



Modélisation d'un matériau viscoélastique par formulation incrémentale établie en relaxation

Établie par :

Omar Saifouni
Jean François Destrebecq
Rostand Moutou-Pitti

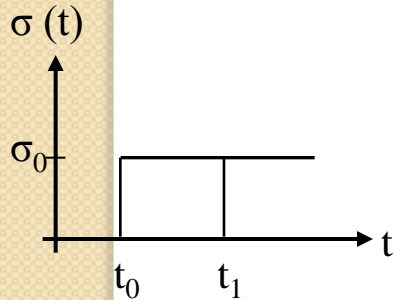
Plan de la présentation

- Comportement viscoélastique ;
- Formulations incrémentales ;
- Implémentation sous Cast3m ;
- Simulation numérique ;
- Conclusions & perspectives.

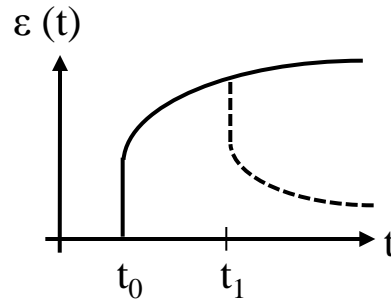
1. Comportement viscoélastique linéaire

➤ Certains matériaux sont caractérisés par un comportement différé, qui se manifeste de la manière suivante :

Expérience de fluage

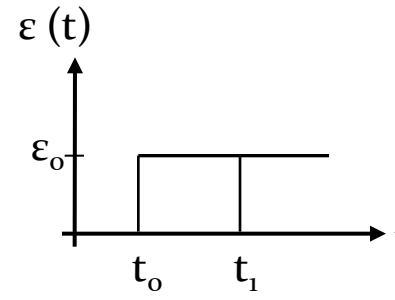


Exp. de fluage —

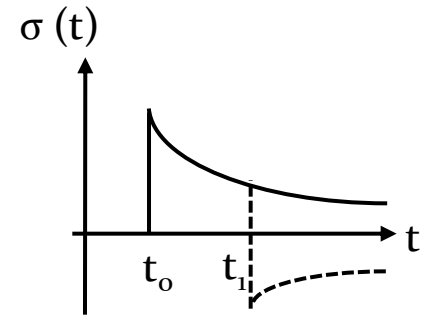


Exp. de recouvrance ----

Expérience de relaxation



Exp. de relaxation —



Exp. d'effacement ----

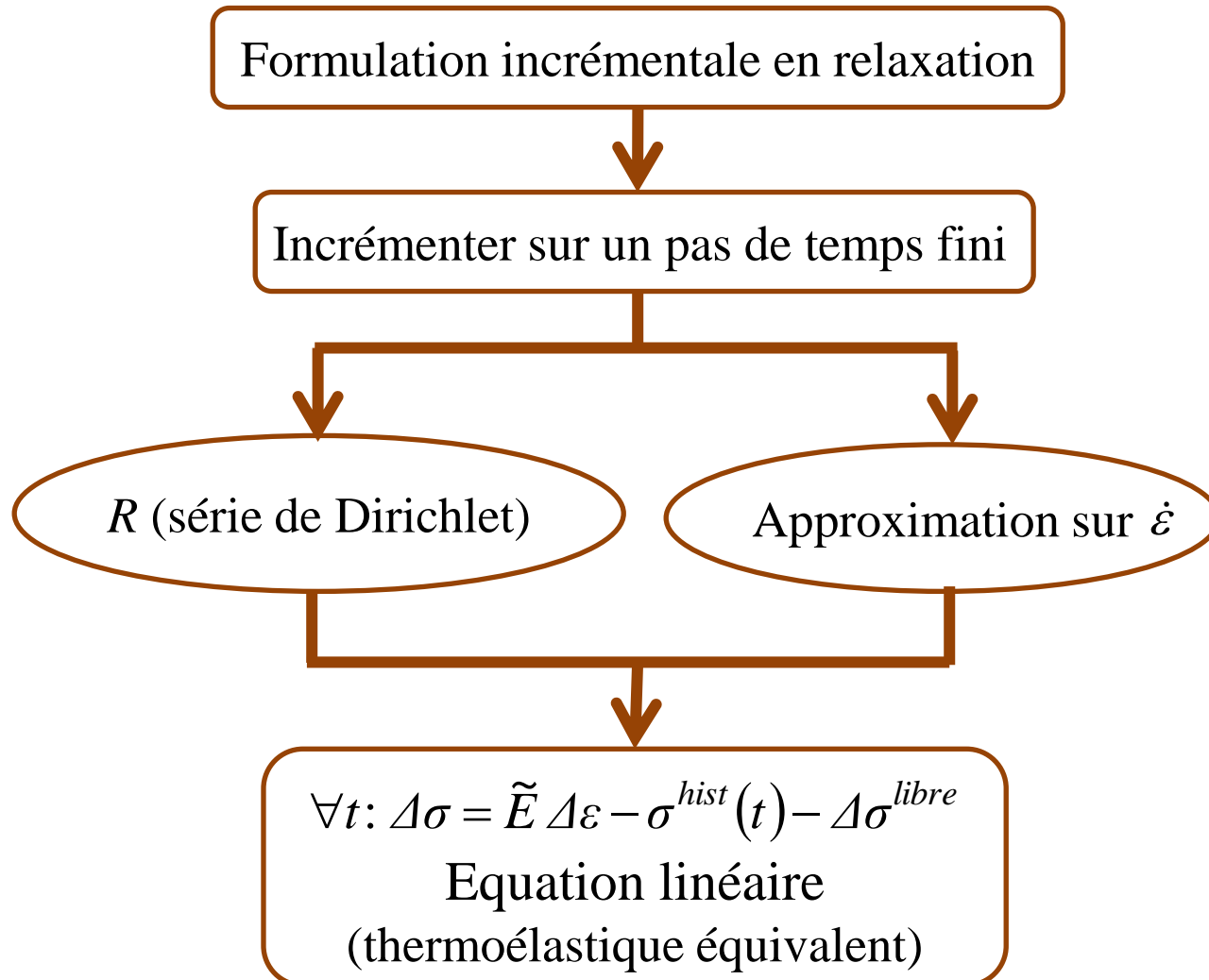
Lois de comportement

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon(t) = \int_0^t J(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad J : \text{fonct. de fluage} \\ \sigma(t) = \int_0^t R(t, \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad R : \text{fonct. de relaxation} \end{array} \right.$$

(Équations de Boltzmann)

Mise en œuvre numérique

2. Résolution d'un problème viscoélastique



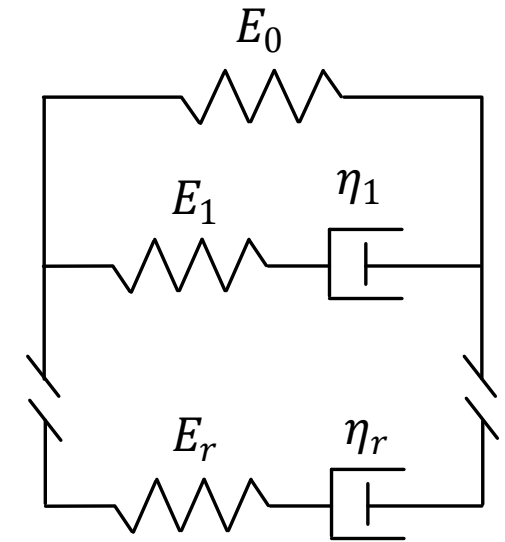
2.1 Fonction de relaxation :

On écrit la fonction de relaxation sous la forme d'une série de Dirichlet :

$$R(t, t_0) = E_0 + \sum_{\mu=1}^r E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-t_0)}$$

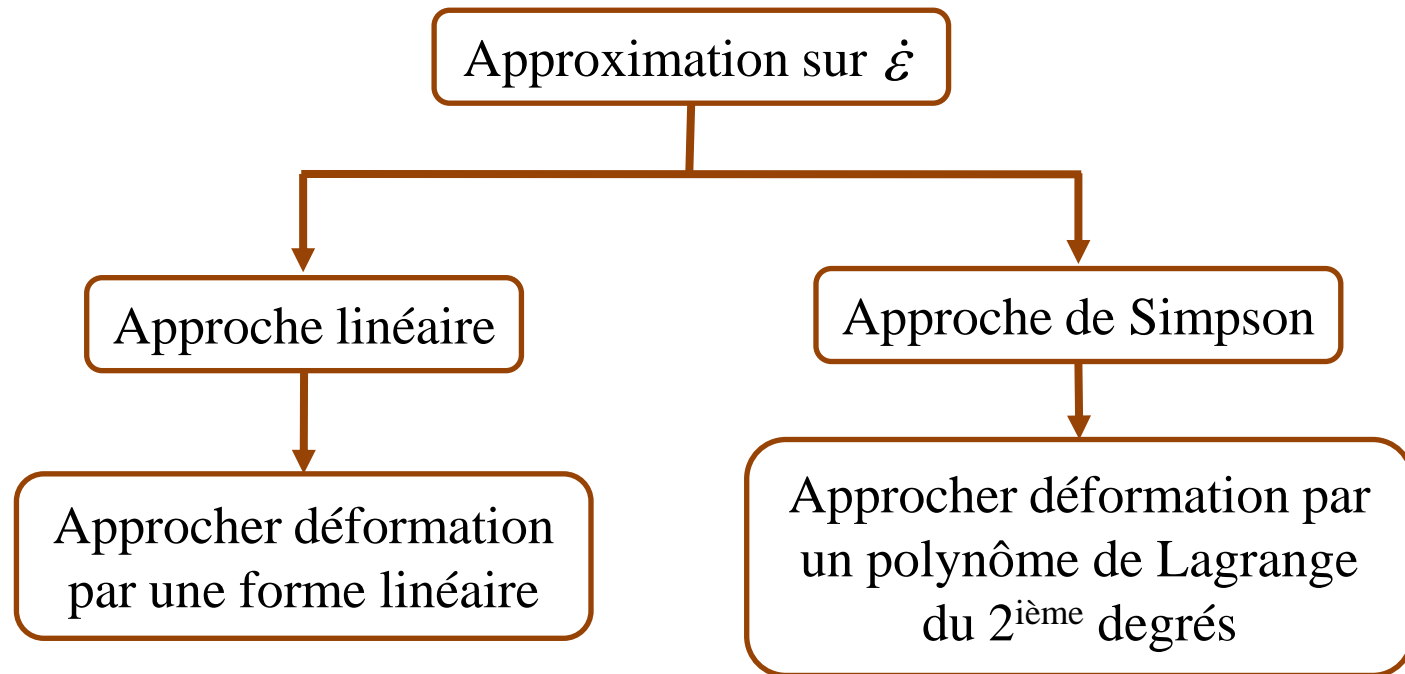
avec $\alpha_{\mu} = \frac{E_{\mu}}{\eta_{\mu}}$

η_r et E_{μ} : paramètres du modèle rhéologique de Maxwell



Maxwell généralisé

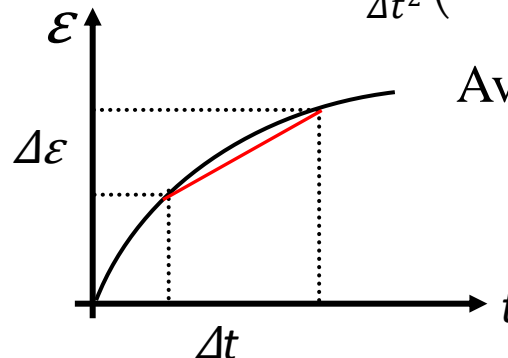
2.2 Approximation sur la vitesse de déformation :



$$\dot{\varepsilon}(\tau) = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t_k} = \text{constante}$$

$$\dot{\varepsilon}(\tau) = \frac{8}{\Delta t^2} \left(\varepsilon(t) - \varepsilon(\bar{t}) + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right) \left(\tau - t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}$$

Avec $\bar{t} = \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right)$



2.3 Forme finale :

$$\forall t, \Delta t : \quad \Delta \sigma = \tilde{E} \Delta \varepsilon - \sigma^{hist}(t) - \sigma^{libre}(t)$$

Module d'élasticité Fictif histoire de chargement

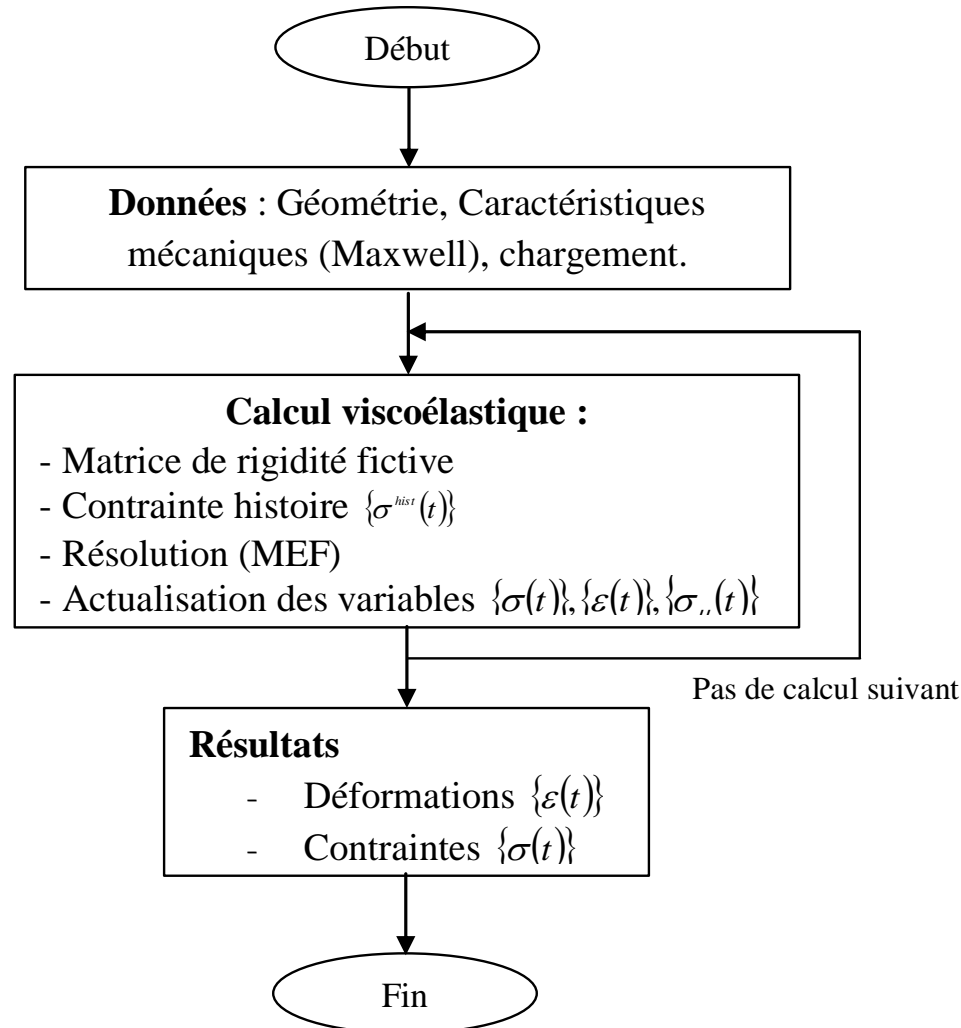
❖ Incrémentale linéaire :

$$\text{Avec} \begin{cases} \tilde{E} = E_0 + \sum_{\mu=1}^r \frac{E_{\mu}}{\alpha_{\mu} \Delta t} (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) \\ \sigma^{hist}(t) = \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) \sigma_{\mu}(t) \end{cases}$$

❖ Incrémentale Simpson :

$$\text{Avec} \begin{cases} \tilde{E} = E_0 + \sum_{\mu=1}^r \frac{E_{\mu}}{\alpha_{\mu} \Delta t} \left[4 - \left(\frac{4}{\alpha_{\mu} \Delta t} + 1 \right) (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) \right] \\ \sigma^{hist}(t) = \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) \sigma_{\mu}(t) - (\varepsilon(t) - \varepsilon(\bar{t})) \left(\frac{8E_{\mu}}{\alpha_{\mu} \Delta t} \right) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_{\mu} \Delta t} \right] \end{cases}$$

3.1 Implémentation éléments finis sous Cast3m



*Organigramme du programme
implémenté sous Cast3m*

3.2 Choix du pas de temps / Approche de Simpson

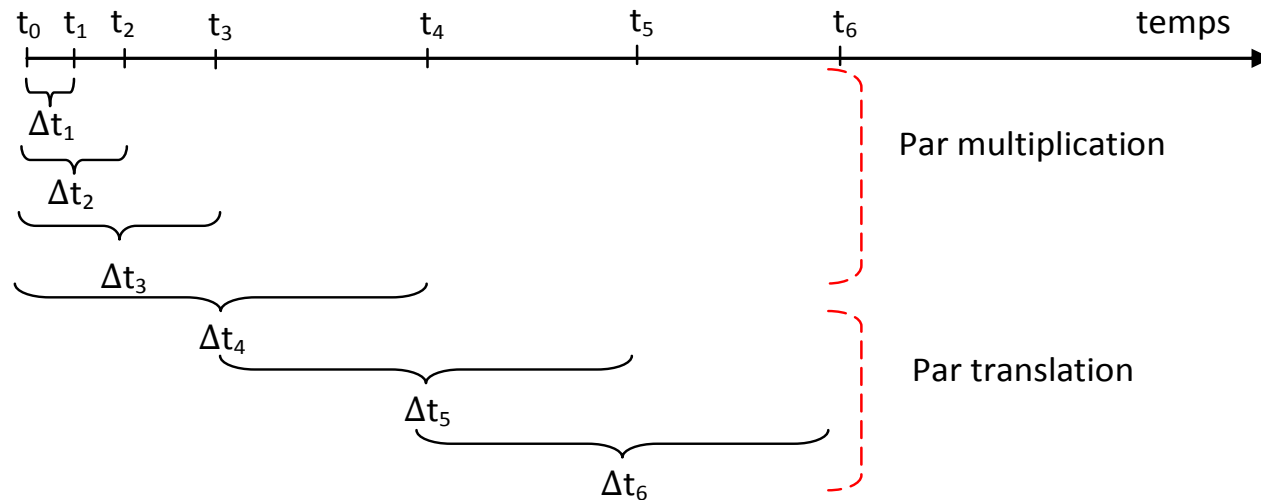
1^{ère} étape : Par multiplication des pas de temps :

Détermine le plus grand pas de temps Δt qui sera utilisé pour faire la translation.

Le 1^{er} pas de temps : calcul Classique, les autres pas de temps : Simpson ($\Delta t_{i+1} = 2 \times \Delta t_i$)

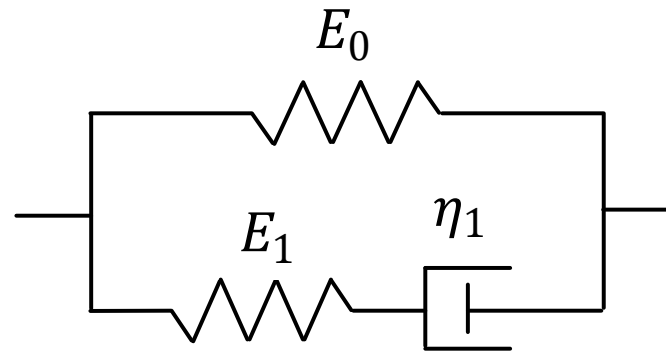
2^{ème} étape : Par translation et chevauchement des pas de temps :

Pour une précision souhaitée d'un pas choisi, on continue par translation avec des pas de temps constant ($\Delta t_{i+1} = \Delta t_i$) selon le schéma suivant :



3.3 Validation de l'approche de Simpson

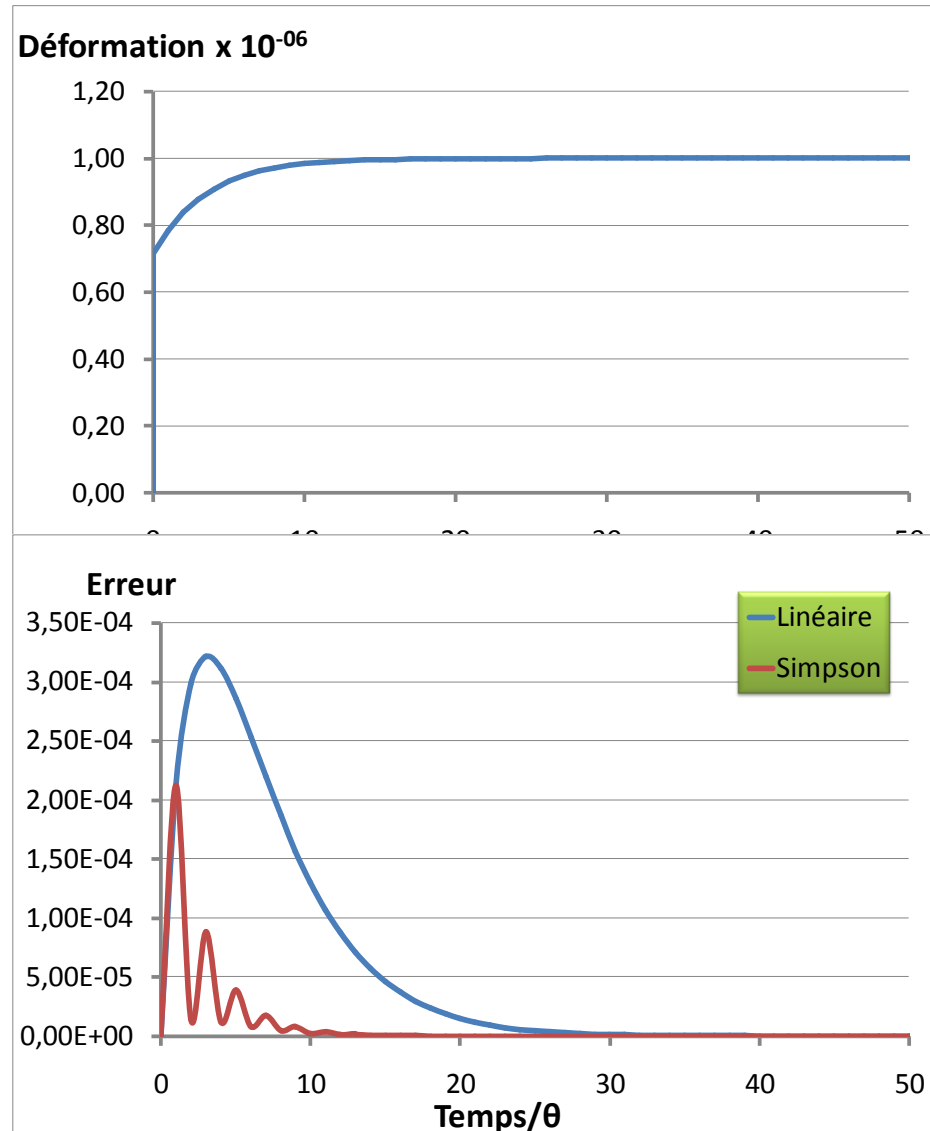
- On calcul la déformation d'une barre en compression sous cast3m par les deux approches incrémentales (linéaire et Simpson).
- Les résultats sont comparés aux résultats analytiques exactes.
- Modèle rhéologique proposé est un Zener.



Modèle de Zener

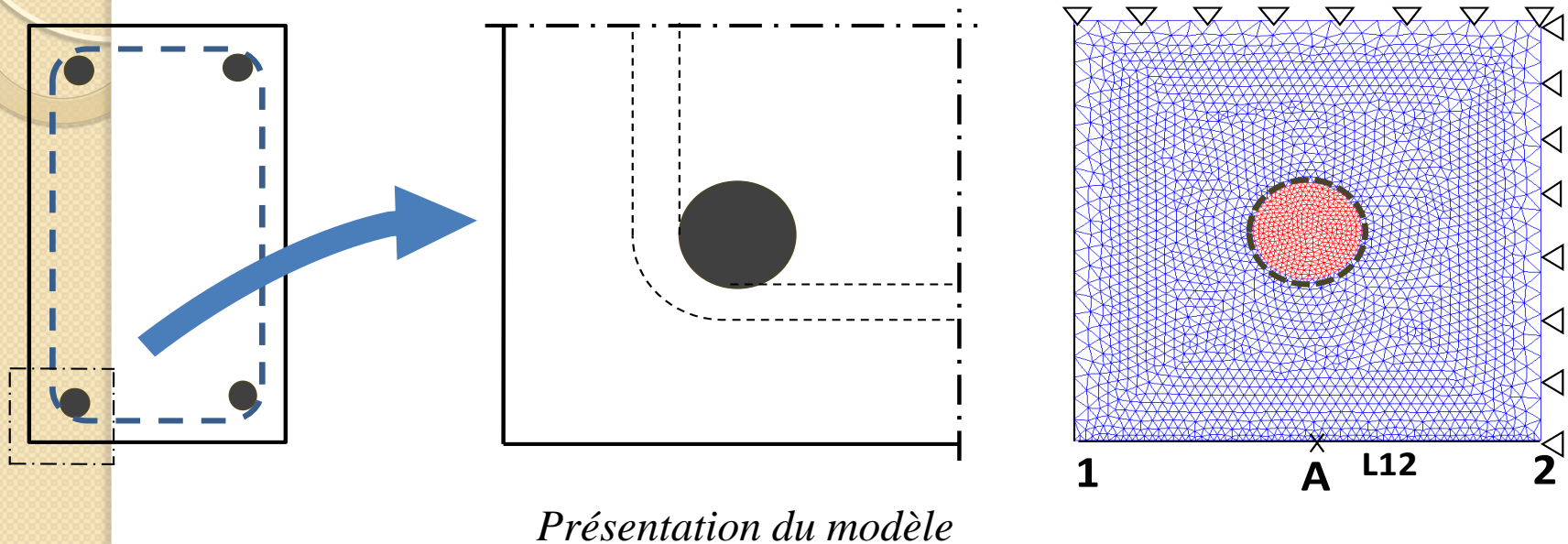
3.4 Comparaison approches

Courbe de déformation
(courbe de fluage)



Courbes de l'erreur relative
calculée par rapport aux
résultats analytiques exactes.

4. Simulation d'une armature d'angle



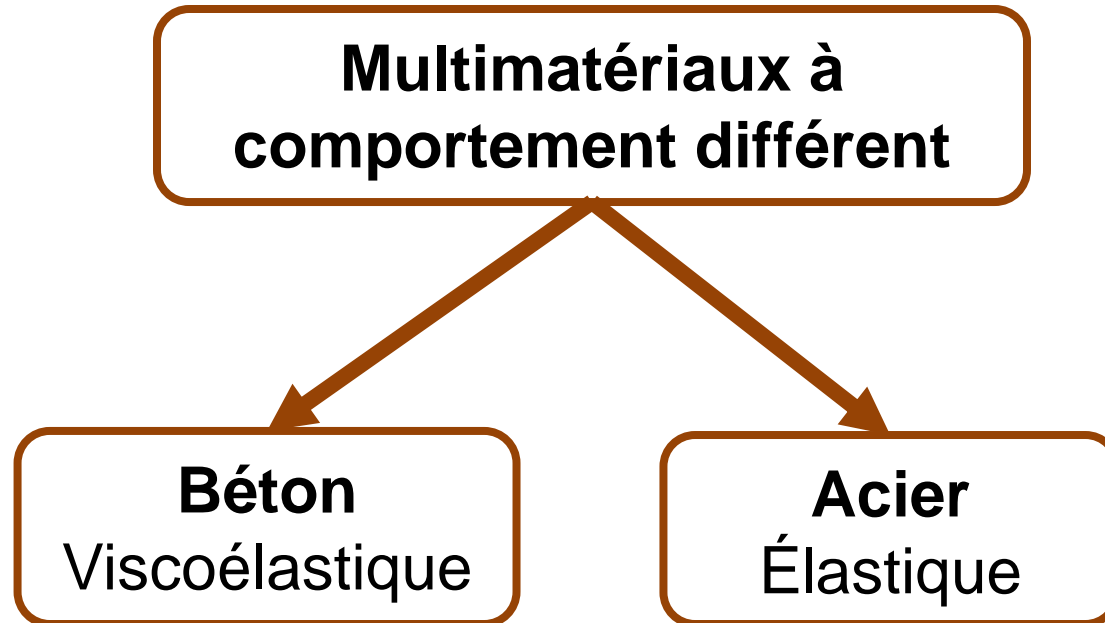
Caractéristiques du béton

- Classe C25/30
- $\nu_c = 0,2$
- Âge 20 ans
- $E_c = 34,6 \text{ GPa}$

Caractéristiques de l'acier

- $\nu_s = 0,3$
- $E_s = 210 \text{ GPa}$

4.1 Lois de comportement



4.2 Béton / Formulation incrémentale : cas 3D isotrope

- Loi de comportement viscoélastique 3D

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t, \tau) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) d\tau$$

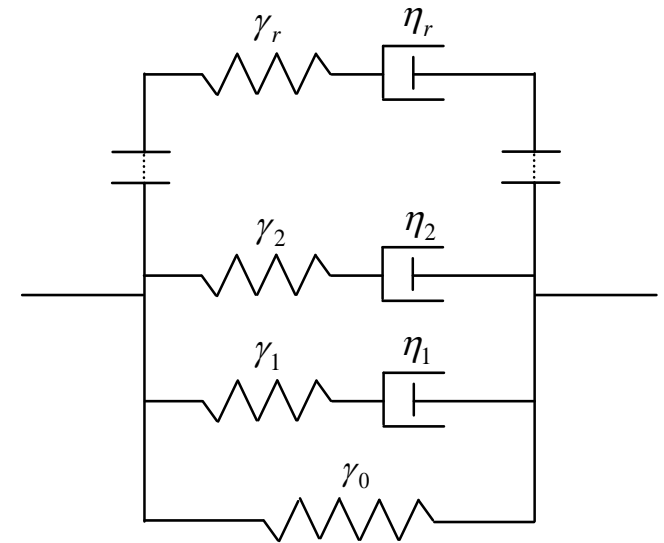
- Tenseur de relaxation isotrope :

$$\mathbf{R}(t, t_0) = \rho(t, t_0) \mathbf{A}_c$$

$$\rho(t, t_0) = \gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-t_0)}$$

$$\alpha_{\mu} = \gamma_{\mu} / \eta_{\mu} \quad \text{et} \quad \sum_{\mu=0}^r \gamma_{\mu} = 1$$

α_{μ} et γ_{μ} : paramètres du modèle de Maxwell



Maxwell généralisé
adimensionnel

4.2 Béton / Formulation incrémentale : cas 3D isotrope

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{A}_c \left[\int_0^t \rho(t, \tau) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) d\tau \right]$$

➤ Finalement :

$$\forall t, \Delta t : \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{A}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{hist}}(t)$$

Tenseur d'élasticité Fictif *Tenseur d'histoire de chargement*

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{A}} = \left(\gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{\mu} \frac{1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}}{\alpha_{\mu} \Delta t} \right) \mathbf{A}_c \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{hist}}(t) = \sum_{\mu=1}^r \left(1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t} \right) \boldsymbol{\sigma}_{\mu}(t) \end{array} \right.$$

4.2 Béton / Identification des paramètres

Calcul de la fonction de fluage

$j(t, t_0)$ proposée par l'EC2



$$r(t, t_0) = (\gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-t_0)}) E_c$$

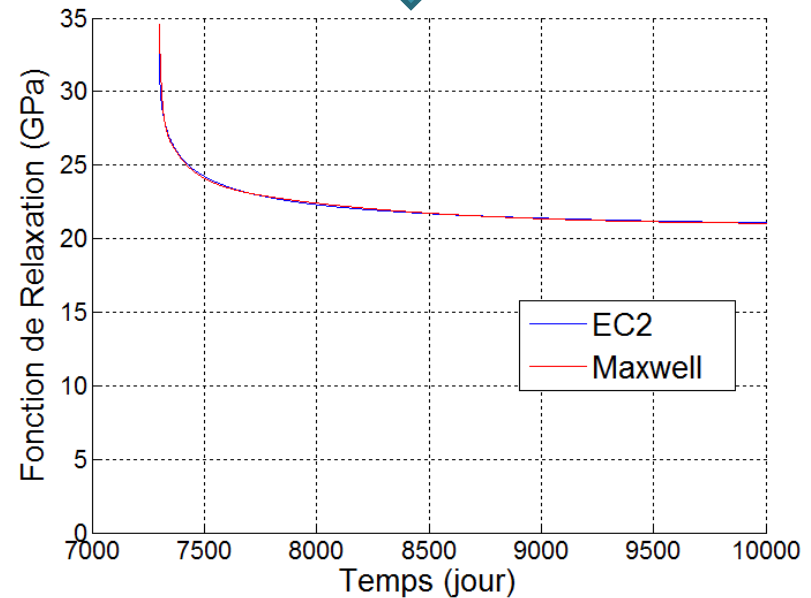
Branche	α_{μ} (jour ⁻¹)	γ_{μ}
1	-	0,602
2	0,1	0,177
3	0,01	0,128
4	0,001	0,093



*Identification des paramètres
du modèle de Maxwell
(moindres carrés)*

Calcul de $r(t, t_0)$ par l'inversion de la
fonction de fluage $j(t, t_0)$

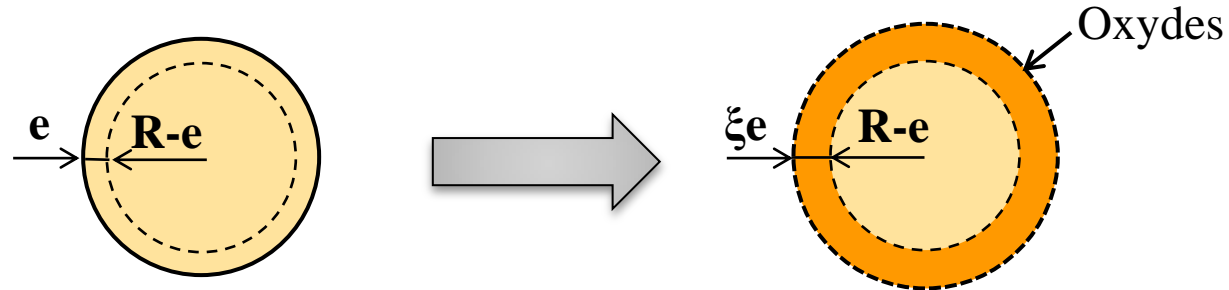
$$j(t, t) r(t_0, t) - \int \frac{\partial j(\tau, t)}{\partial \tau} r(t_0, \tau) d\tau = 1$$



Courbe de relaxation

4.3 Armature / Modèle proposé

- Couche d'épaisseur (e) se transforme en oxydes.



Avant transformation

Après transformation

- L'épaisseur (e) est donnée par la loi de Faraday qui exprime la vitesse de pénétration en fonction du courant de corrosion.

$$Pr = 0,01163 i_{cor} \quad \longrightarrow \quad e(t) = 0,01163 i_{cor} (t - t_i)$$

[Pr en mm/an ; i_{cor} en $\mu\text{A}/\text{cm}^2$]

t_i : instant du début de corrosion

4.3 Armature / Comportement thermo-élastique équivalent

La variation de rayon de la barre est interprétée comme résultant d'une déformation libre équivalente, soit sur l'intervalle de temps Δt :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cor}} = \frac{\Delta R}{R} \mathbf{1} \quad \longrightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cor}} = (\xi - 1) \frac{\Delta e}{R} \mathbf{1}$$

Loi de comportement élastique équivalente de l'armature :

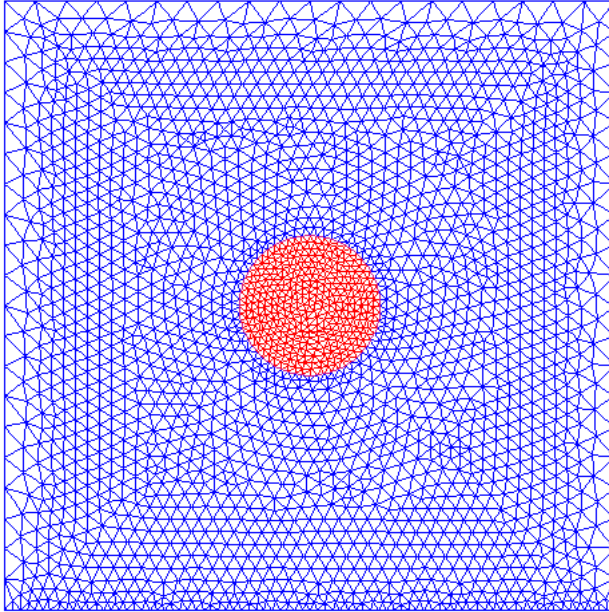
$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_s : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{cor}}$$

Avec :

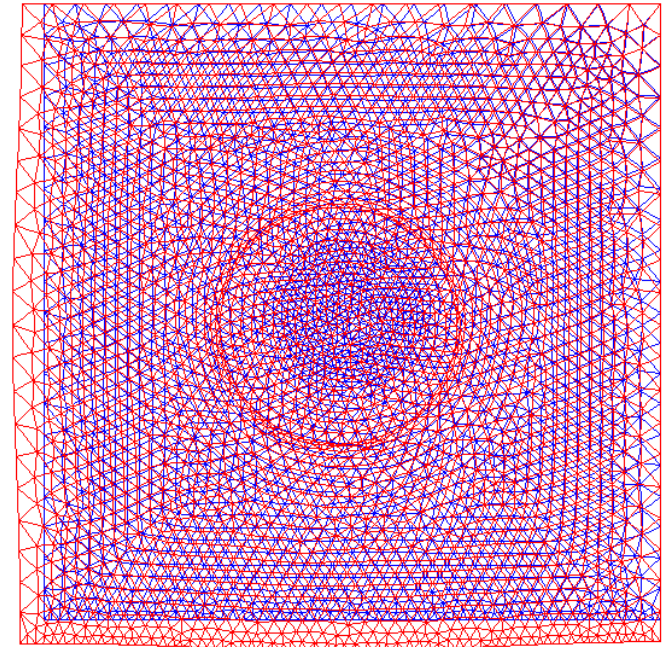
\mathbf{A}_s : est le tenseur d'élasticité de l'armature

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{\text{cor}} = \mathbf{A}_s : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cor}}$$

4.4 Résultats / Déformée



État initial



État déformé

4.4 Résultats / Contraintes principales

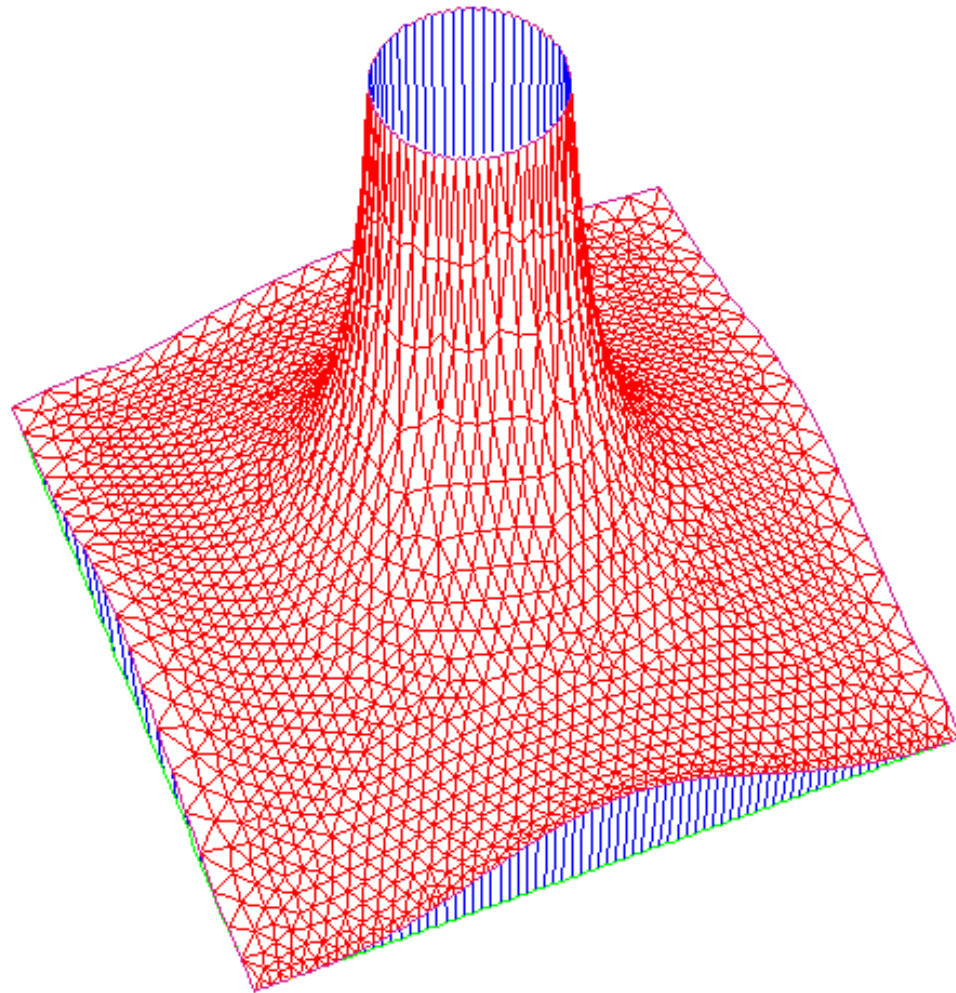
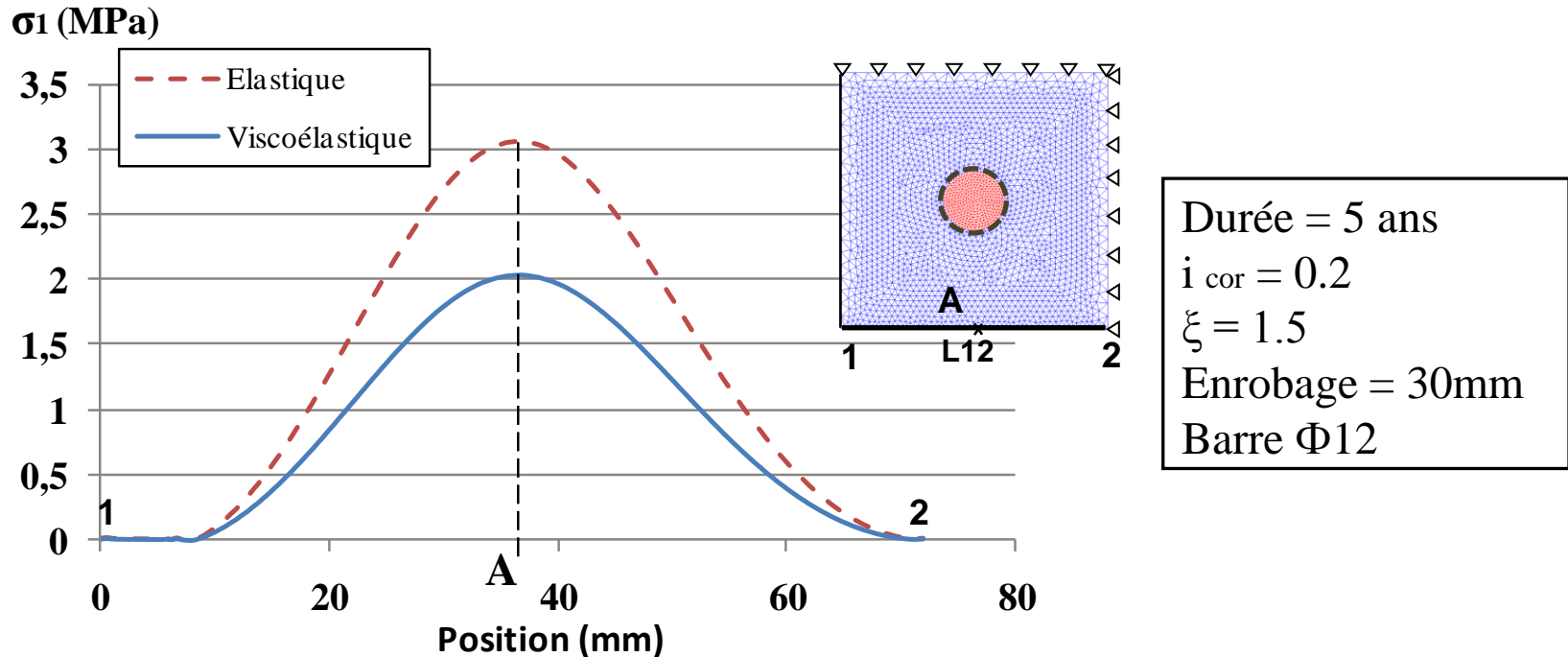


Diagramme contraintes principales

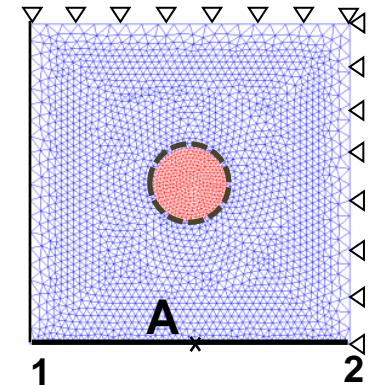
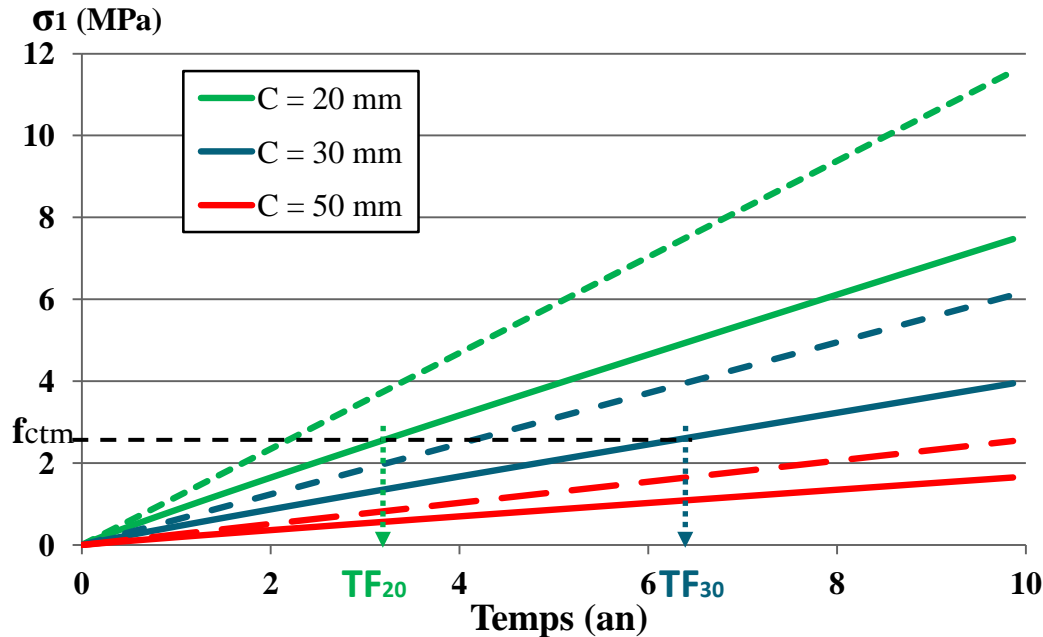
4.4 Résultats / Comparaison calcul élastique



Contrainte principale de traction sur le parement (ligne L12)

- Le calcul élastique surestime largement la contrainte dans le béton;
- La contrainte maximale est atteinte à l'aplomb de l'armature (point A)

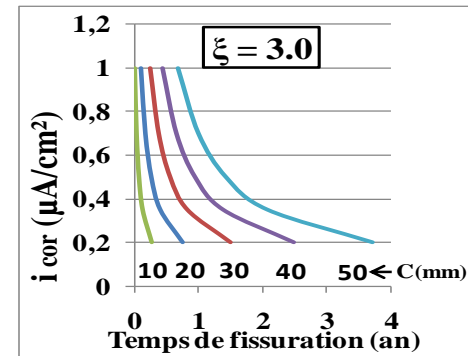
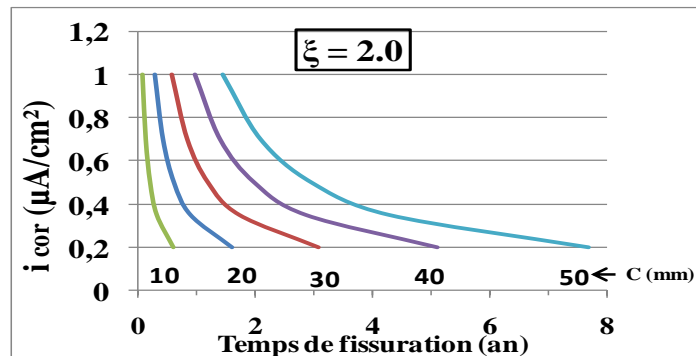
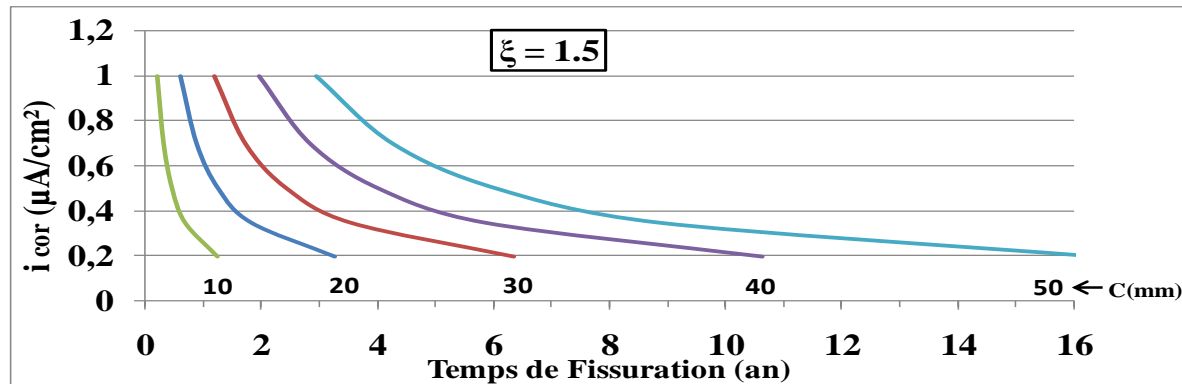
4.4 Résultats / Estimation du temps de fissuration



Evolution de la contrainte principale de traction au point A au cours du temps: calcul viscoélastique (trait continu), calcul élastique (trait discontinu)

- La vitesse d'évolution de la contrainte dépend de l'enrobage.
- La fissuration survient lorsque $\sigma = f_{ctm}$ (2,56 MPa)
- La durée de vie (temps de fissuration) augmente avec l'enrobage.

4.4 Résultats / Enrobage à prévoir



Relation entre l'enrobage, le courant de corrosion et le temps de fissuration pour trois valeurs du coefficient d'expansion ξ

- Détermination de l'enrobage à prévoir pour un délai de fissuration souhaité (durée de vie), sous des conditions de corrosion données (i_{cor} et ξ).

5. Conclusions & Perspectives

- La formulation incrémentale proposée basée sur la méthode de Simpson est plus précise que l'approche incrémentale linéaire ;
- La formulation en relaxation donne une loi de comportement incrémentale exprimée en rigidité ce qui présente l'avantage de ne pas inverser la matrice de rigidité du système ;
- La formulation est généralisée dans le cas tridimensionnel isotrope ;
- La simulation de la barre d'armature enrobée pourra être améliorée en intégrant une loi d'endommagement incrémentale pour le béton de contact.



Merci pour votre attention