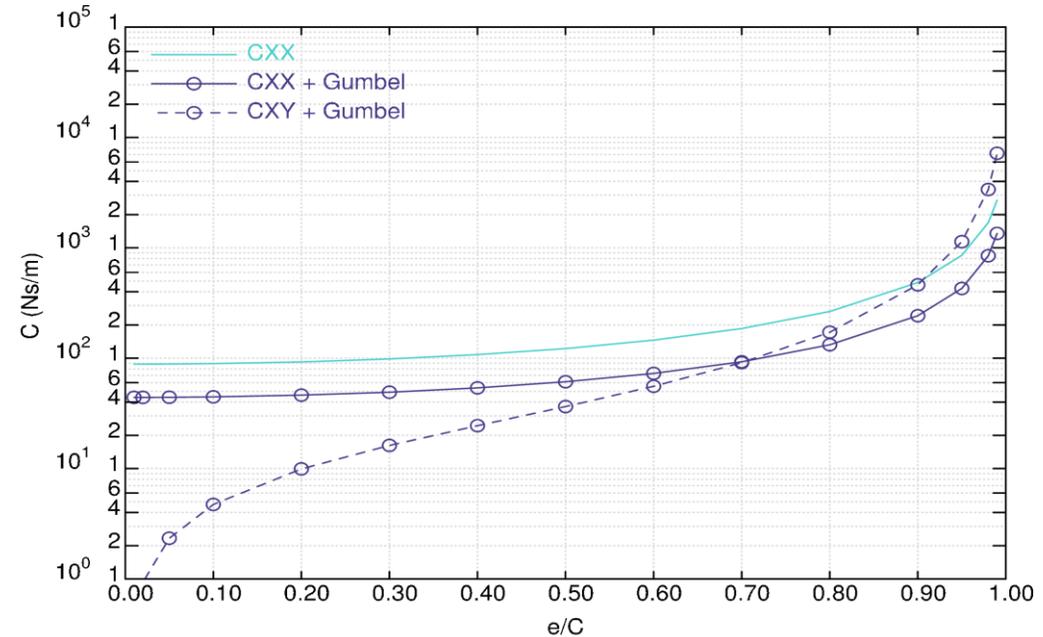
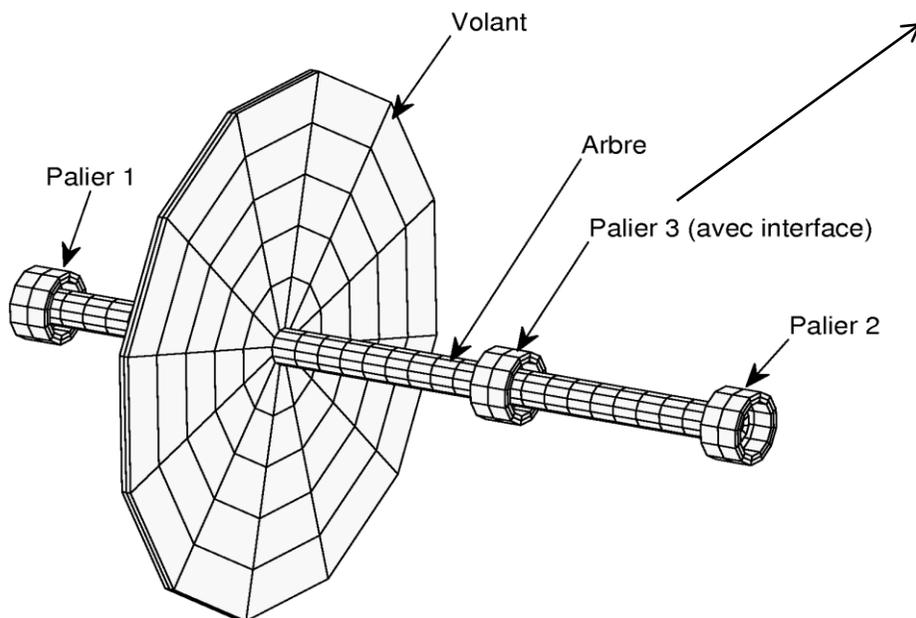
- Ex : Raideur NL (en  $u_r^3$ ) d'un palier :



Unbalance Response at pbal ( $\chi=1/3$ ) Linear–NL model

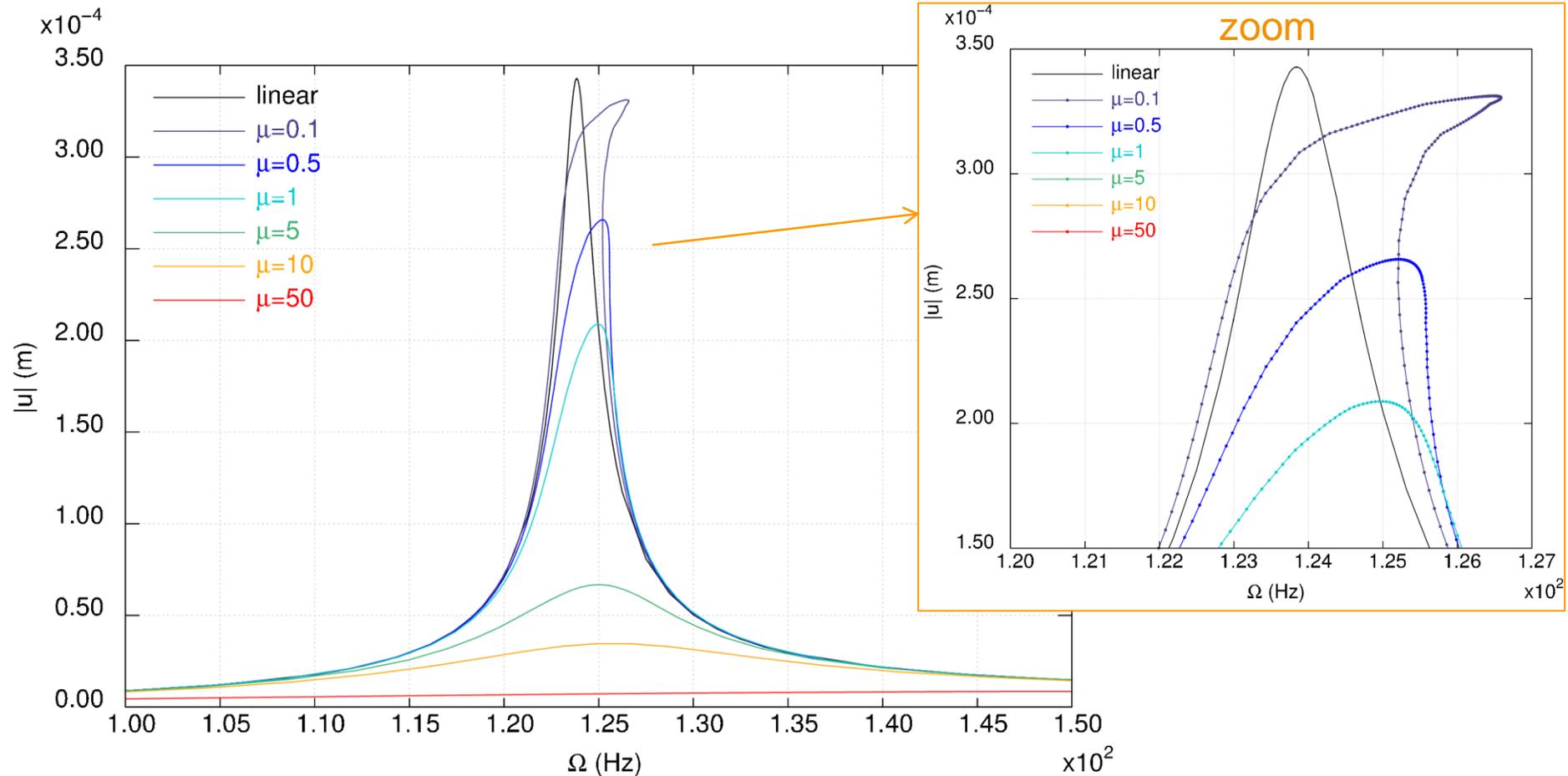
# Calcul de la réponse par continuation

- Ex : Amortissement NL (squeeze-film) d'un palier :



# Calcul de la réponse par continuation

- Ex : Amortissement NL (squeeze-film) d'un palier :



# Conclusion

- Modélisation des machines tournantes par EF
  - Poutre, 2D Fourier et 3D possibles dans Cast3M
  - Analyses linéaires → Non-linéaires pour expliquer la physique
- Bénéfice de l'utilisation de Cast3M :
  - Code développé pour la recherche au CEA et ailleurs...
    - ≠ boîte noire
    - Souplesse et adaptabilité (ex. modèle de coque thermique pour résoudre pb de lubrification)
  - 2 niveaux de langages : opérations élémentaires en fortran + langage utilisateur (gibiane)
    - Modularité du code (ex. programmation d'algorithme de résolution par continuation en qq jours)

# MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

*Benoit Prabel , Club Cast3M,  
28 Novembre 2013*

---

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives  
Centre de Saclay | 91191 Gif-sur-Yvette Cedex  
T. +33 (0)1 69 08 30 10 | F. +33 (0)1 69 08 69 05

Etablissement public à caractère industriel et commercial | RCS Paris B 775 685 019

Direction de l'Energie Nucléaire  
Département de Modélisation des  
Systèmes et Structures  
Service d'Etudes Mécaniques et  
Thermiques

# Application aux éléments finis 3D

- Aspects algorithmiques
  - Déformations quadratiques :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{lin} + \epsilon_{ij}^{quad}$$

- Formulation Lagrangienne réactualisée :

$$\int_{\mathcal{D}^t} \underline{\underline{\pi}}^{t+\Delta t} : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}(\underline{v}) d\mathcal{D} = \mathcal{R}^{t+\Delta t}$$

$$\text{soit } \int_{\mathcal{D}^t} \Delta \underline{\underline{\pi}} : \delta \Delta \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^t : \delta \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{quad} d\mathcal{D} = \mathcal{R}^{t+\Delta t} - \int_{\mathcal{D}^t} \underline{\underline{\sigma}}^t : \delta \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{lin} d\mathcal{D}$$

- Algorithme itératif obtenu par linéarisation du PPV :

PASAPAS pose :  $u^{t+\Delta t} = u^t + \sum \delta u^{(i)}$

et UNPAS résout :  $\left[ K^{elas} + K^\sigma + K^{cent} \right] \delta u^{(i)} = \mathcal{R}^{t+\Delta t} + F^{int t+\Delta t (i-1)} + F^{cent t+\Delta t (i-1)}$

$$\left[ \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} U \\ IU \end{pmatrix}^{stator} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{stator}(t) = u^{rotor}(t)$$

# Application aux éléments finis 3D

- Aspects algorithmiques

- Paramètres du Newton :

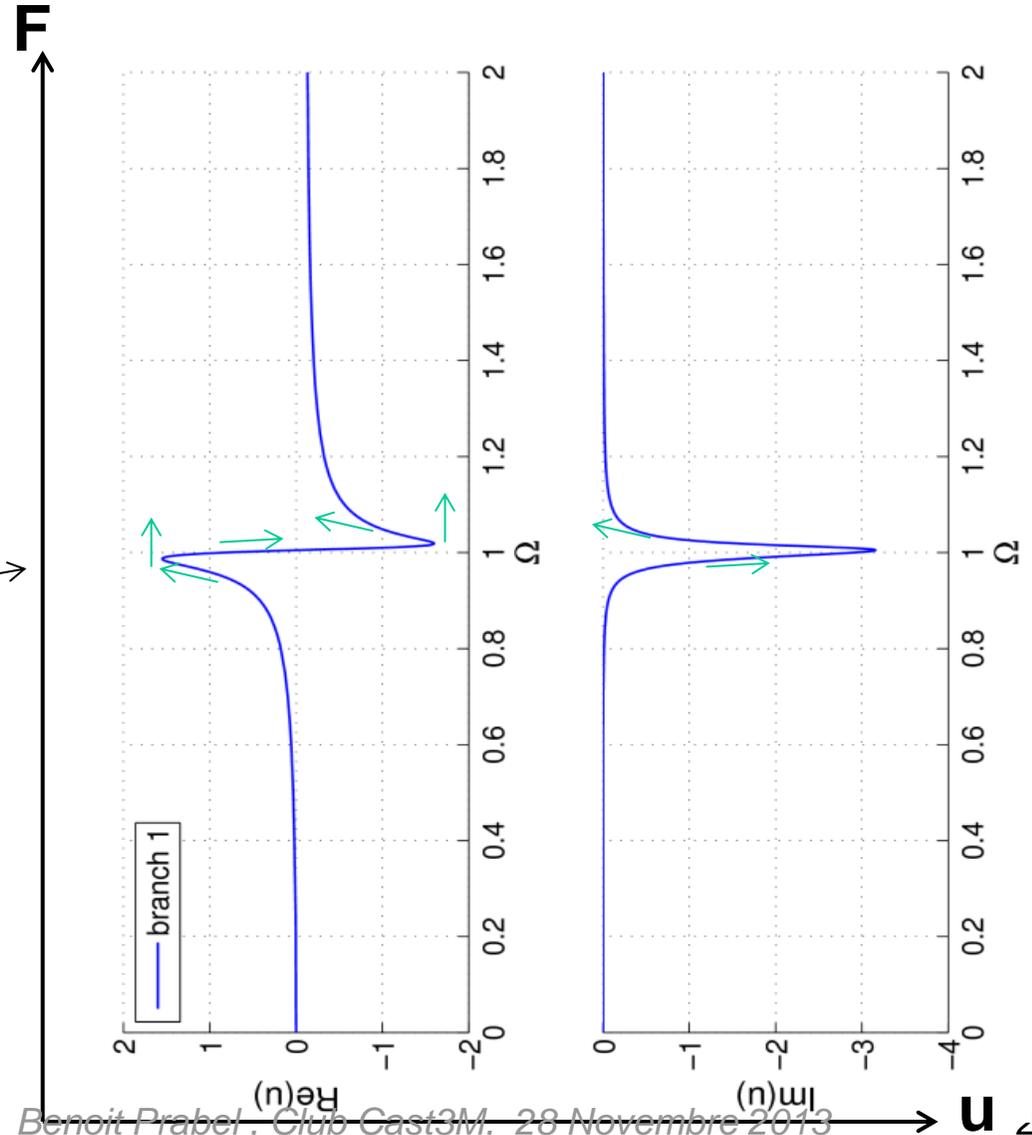
Recalcul de l'opérateur tangent  
périodique et si  $\mathcal{R}^{\text{TM}}$

Limitation de la longueur de  $\delta u$

Pourquoi ?

- Rappel : système à 1ddl :

variations rapides  
de l'opérateur tangent  
au passage des résonances



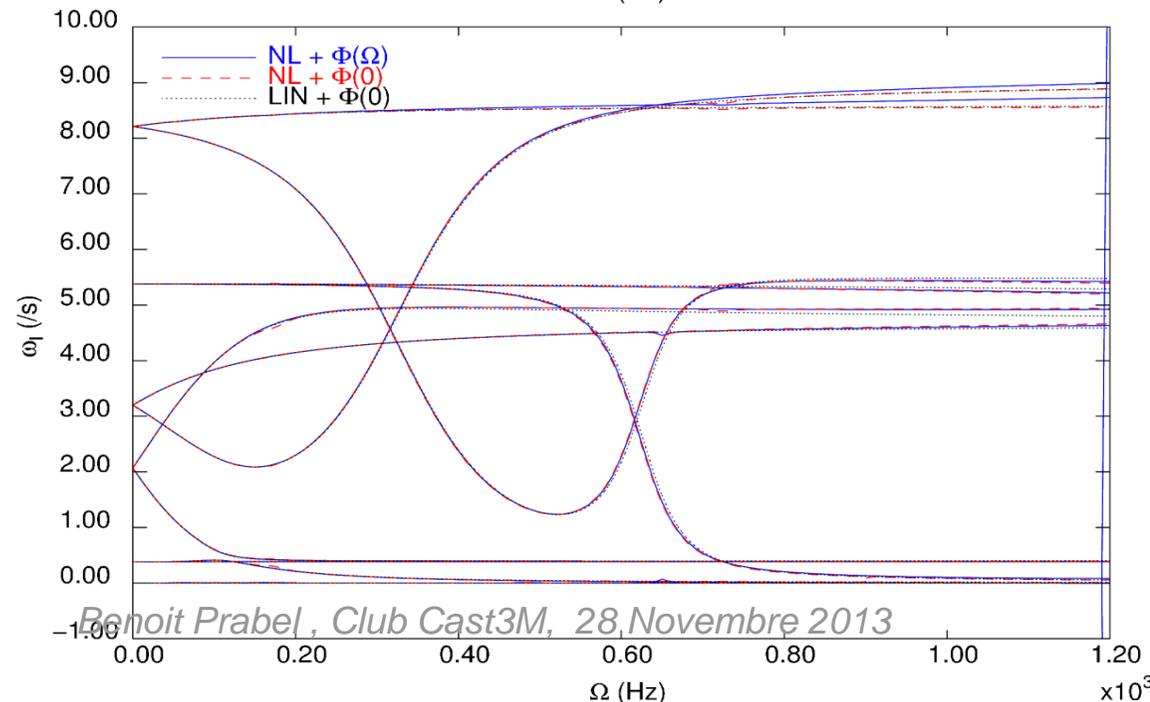
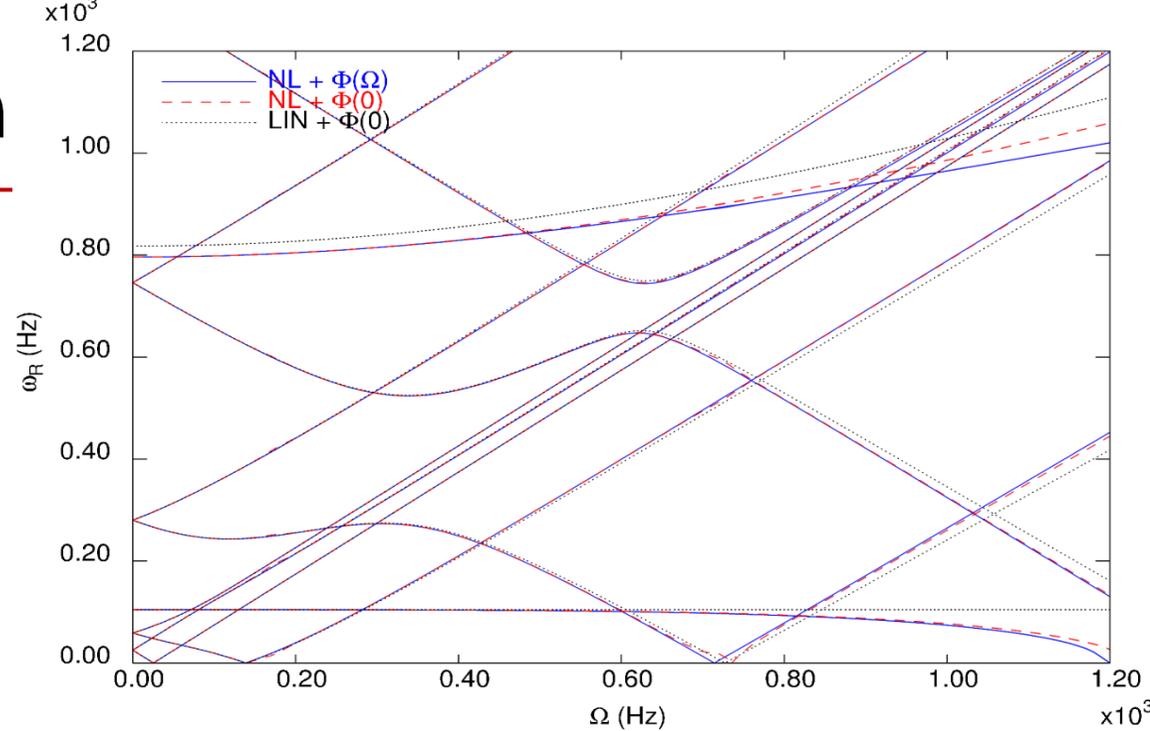
# Application

- Application à un rotor avec défaut
  - Evolution des fréquence propres (= diagramme de Campbell)

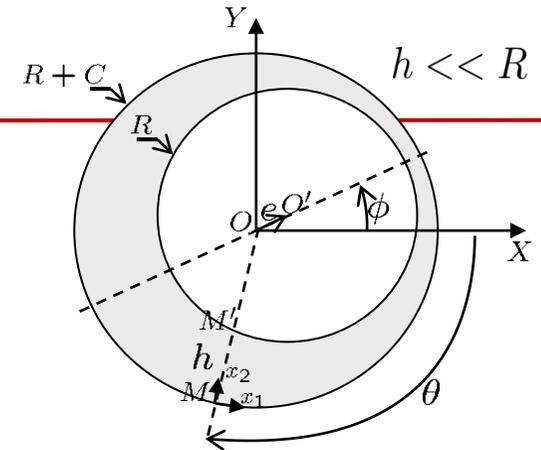
Comparaison de 3 approches :

- NL +  $\Phi(\Omega)$  : autour de l'équilibre Non-Linéaire, calcul des modes propres réels et complexes.
- NL +  $\Phi(0)$  : autour de l'équilibre Non-Linéaire, calcul des modes complexes depuis la base de modes propres calculée à l'état initial ( $\Omega=0$ ).
- LIN +  $\Phi(0)$  : autour de la position initiale ( $\Omega=0$ ), calcul des modes propres réels et complexes.

résultats très proches  $\rightarrow$  la stabilité peut être prédite par l'approche linéaire sur un large domaine...



# Squeeze film



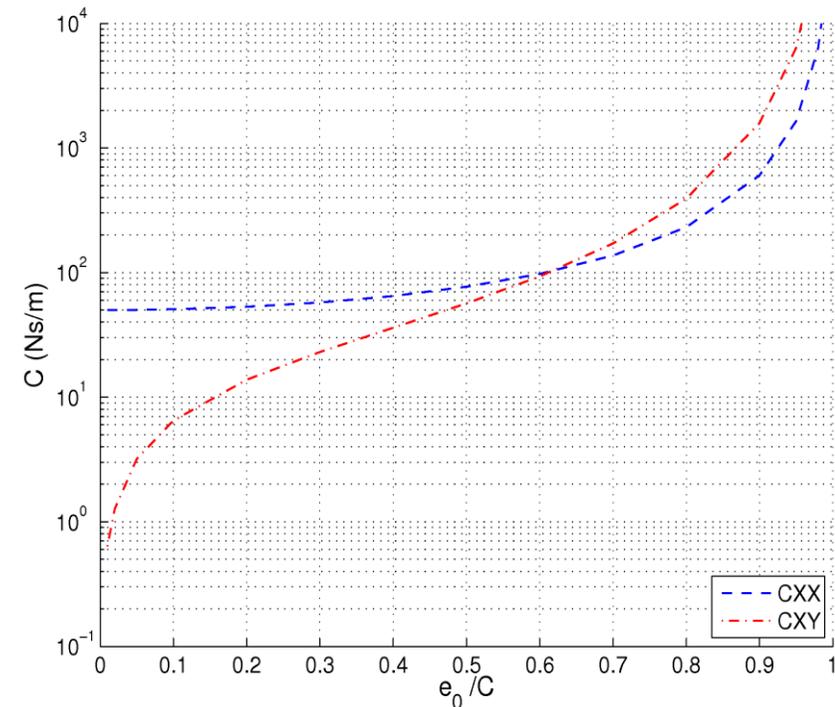
## Modèles de squeeze film :

- Basés sur l'équation de Reynolds
- 3 hypothèses géométriques possibles :
  - Palier fini (hyp. linéaire) [Axisa], [Rhode et Li]
  - Palier long
  - Palier court
- Hyp : Palier court + excentrement non-nul (on ne linéarise pas autour de  $e=0$ )  $\rightarrow C(e)$
- Amortissement obtenu pour un mouvement de rotation circulaire

$$\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_X \\ \dot{e}_Y \end{pmatrix}$$

avec  $C_{YX} = -C_{XY}$  et  $C_{YY} = C_{XX}$

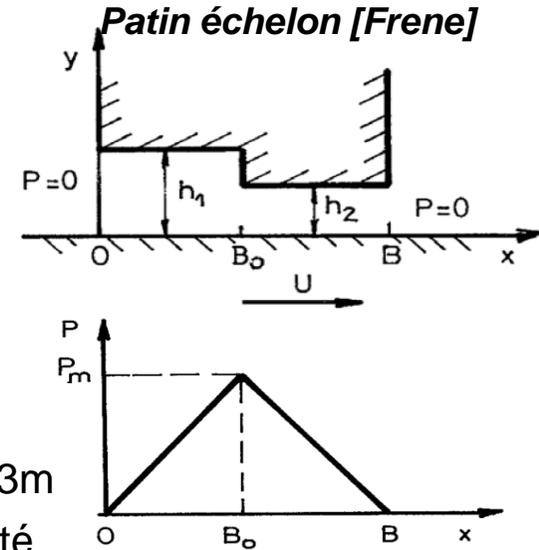
- $\rightarrow$  Termes croisés CXY :  
augmente la fréquence et  
diminue l'amortissement apparent ?



# Résolution de l'équation de Reynolds

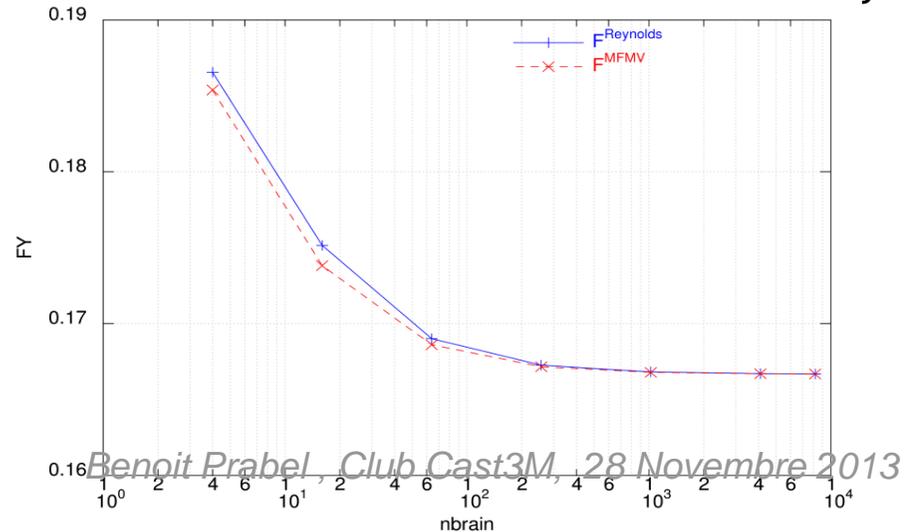
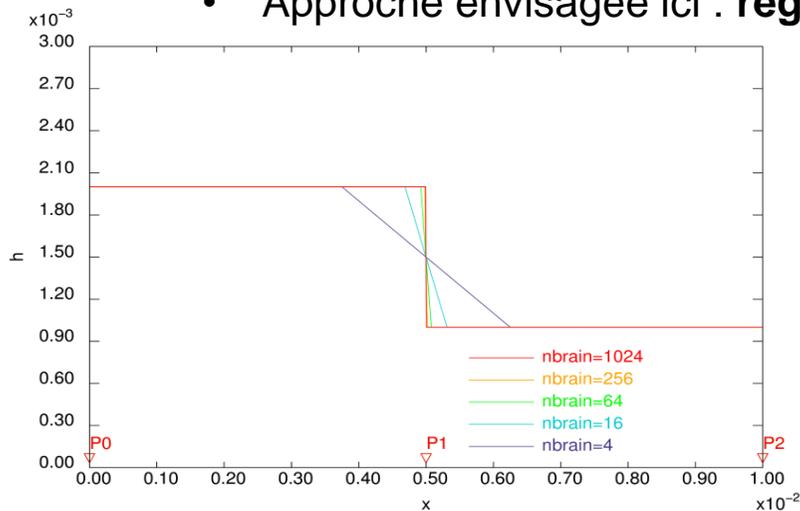
- Prise en compte des rainures

- Discontinuité de  $h \rightarrow p$  linéaire par morceau  
 $\rightarrow$  approx EF de  $p$  correcte :  $p(x) = \sum_i N_i(x)p_i$   
 mais  $h$  caractéristique et 2<sup>nd</sup> membre...



- Pb du 2<sup>nd</sup> membre :

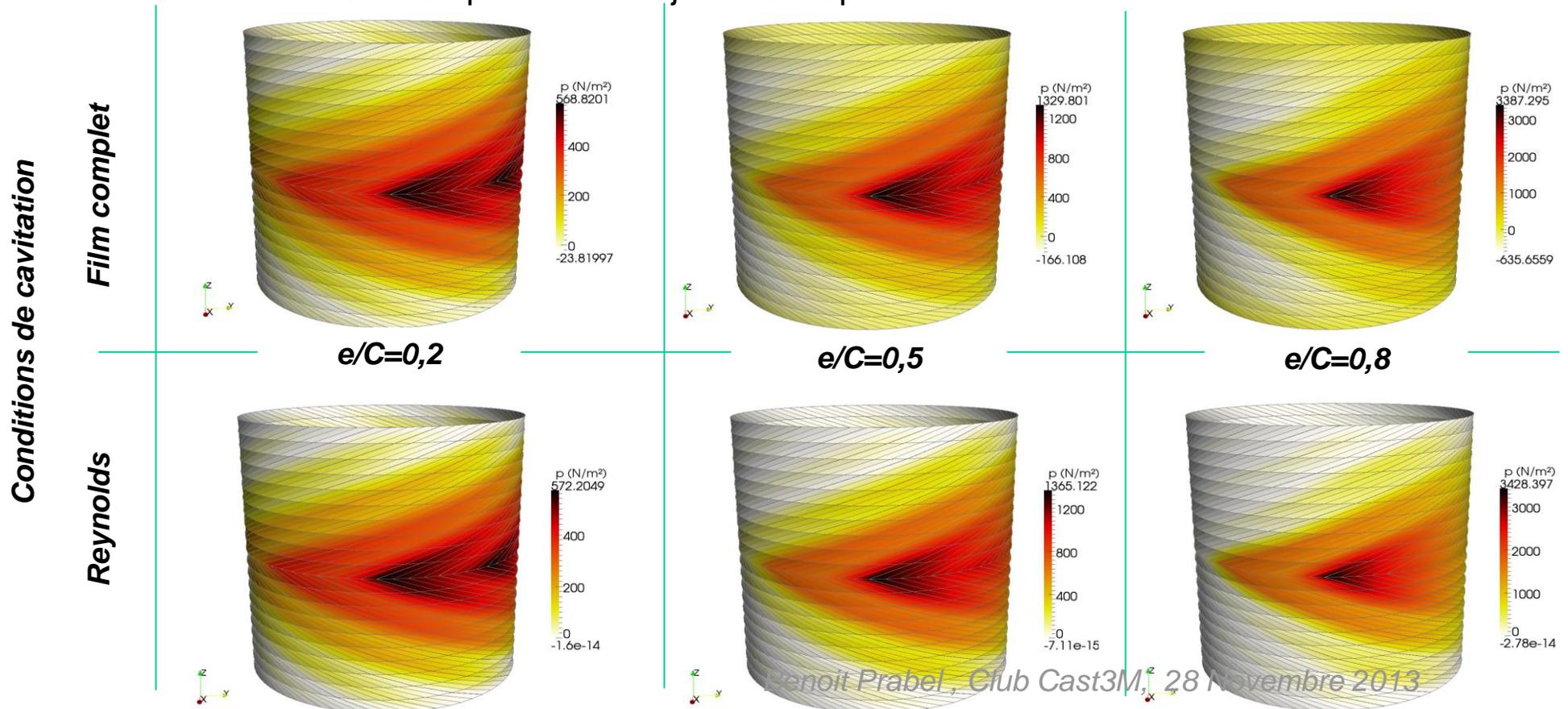
- $Q = \text{FLUX } f_{\text{Reynolds}}$  où  $f_{\text{Reynolds}}$  défini aux pt de G.  $\rightarrow$  evol Cast3m
- $f_{\text{Reynolds}}$  dépend de  $\text{grad}(h) \rightarrow$  localisation de  $Q$  à la discontinuité
- Approche traditionnelle : écrire la conservation du débit de part et d'autre
- Approche envisagée ici : **régulariser le pb**  $\rightarrow h$  continu, mais avec un fort gradient



# Résolution de l'équation de Reynolds

- Prise en compte des rainures
  - Validation sur le cas test du *Herringbone groove bearing*

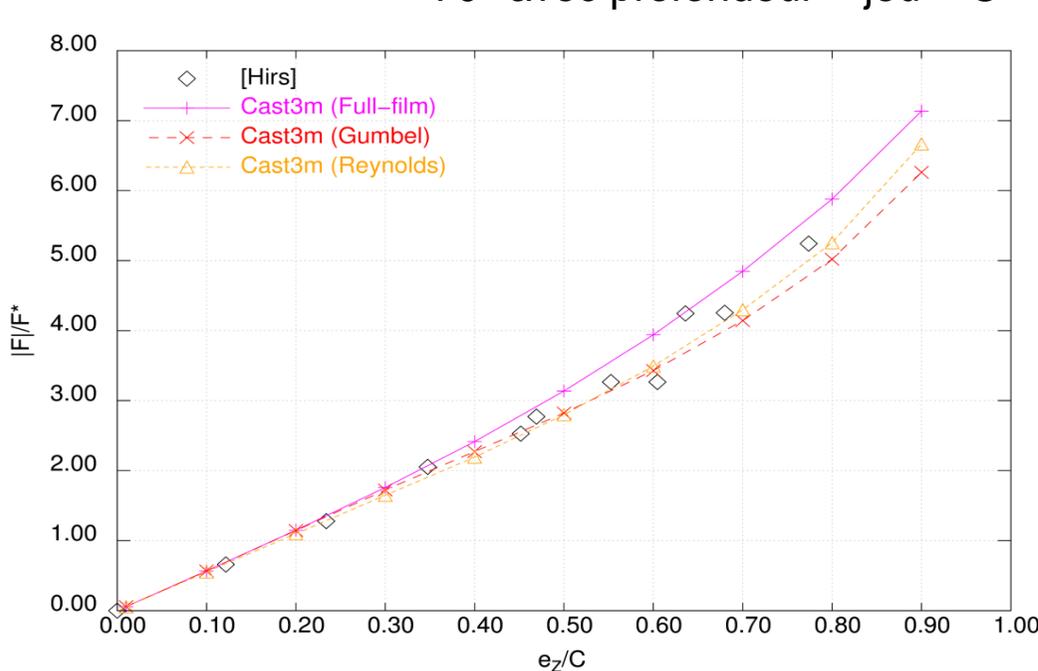
Expérience de [Hirs] : Palier cylindrique ( $R=2\text{mm}$ ,  $L=2R$ ) avec 8 rainures inclinées de  $70^\circ$  avec profondeur = jeu =  $C = 6\mu\text{m}$



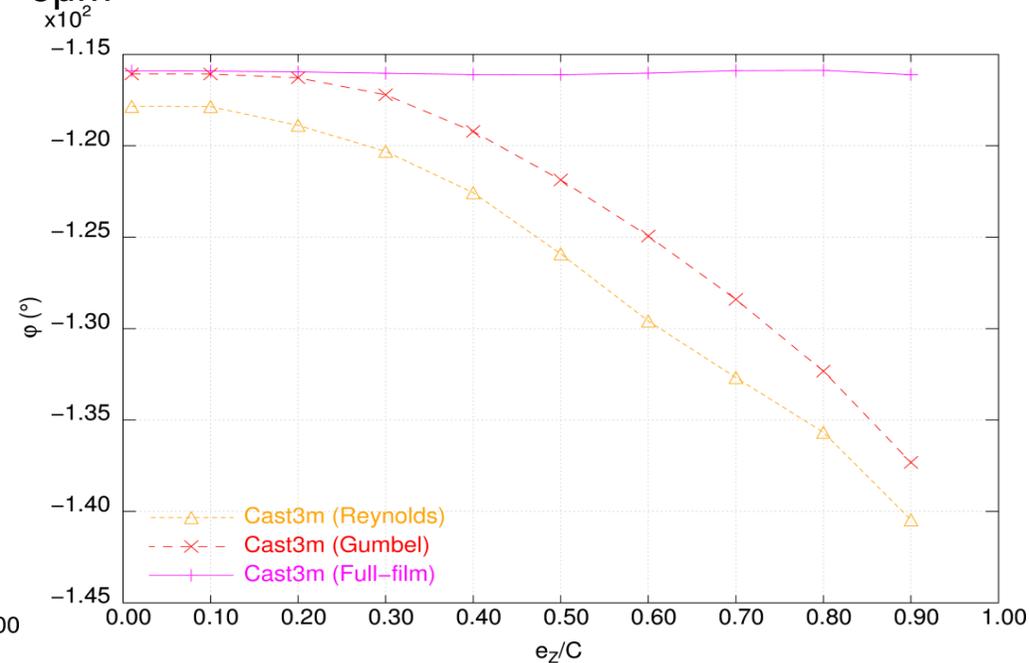
# Résolution de l'équation de Reynolds

- Prise en compte des rainures
  - Validation sur le cas test du *Herringbone groove bearing*

Expérience de [Hirs] : Palier cylindrique ( $R=2\text{mm}$ ,  $L=2R$ ) avec 8 rainures inclinées de  $70^\circ$  avec profondeur = jeu =  $C = 6\mu\text{m}$



Herringbone grooved journal bearings – Cast3M (8\_4\_200)



Herringbone grooved journal bearings – Cast3M (8\_4\_200)