Les performances des modèles hyperélastiques GD et GDM dans Cast3M : Modélisations du Caoutchouc avec effet Mullins

Modèles ECCMR 2011, L. Gornet, R. Desmorat, G. Marckmann, P. Charrier

Laurent GORNET

École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

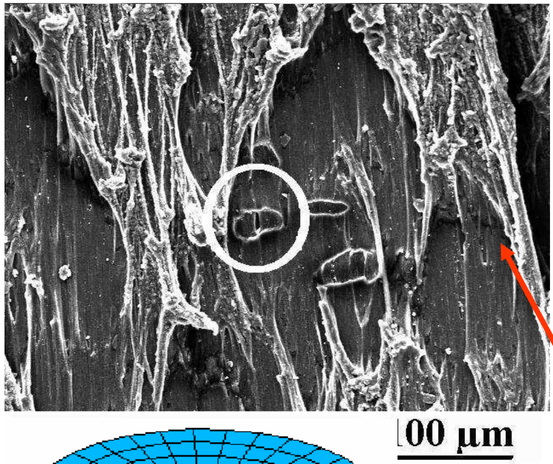
Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Plan

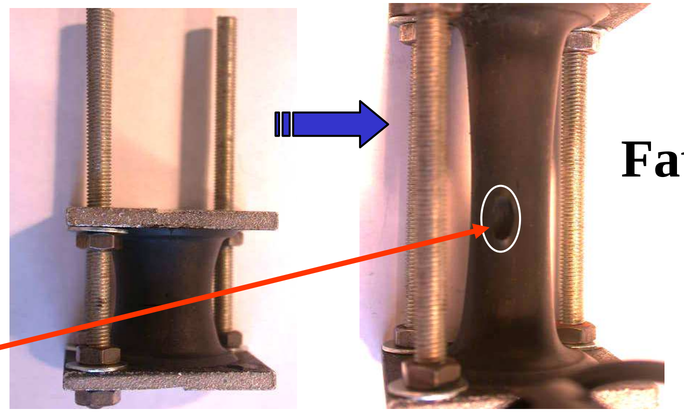
- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - Essais et identification de Mooney à GD, GDM
- Développement UMAT
  - Mode, Mate, GD, GDM
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, analytique et Abaqus
- Conclusion

Durabilité des structures

Interaction modèle-expérience



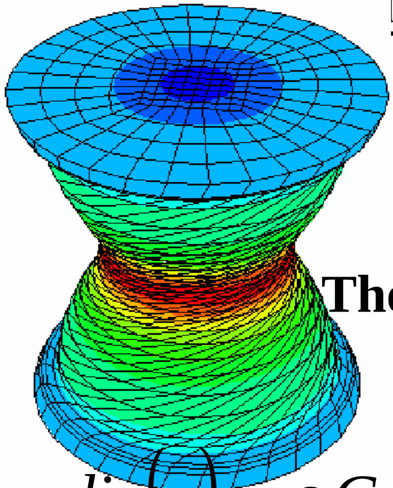
Rupture



Fatigue

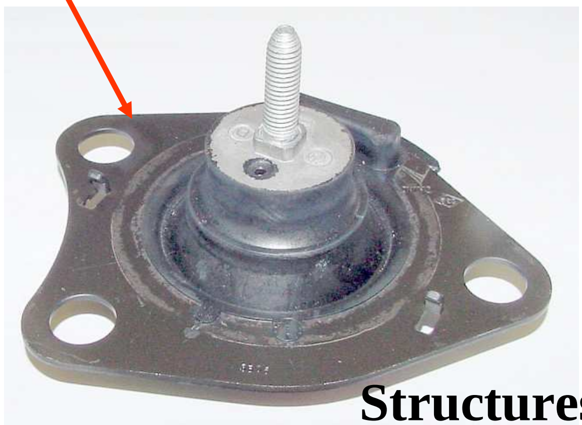
TRELLEBORG
AUTOMOTIVE

Caoutchouc : études multi-échelles

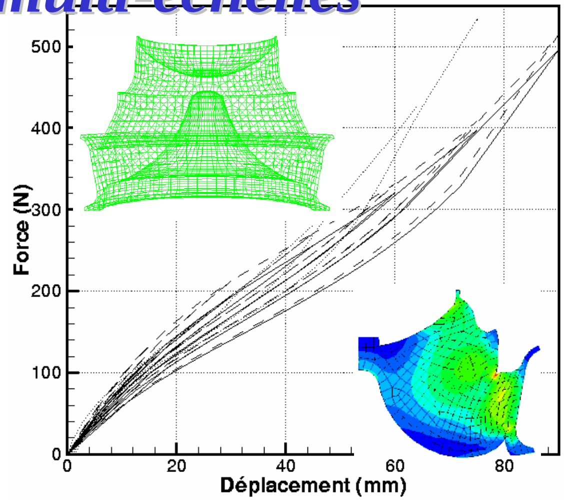


Thermique

$$r - div(\underline{q}) = \rho.Cp.\frac{\partial T}{\partial t}$$



Structures



École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

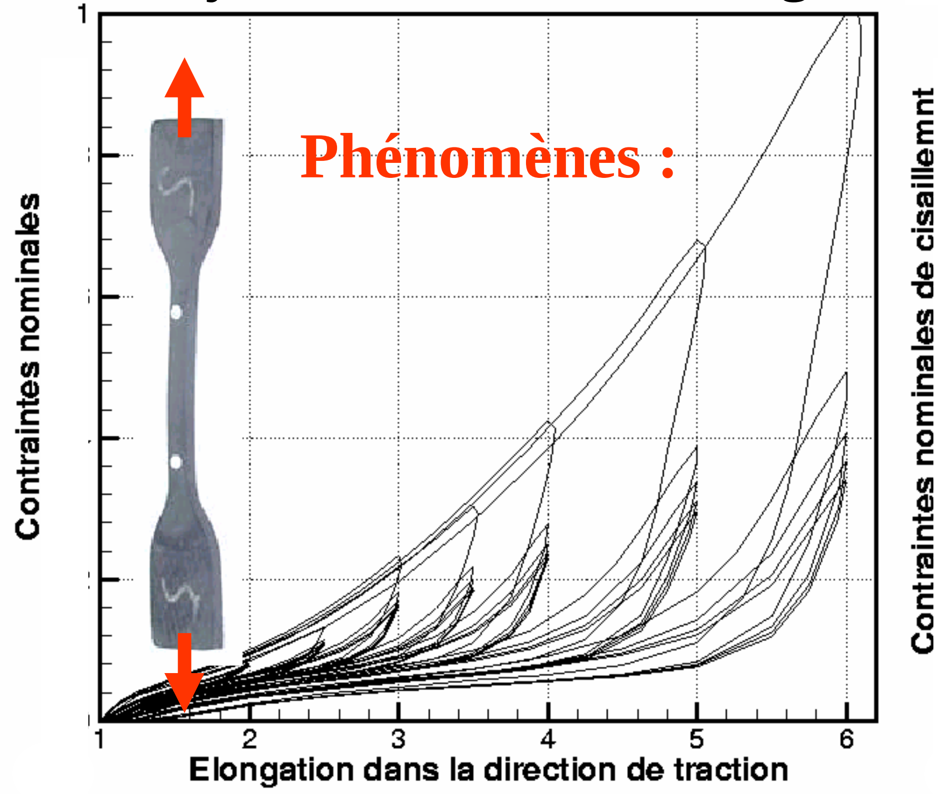
Plan

- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - Essais et identification de Mooney à GD, GDM
- Développement UMAT
  - Mode, Mate, GD, GDM
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, analytique et Abaqus
- Conclusion

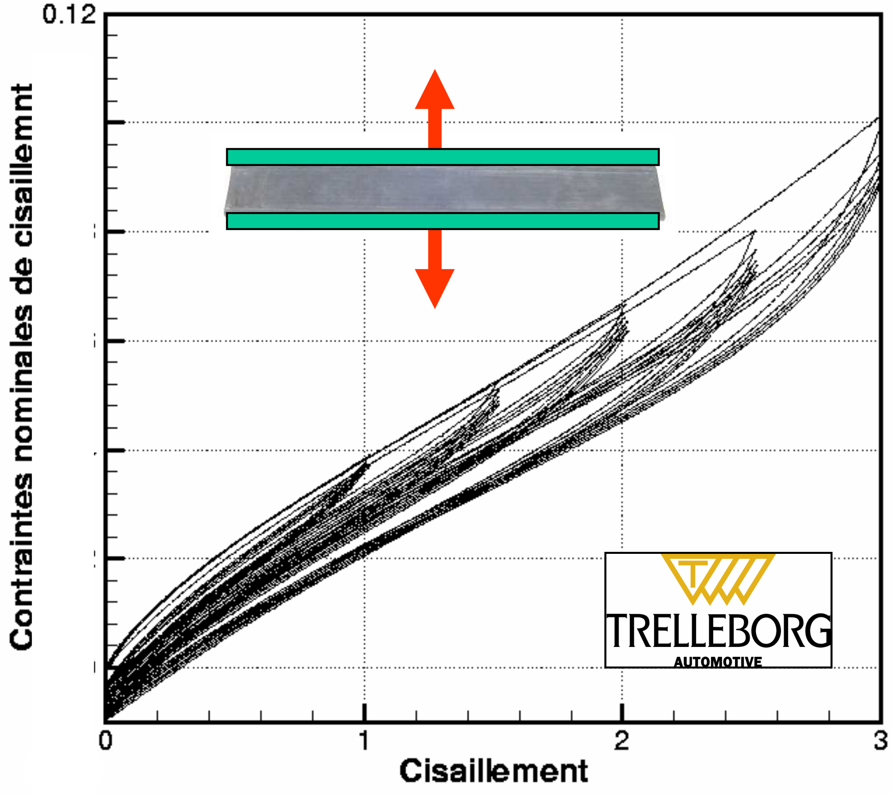
Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

La physique du caoutchouc

Essais cyclés de traction et de glissement pur



Phénomènes :



Effet Payne **Hystérésis** **Effet Mullins**

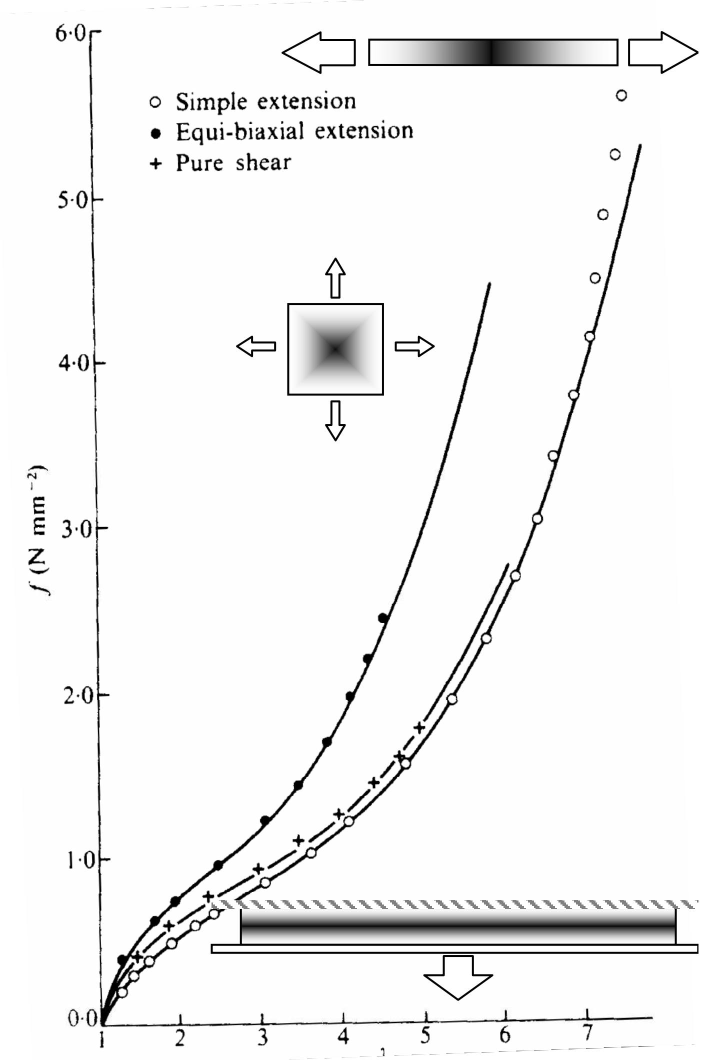
L.R.G. TRELOAR

Expériences 1944

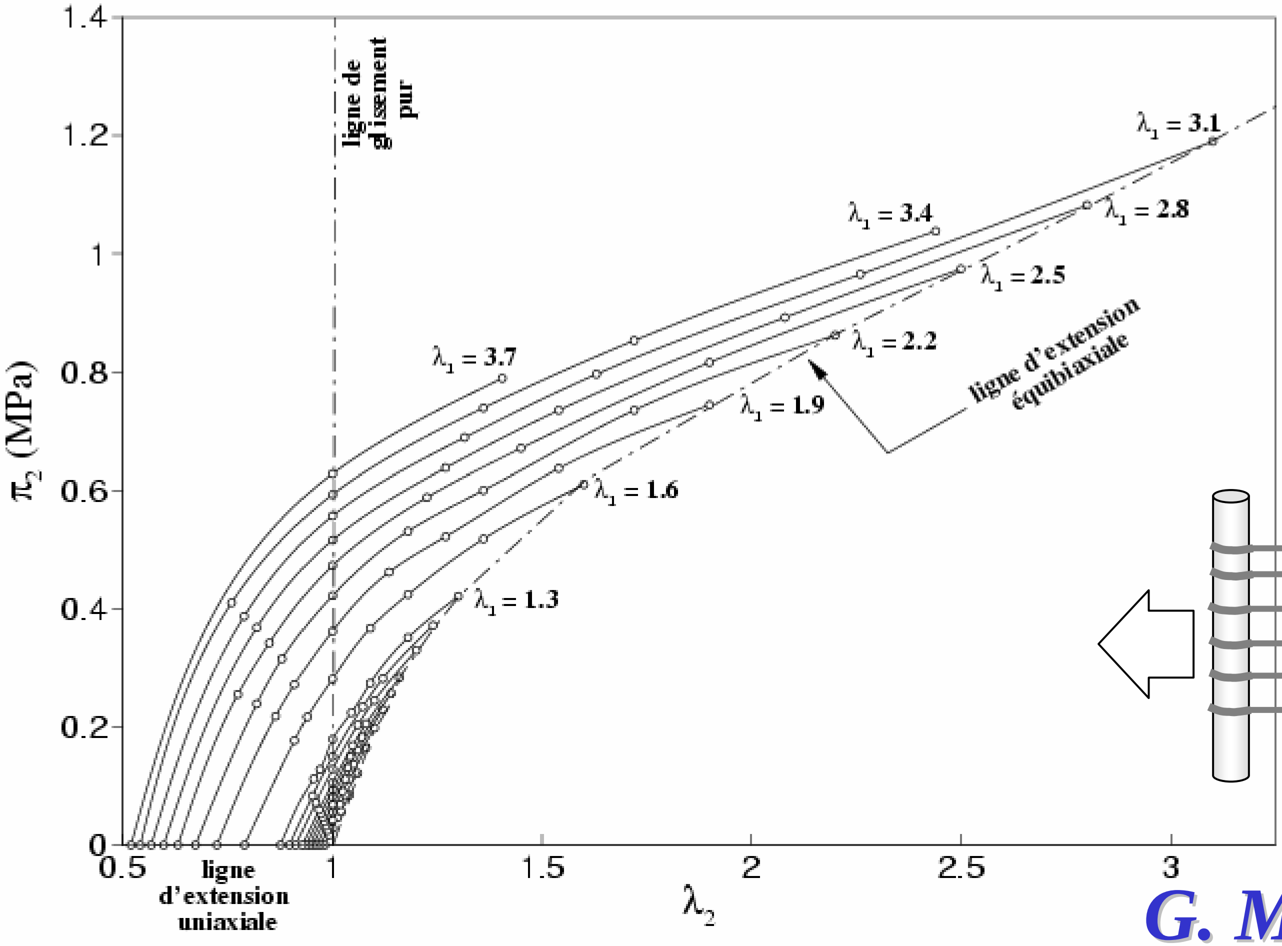
- Caoutchouc naturel vulcanisé
  - Traction simple
  - Traction Equi-Biaxiale
  - Glissement pur

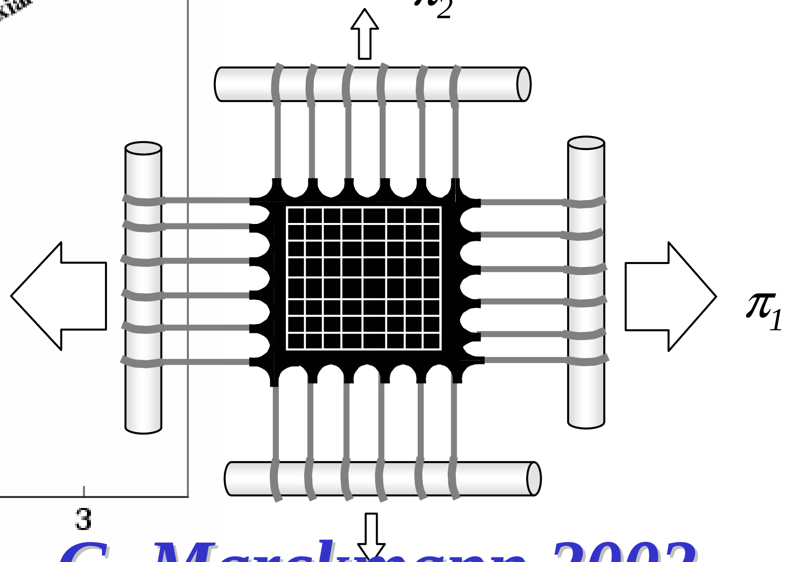
Simulations avec Ogden (1972)

6 constantes



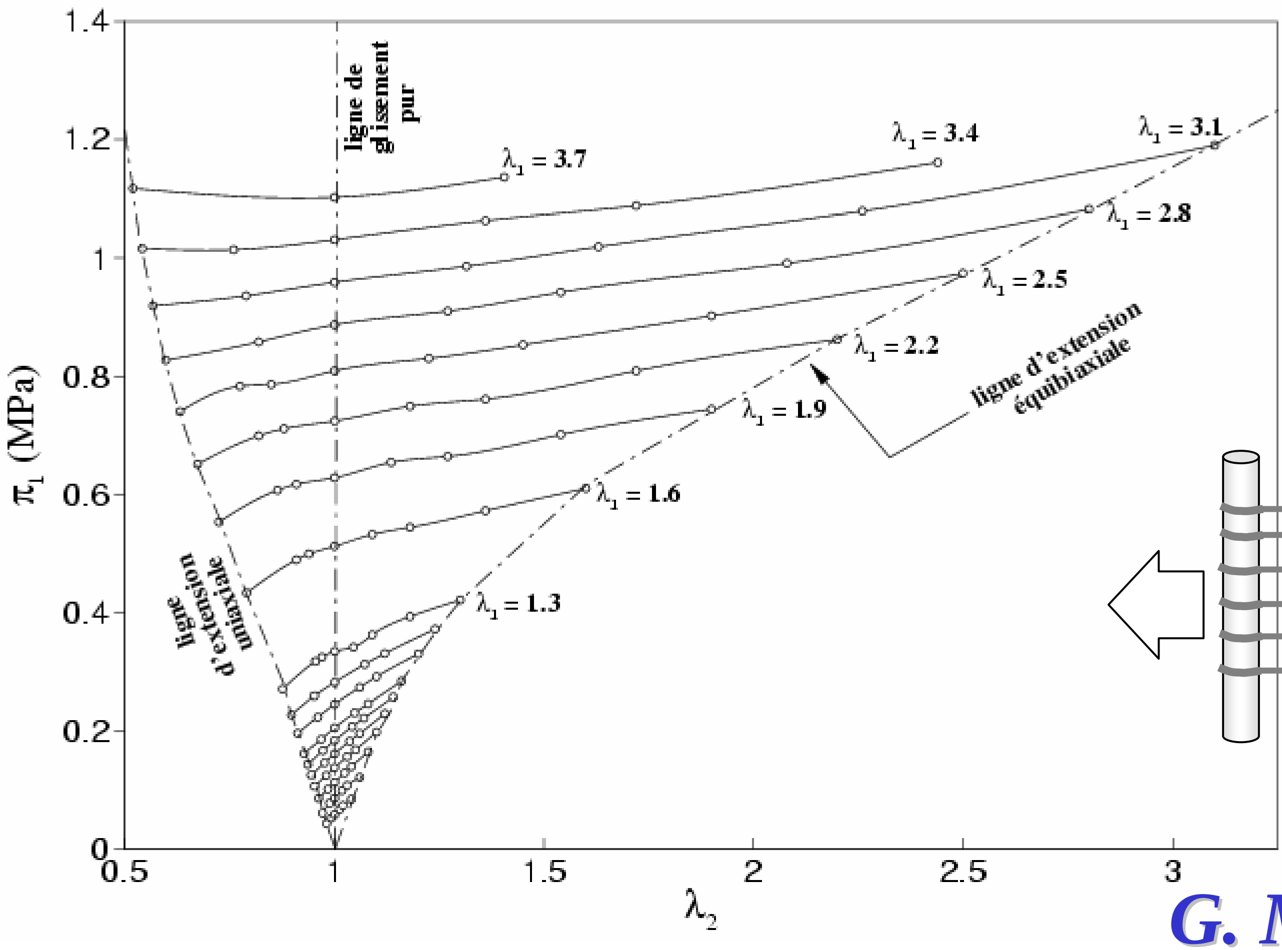
Kawabata 1981
Traction biaxiale

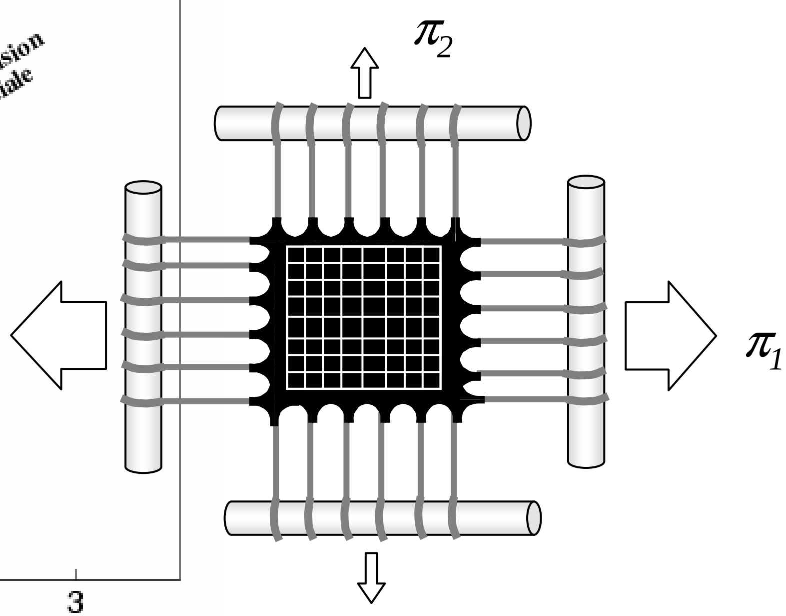




G. Marckmann 2002

Kawabata 1981
Traction biaxiale





G. Marckmann 2002

Treloar, Néo-hookean

Approche statistique (1940)

- Energie de déformation
- Statistique Gaussienne des chaines

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) \qquad C_{10} = 0.5NkT$$

- N: nombre de chaines moléculaires par unité de volume
- K: constante de Botzmann
- T: température absolue

Séries Polynômiales
Mooney Rivlin (1948)

$$W = \sum_{i=0,\, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$$

- Biderman (1958) 4 constantes

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3.$$

- Haines-Wilson (1975) 6 constantes

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3.$$

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Modèles hyperélastique phénoménologiques

Caoutchouc 1940 - 1975

• Mooney Rivlin (1948) — N constantes

$$W = \sum_{i=0,\, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$$

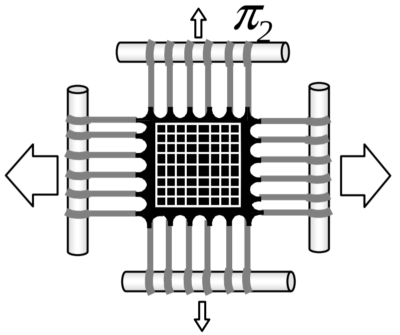
•Gent Thomas (1958) — 2 constantes

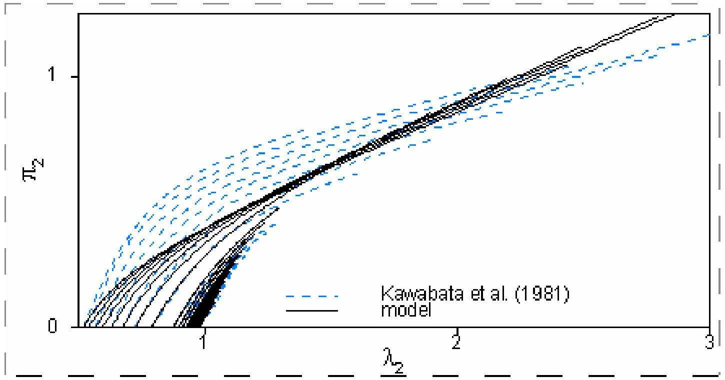
$$W = C_1 \left(I_1 - 3 \right) + C_2 \ln \left(I_2 / 3 \right)$$

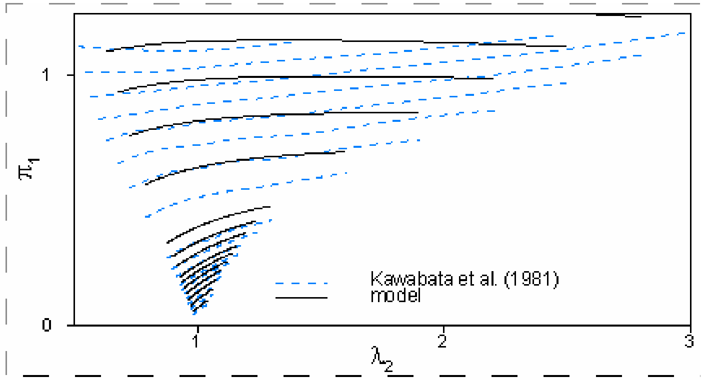
•Hart-Smith (1967) — 3 constantes

$$W = C_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp(C_3 I_1^{'2}) dI_1 + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right)$$

Mooney Rivlin, 1940

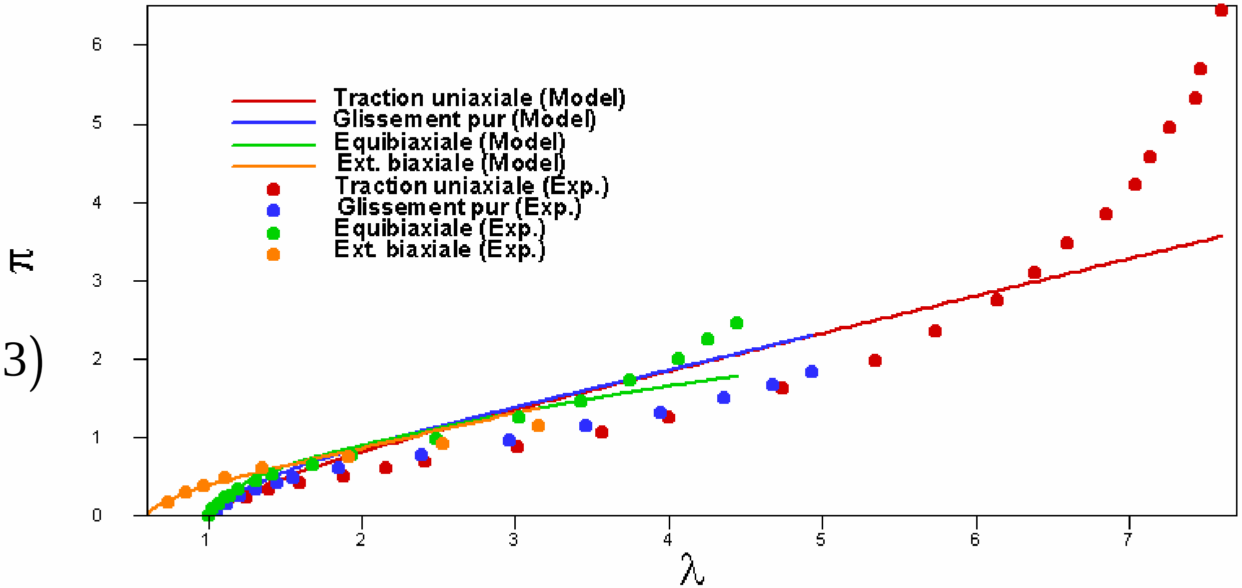




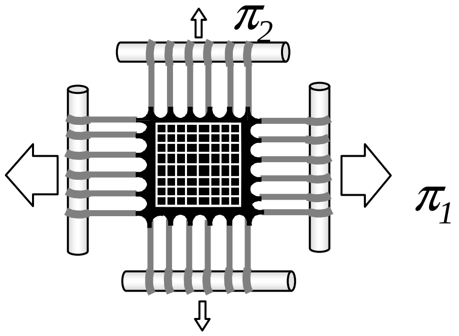


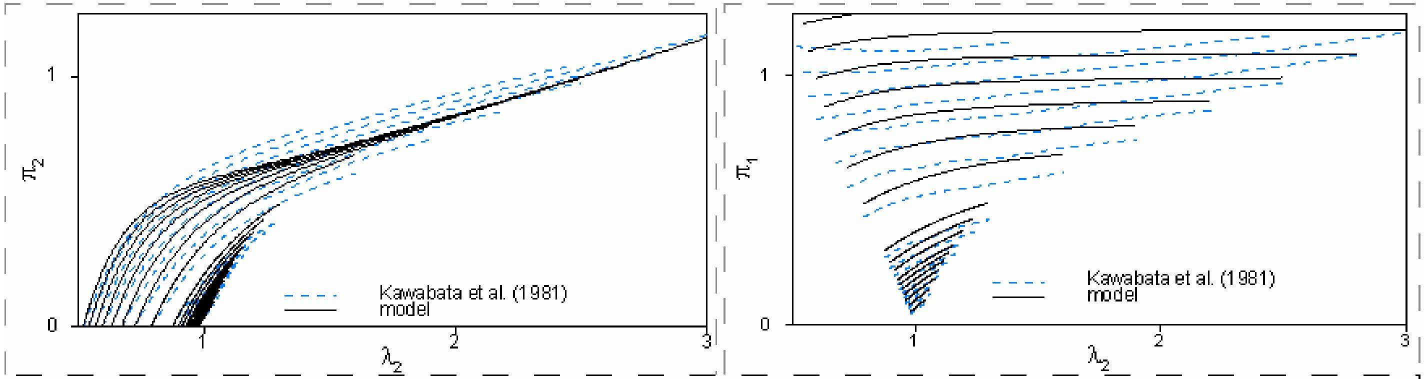
2 constantes

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$



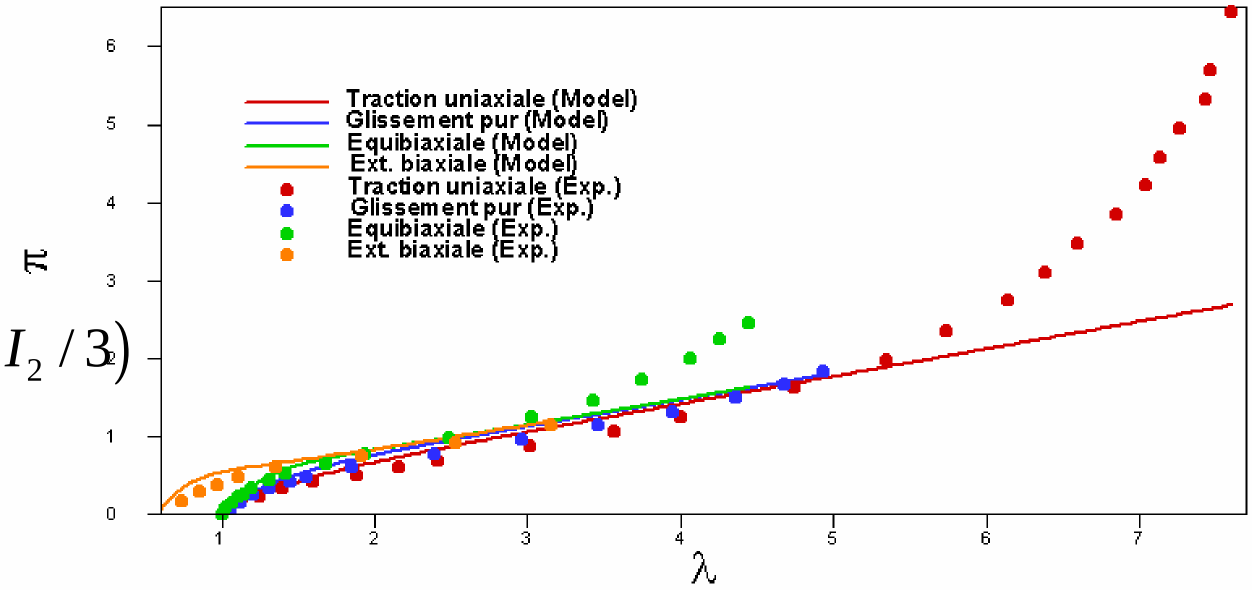
Gent Thomas, 1958



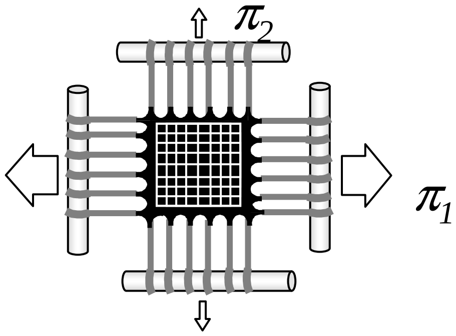


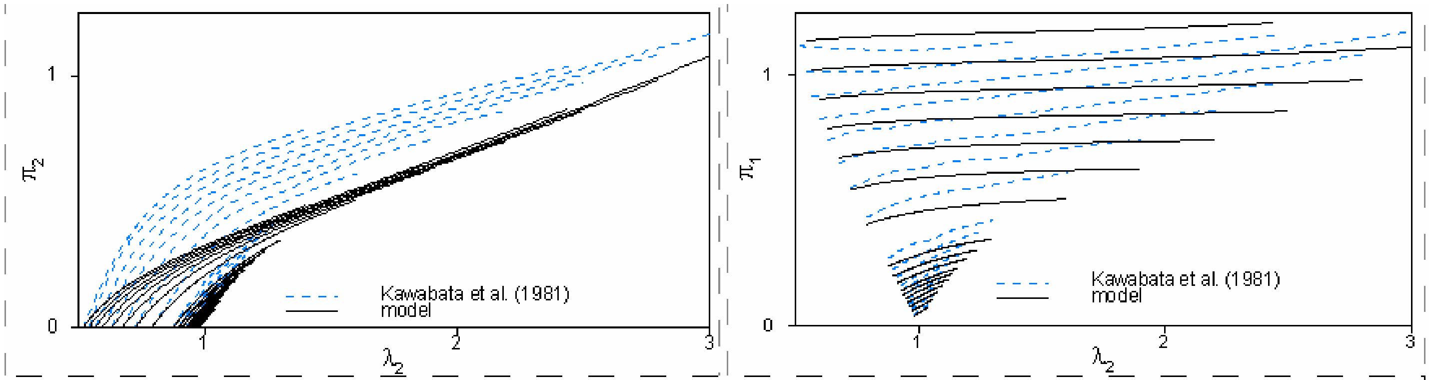
2 constantes

$$W = C_1\left(I_1 - 3\right) + C_2 \ln\left(I_2 / 3\right)$$



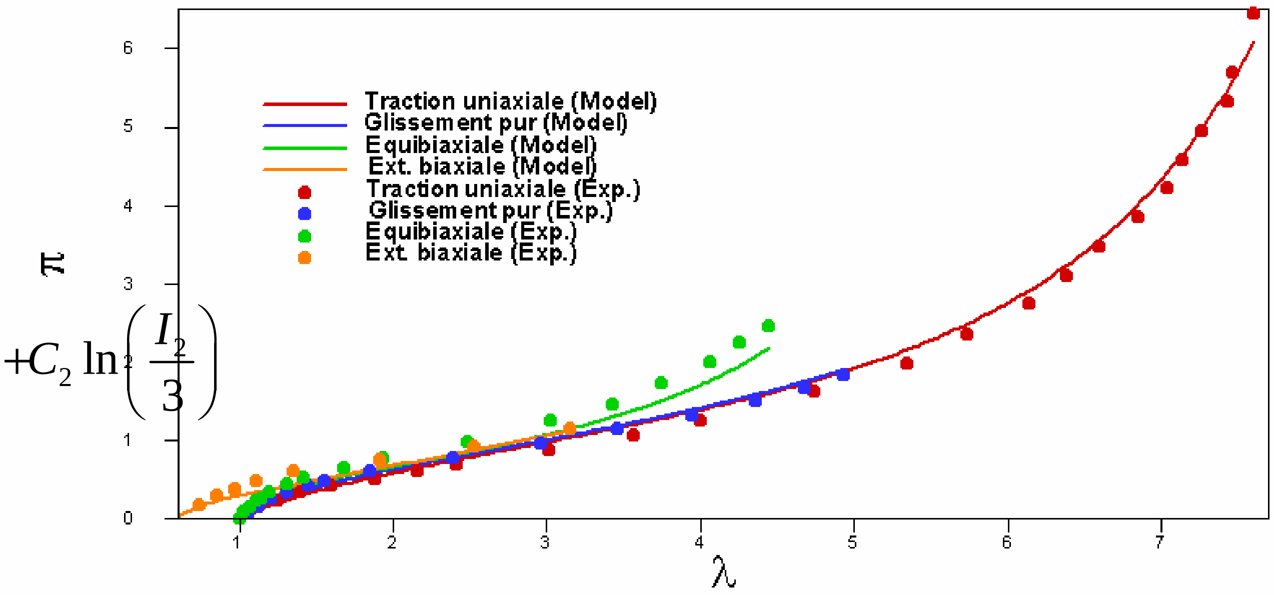
Hart Smith, 1966





3 constantes

$$W = C_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp(C_3 I_1'^2) dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$



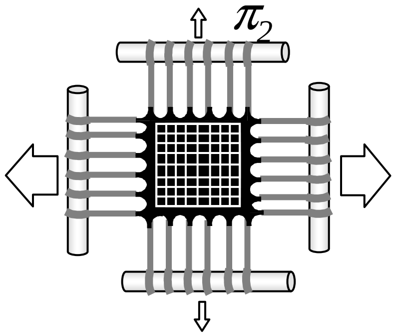
Ogden 1972
phénoménologiques

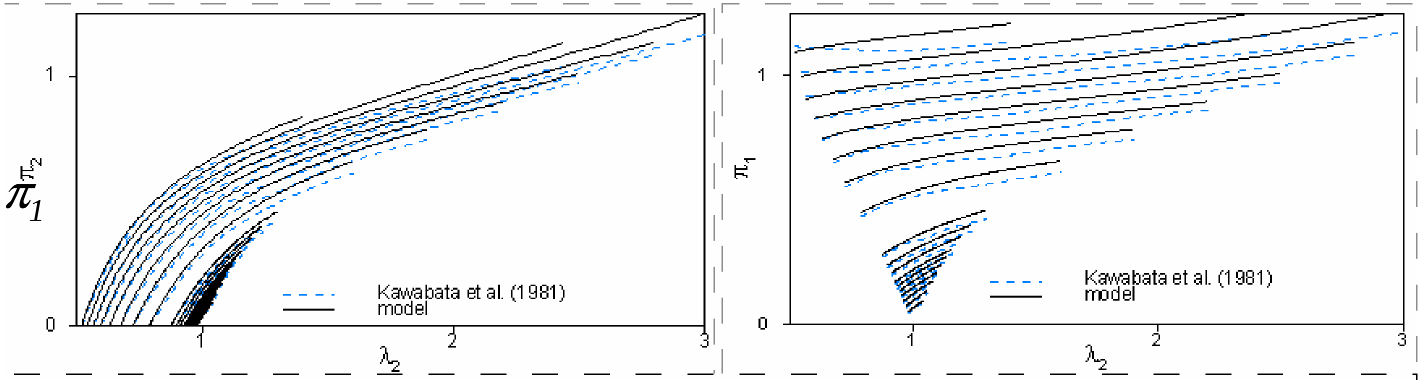
$$W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right)$$

6 constantes

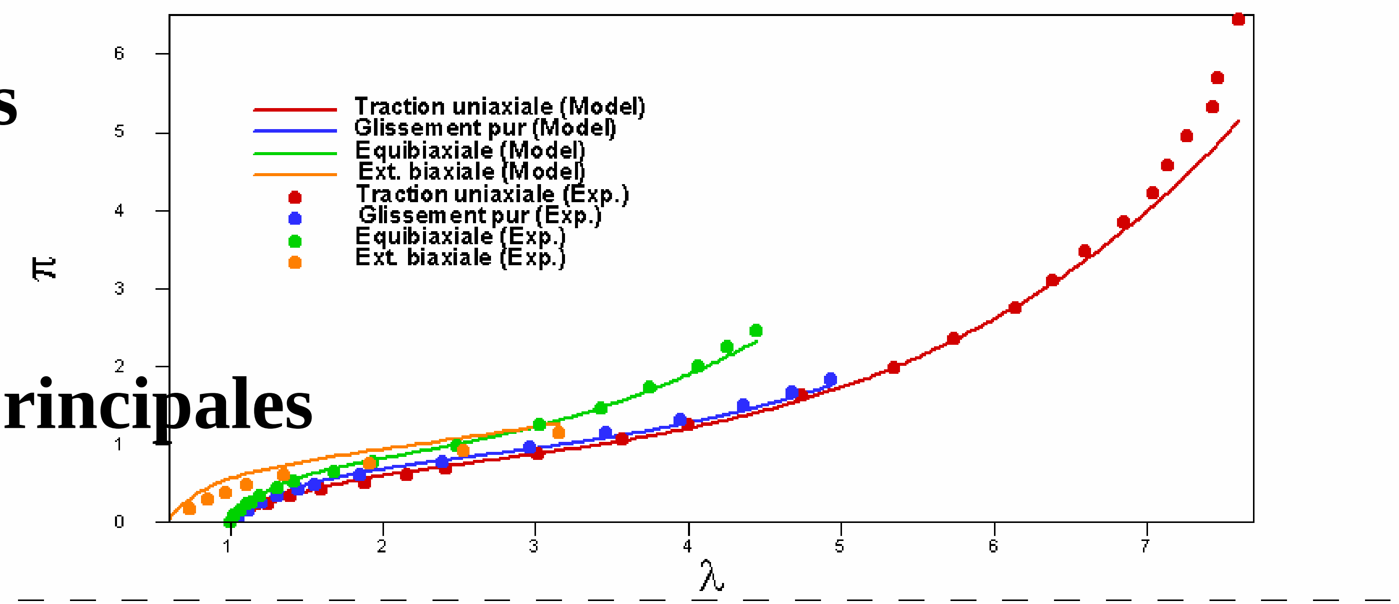
Modèle en directions principales !
Bonne description des essais de Treloar
Identification délicate

Ogden, 1972





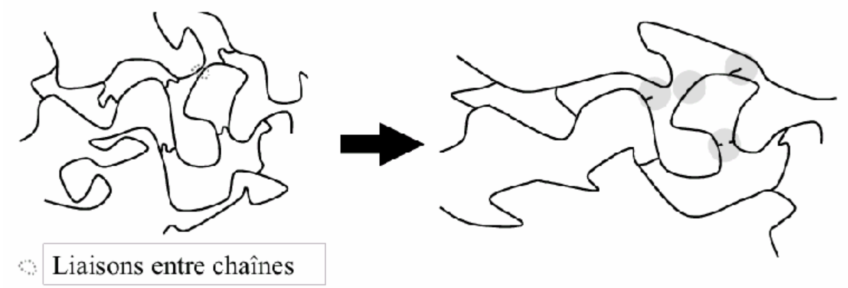
6 constantes



Directions principales

Echelle microscopique

- Chaines macromoléculaires



- Modèles phénoménologiques macromoléculaires

- Statistique Gaussienne
- Statistique non Gaussienne

Les Modèles statistiques justifient les formes des modèles phénoménologiques

Modèles statistiques caoutchouc *1940 - 2011*

Modèle Gaussien

Treloar *une chaine (1943)* = Néo-Hookéen 1 constante

Modèle Non Gaussien

Kuhn Grün, *une chaine (1942)* 1 constante

James et Guth, *Trois chaines (1947)* 2 constantes

Arruda et Boyce, *Huit chaines (1993)* 2 constantes

Réseau Fantôme

Modèles en Invariant généralisé

Heinrich et Kaliske, *Modèle tube (1997)* 3 constantes

Kaliske et Heinrich, *Tube étendu (1999)* 4 constantes

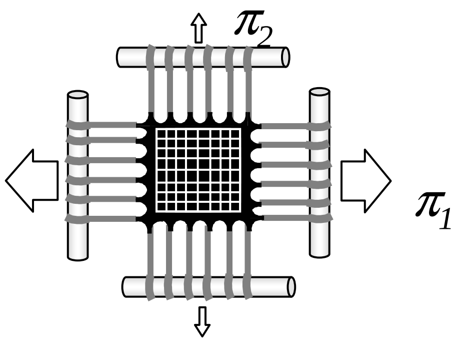
Modèles en Invariant

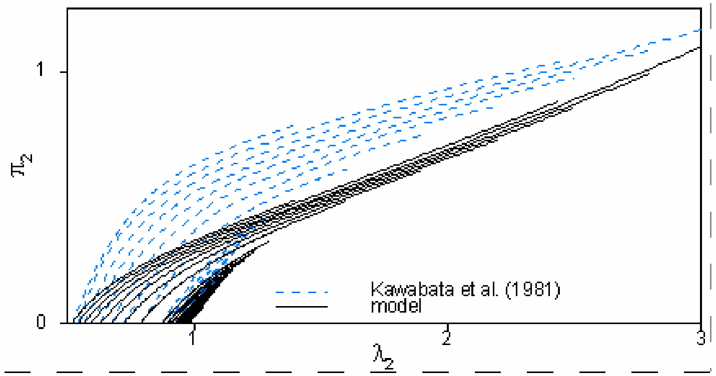
Gornet Desmorat, GD (2009) 2 constantes

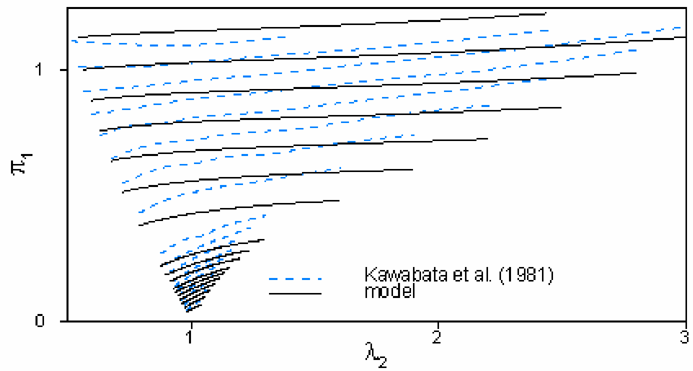
Gornet Desmorat Marcknann

GDM isotrope (2010), GDM (2011)

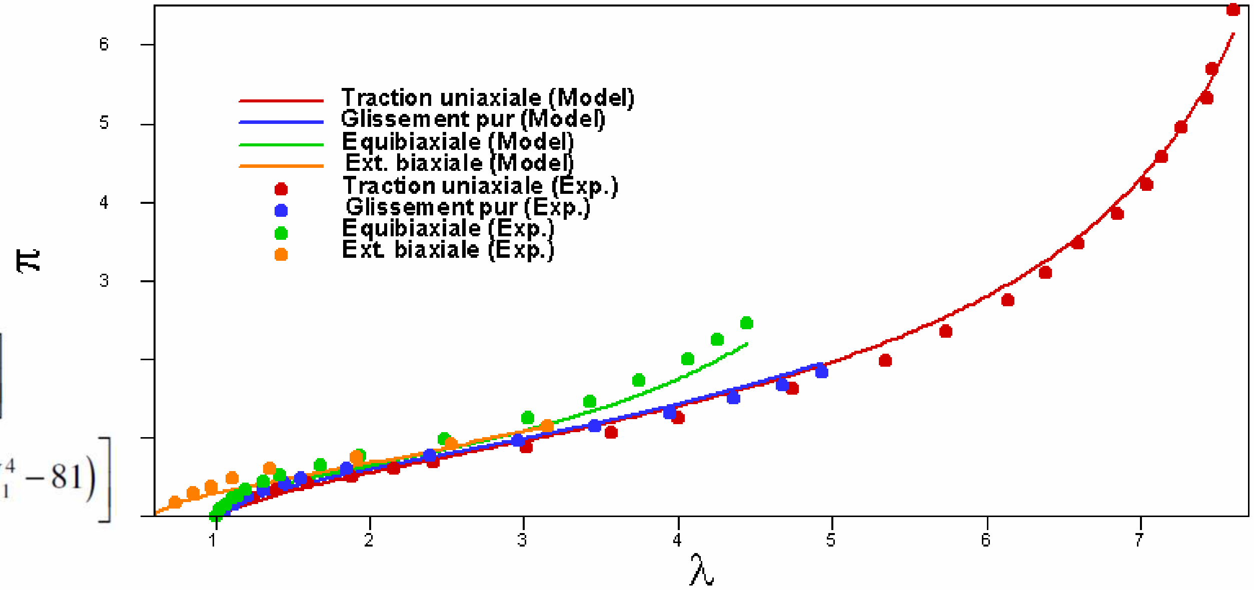
Arruda et Boyce, 1993
Huit Chaines





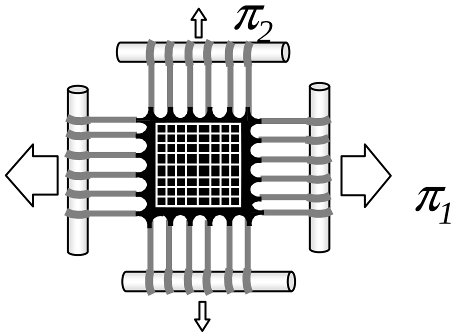


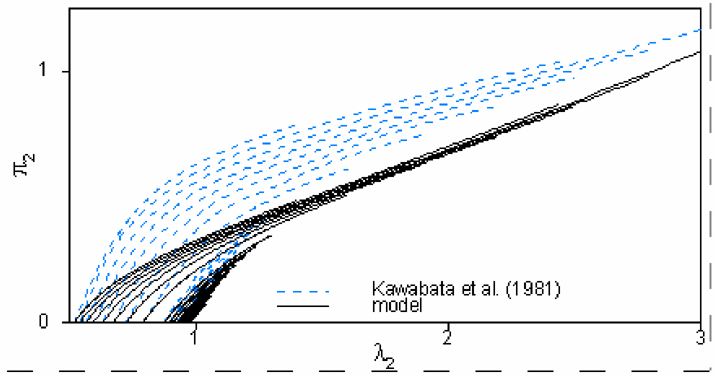
2 constantes

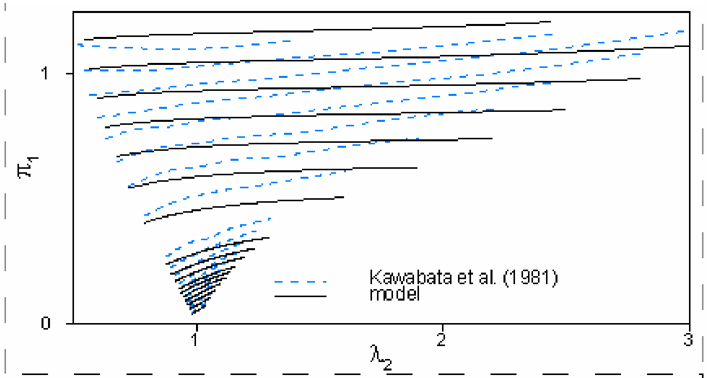


$$W_{8ch} = C_R\left[\frac{1}{2}(I_1-3)+\frac{1}{20N}\left(I_1^2-3\right)\right]$$
$$+C_R\left[\frac{1}{1050N^2}\left(I_1^3-27\right)+\frac{19}{7000N^3}\left(I_1^4-81\right)\right]$$
$$+C_R\left[\frac{519}{673750N^4}\left(I_1^5-243\right)+\ldots\right]$$

Hart Smith, 1966



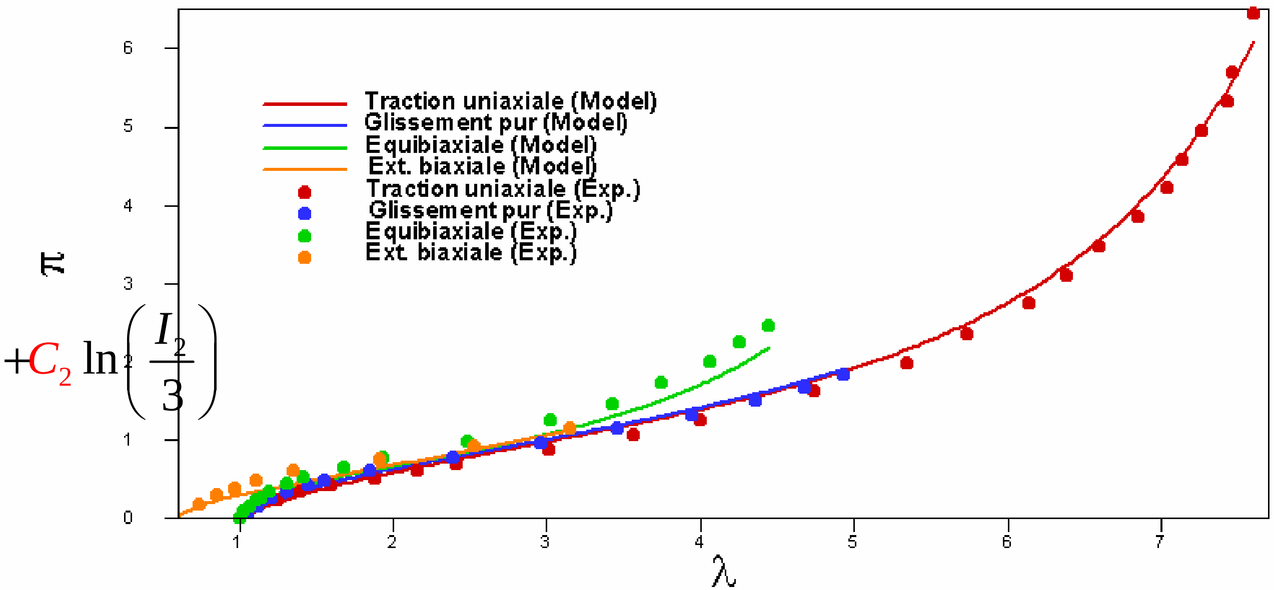




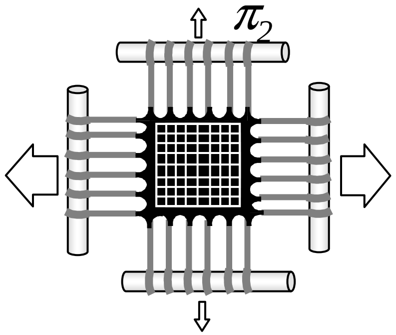
3 constantes

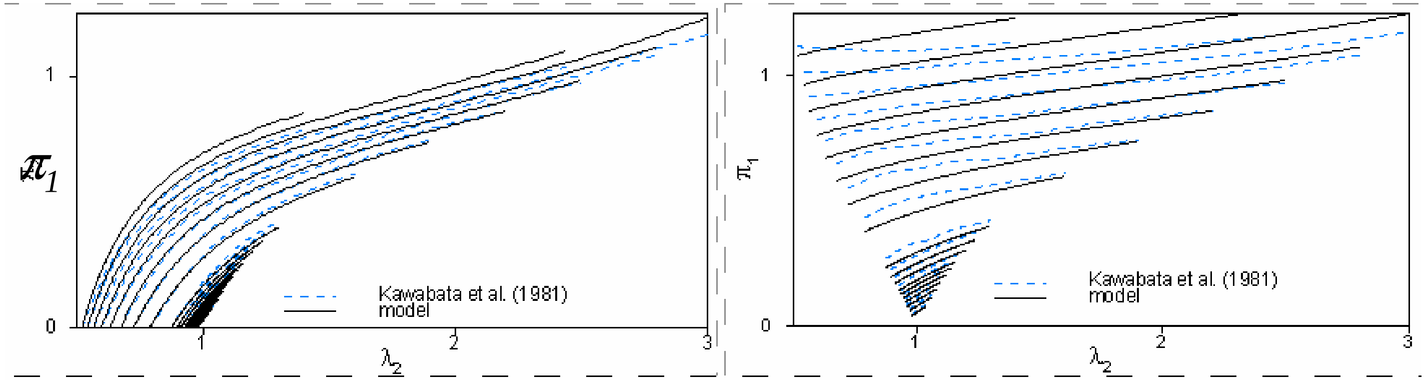
$$W = C_1 \int_0^{I_1-3} \exp(C_3 I_1'^2)\, dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$$

$$C_2 = 0$$

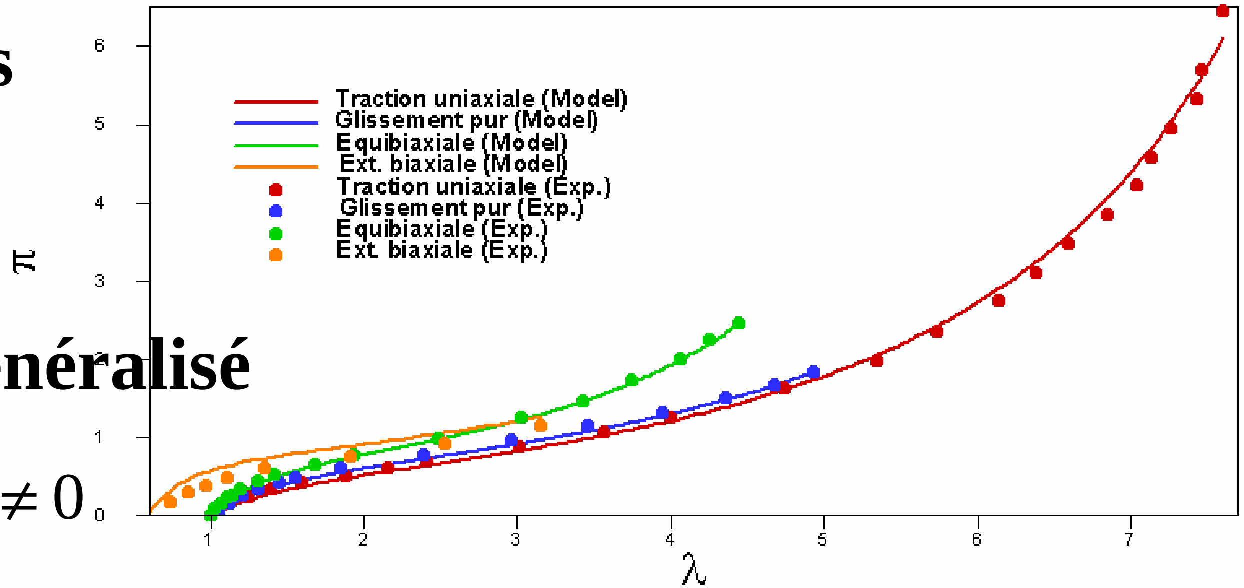


Extended Tube, 1999
Kaliske Henrich





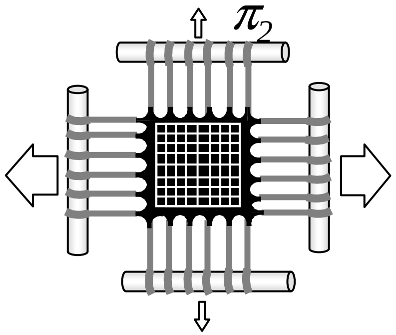
4 constantes

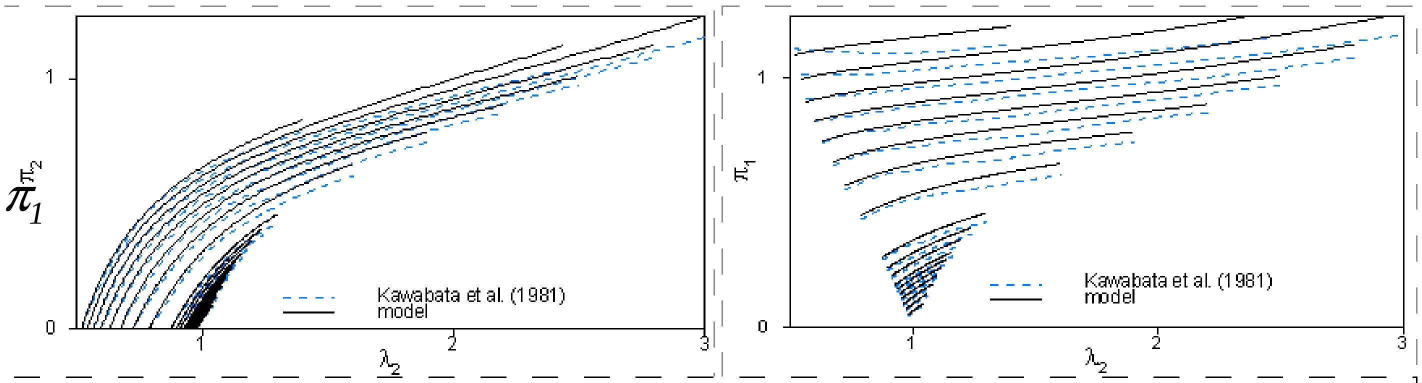


Invariant généralisé

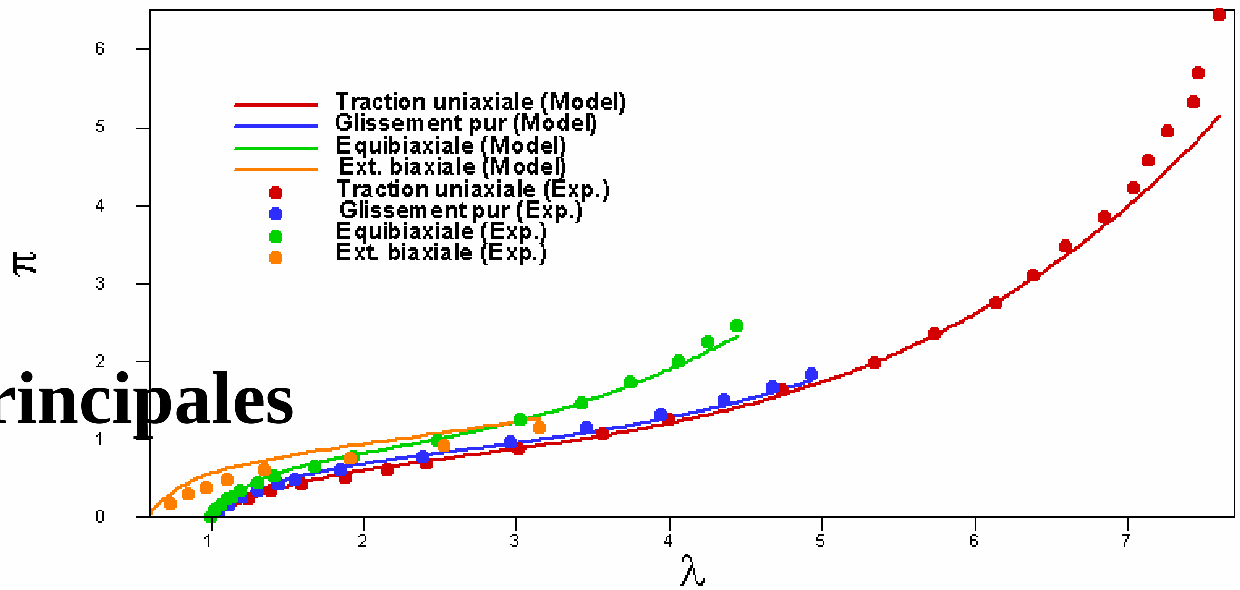
$$\left\{ \overline{\overline{e}}_{\beta} = \frac{\overline{\overline{B}}^{\frac{\beta}{2}} - \overline{\overline{I}}}{\beta} \text{ si } \beta \neq 0 \right.$$

Ogden, 1972





6 constantes



Directions principales

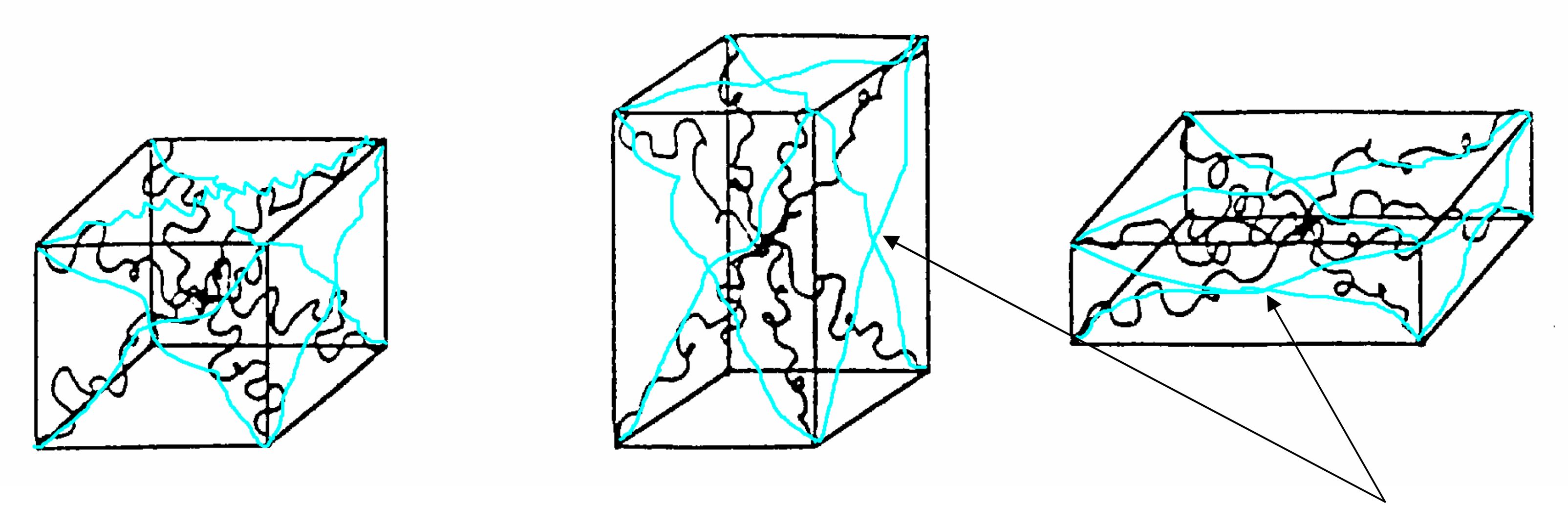
Energies hyperélastiques

- **Néo-Hook :** déformations <50%
- **Mooney Rivlin :** déformations ~100%
- **Biderman :** exemple de séries de Rivlin
- **Hart-Smith :** déformations >500%
- **Arruda Boyce :** déformations >500%
- **Ogden :** Bonne corrélation avec les essais
  - Modèle en Directions Principales !
- ***Modèles Grande Déformation, Mullins***
  - ***Objectif : Bonne corrélation avec les essais***
    Modèle en Invariants

Gornet – Desmorat 2009

Modèle Grande Déformation

•**Huit chaines** modèle statistique non Gaussien $W_1\left(I_1\right)$



•**Réseau Fantôme et** énergie interne du modèle

$W_2\left(I_2\right)$

James, Guth 1949, Boggs 1952, Eichinger 1981

Energie libre : $F = e\left(v,T\right)+W\left(I_1\right)$

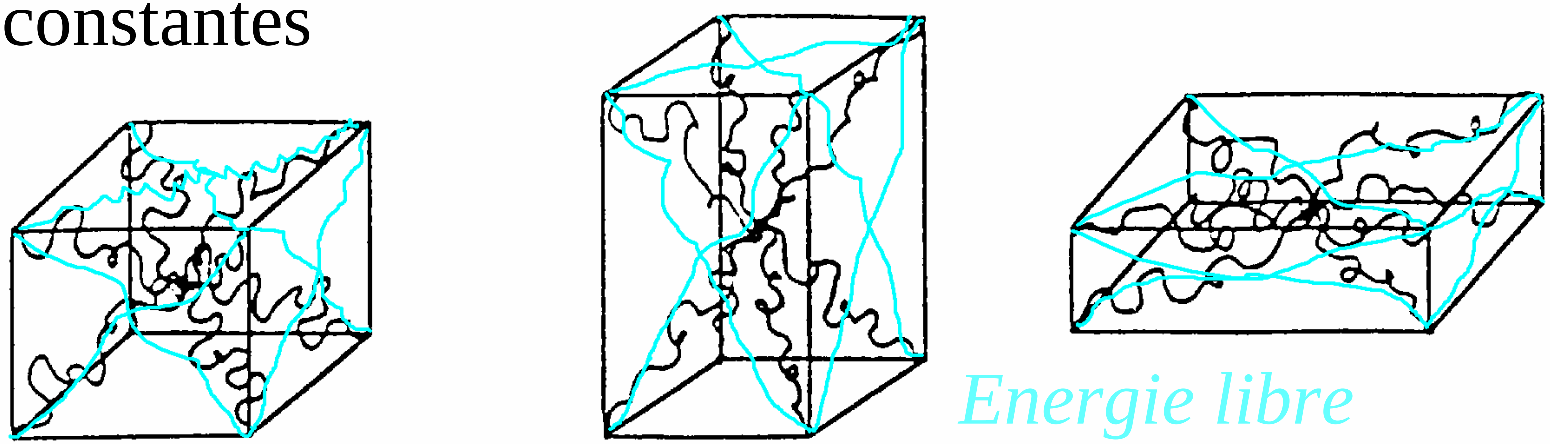
Gornet – Desmorat 2009

Modèle Grande Déformation

Statistique - phénoménologique

$$W = h_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp\left(h_3 I_1'^2\right) dI_1' + 3 h_2 \int_0^{I_2} \frac{dI_2'}{\sqrt{I_2'}}$$

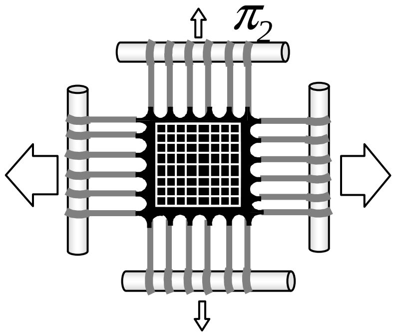
3 constantes

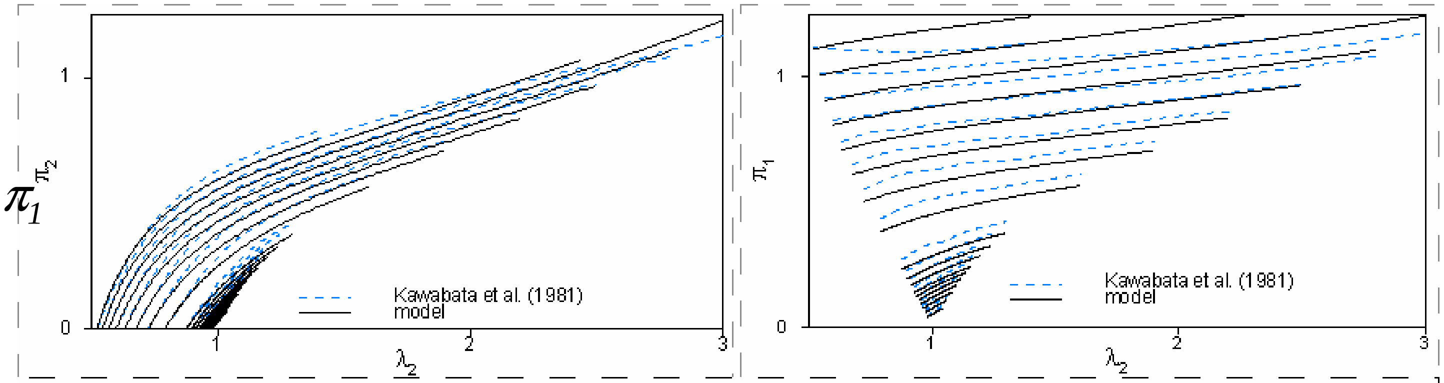


Energie libre

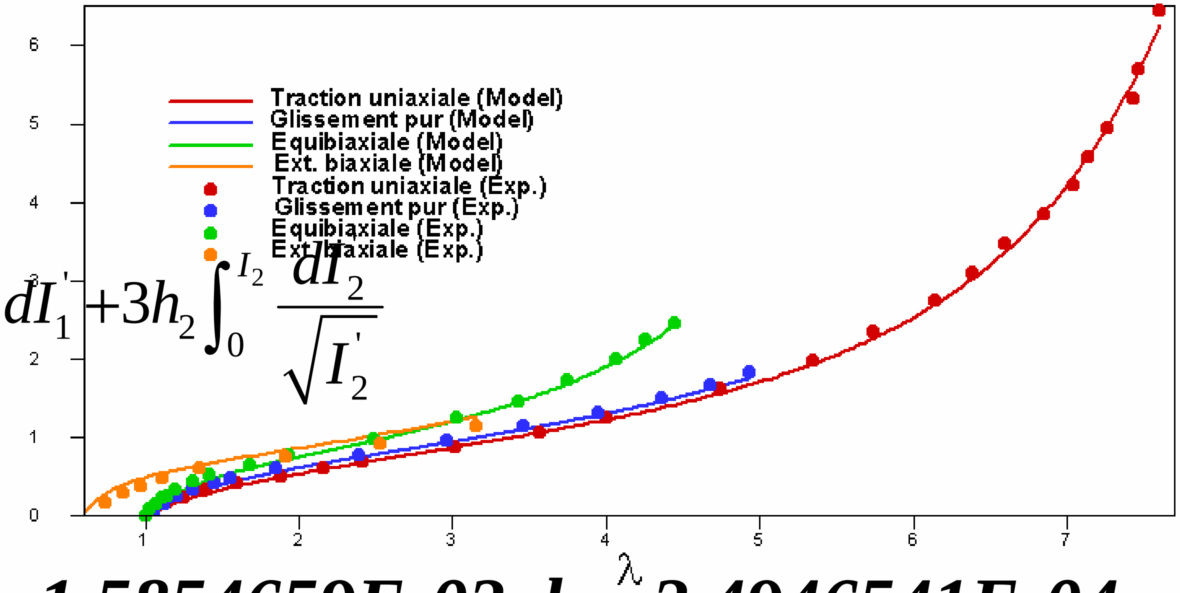
- Huit chaines confinées par un Réseau

Gornet Desmorat, 2009





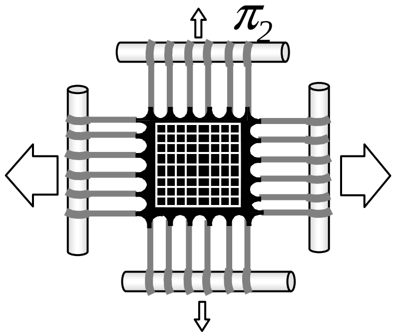
3 constantes

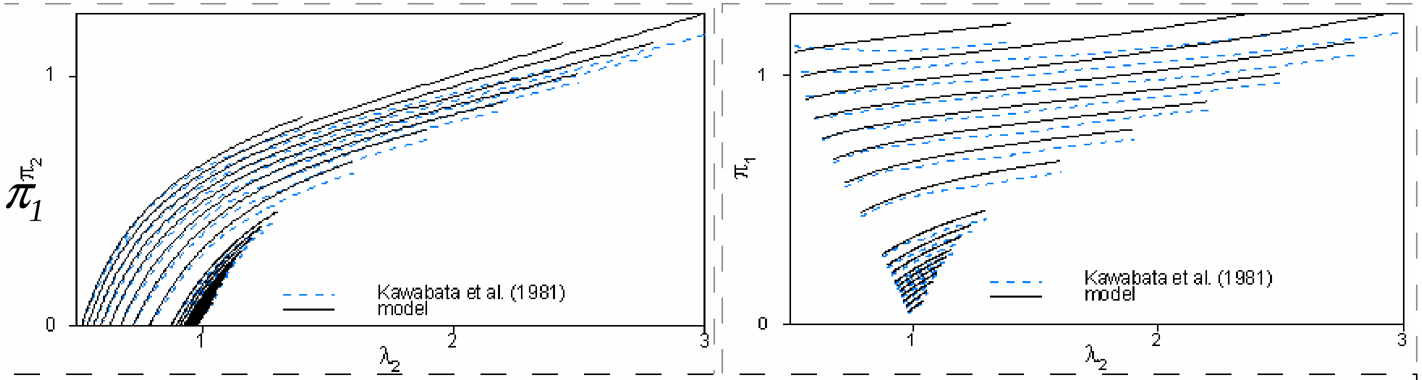


$$W = h_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp(h_3 I_1'^2)\, dI_1' + 3h_2 \int_0^{I_2} \frac{dI_2'}{\sqrt{I_2'}}$$

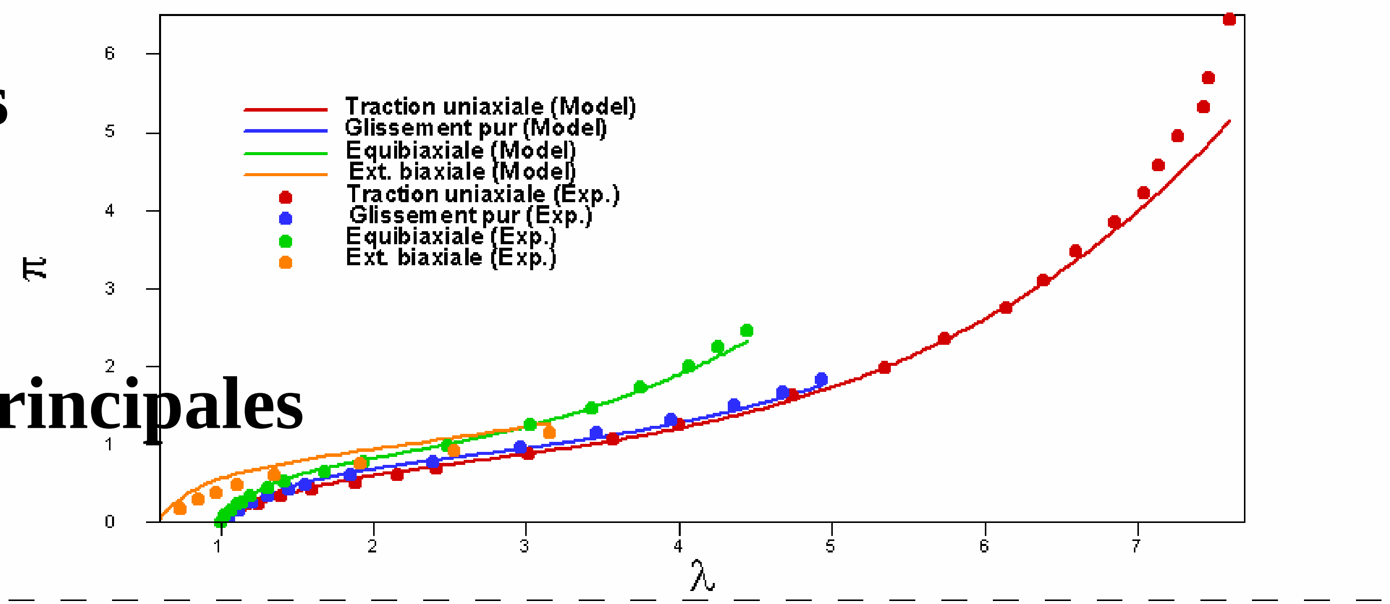
h_1=0.142236 h_2 =1.5854659E-02 h_3=3.4946541E-04

Ogden, 1972





6 constantes



Directions principales

Modèle avec effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

Thèse G. Chagnon 2003, Chagnon et al. JMPS 2004

Densité d'énergie hyperélastique : W_0

avec accommodation : $(1\text{-}D)W_0$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1-D)2\mathbf{B}\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{B}}$$

Critère prenant en compte toutes les directions de l'espace

Mesures $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ $\alpha = \sqrt{I_1/3} - 1$ $I_1 = tr(\mathbf{B})$

Forme de l'endommagement $D = D(\overline{\alpha}) = D(I_1^{\max})$

Modèle GDM effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

Gornet et al. ECCMR 2011

Densité d'énergie hyperélastique : W_0

avec accommodation : $$W_{GDM}\left(I_1, I_2\right) = \tilde{h}_1 \int e^{\tilde{h}_3 (I_1-3)^2} dI_1 + 3\tilde{h}_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2$$

$$\tilde{h}_1 = h_1\left(1-d_1\right),\ \tilde{h}_2 = h_2\left(1-d_2\right),\ \tilde{h}_3 = h_3\left(1-d_3\right)$$

Les lois d'évolution de l'endommagement :

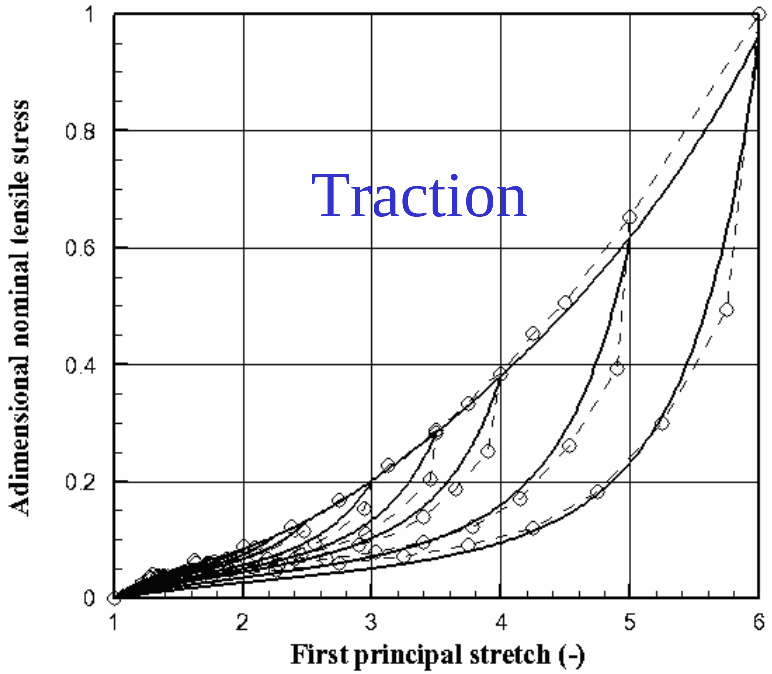
$$d_1 = d_{1\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{I_1^{\max}}{\eta_1}\right)\right) \qquad d_2 = d_{2\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{I_1^{\max}}{\eta_2}\right)\right)$$

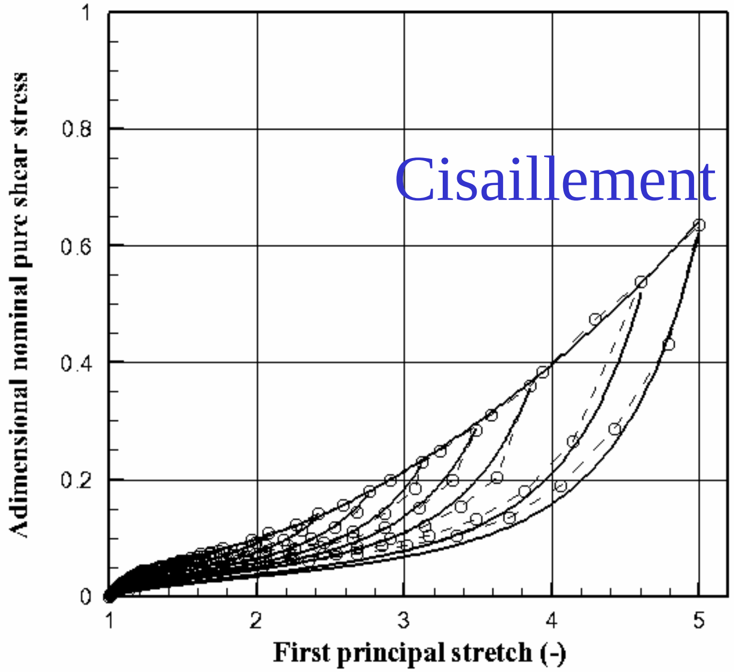
$$d_3 = 1 - F\left(d_1\right) \qquad F\left(d_1\right) = \frac{1}{\left(3\left(b\,\tilde{h}_1 - 1\right)\right)^2}$$

Modèle GDM effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

Gornet et al. ECCMR 2011





École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

Modèle GDM Mullins

Mécanique de l'endommagement isotrope

Gornet et al. ECCMR 2011

Densité d'énergie hyperélastique : W_0

avec accommodation : $$W_{GDM}\left(I_1, I_2\right) = \tilde{h}_1 \int e^{h_3 (I_1 - 3)^2} dI_1 + 3\tilde{h}_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2$$

$$\tilde{h}_1 = h_1\left(1 - d_1\right),\ \tilde{h}_2 = h_2\left(1 - d_2\right),\ h_3$$

Les lois d'évolution de l'endommagement isotrope :

$$d_1 = d_2 = d_\infty\left(1 - \exp\left(-\frac{I_1^{\max}}{\eta}\right)\right)$$

Plan

- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - Essais et identification de Mooney à GD, GDM
- Développement UMAT
  - Mode, Mate, GD, GDM
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, analytique et Abaqus
- Conclusion

Operateur MODE
Modèle GD 2010

LCMAT = MOTS 'YOUN' 'NU' 'H1' 'H2' 'H3' 'D';

MODL1 = MODE GEO1 'MECANIQUE' 'ELASTIQUE' 'ISOTROPE' 'NON_LINEAIRE' 'UTILISATEUR' 'NUME_LOI' 33 'C_MATERIAU' LCMAT ;

$$W = h_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp(h_3 \bar{I}_1'^2) d\bar{I}_1' + 3 h_2 \int_0^{I_2} \frac{d\bar{I}_2'}{\sqrt{\bar{I}_2'}} + \frac{1}{D} (J-1)^2$$

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \qquad \bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \qquad J = \det\left(\bar{\bar{F}}\right)$$

Operateur MATE

Modèle GD 2010

MAT1 = MATE MODL1 'YOUN' YU 'NU ' XNU
'H1' H1 'H2' H2 'H3' H3 'D ' CoeD ;

En formulation incompressible:

« Contraintes Planes » ‘D ’ n’est pas utilisé !

$$W = h_1 \int_0^{I_1 - 3} \exp(h_3 \bar{I}_1'^2) d\bar{I}_1' + 3 h_2 \int_0^{I_2} \frac{d\bar{I}_2'}{\sqrt{\bar{I}_2'}}$$

Procédure PASAPAS

```
TAB1 = TABLE;
TAB1.'VARIABLES_INTERNES' = TABLE ;
TAB1 . GRANDES_DEFORMATIONS = VRAI ;
TAB1 . MODELE = MO;
TAB1 . CARACTERISTIQUES = MA ;
TAB1 . CHARGEMENT = CH1  ;
TAB1 . TEMPS_CALCULES = PR1;
TAB1 . 'TEMPS_SAUVES‘ = PR2;
PASAPAS TAB1 ;
```

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Les modèles Cast3M

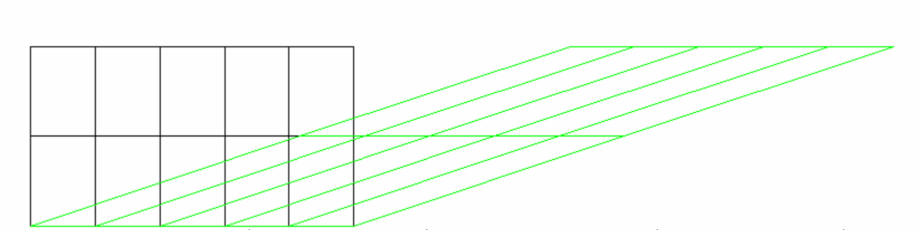
- **Formulation Incompressible :**
  - Contraintes Planes
- **Formulation Quasi-incompressible :**
  - Déformations Planes, ~~Axisymétrique~~
  - Tridimensionnel
- **Modèles disponibles :** *Format ABAQUS*
  - Mooney-Rivlin (Néo-Hook), Biderman,Gent-Thomas
  - Hart-Smith, Arruda Boyce, GD, GDM isotrope
- **Exemples en incompressible :**
  - Traction, Bitraction, Cisaillement simple
- **Exemples en quasi-incompressible :**
  - Traction 3D et traction Déformations Planes

Plan

- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - Mooney Rivlin…
- Développement UMAT
  - De la théorie à la programmation
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, analytique et Abaqus
- Conclusion

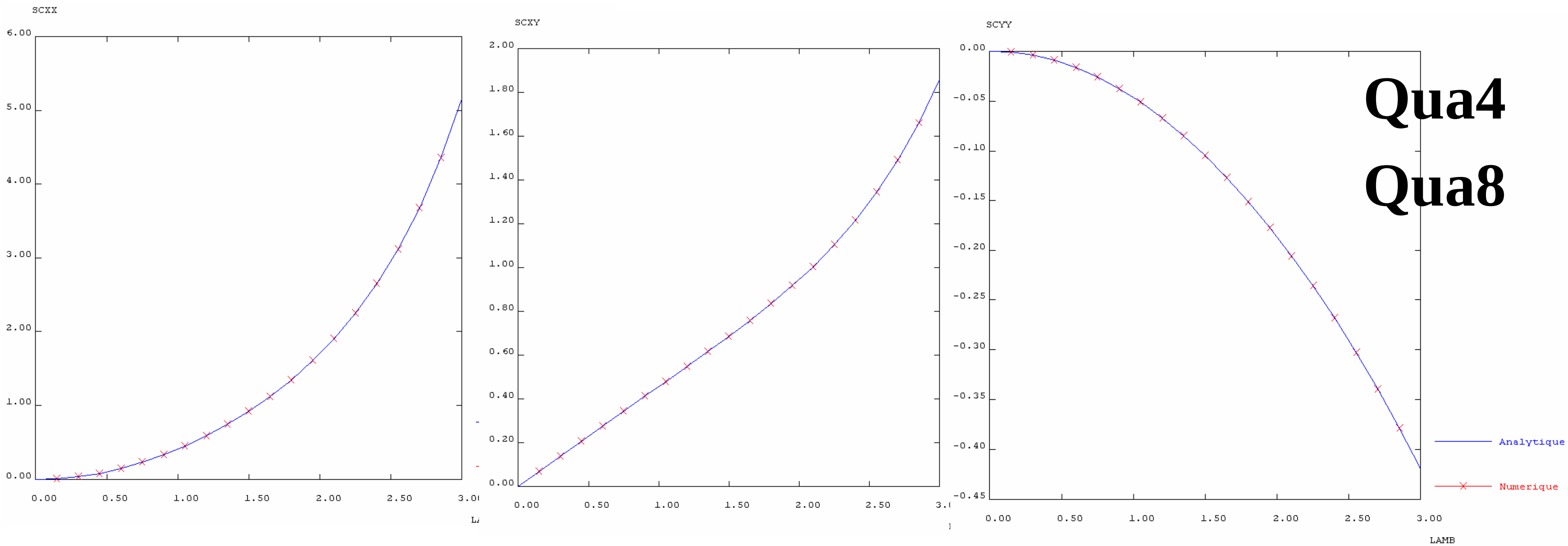
Glissement simple

Solution analytique incompressible Biderman



Cauchy

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3.$$

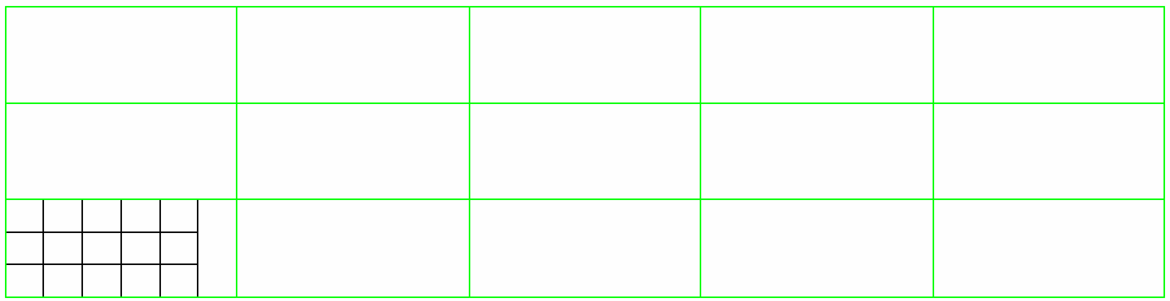


Qua4

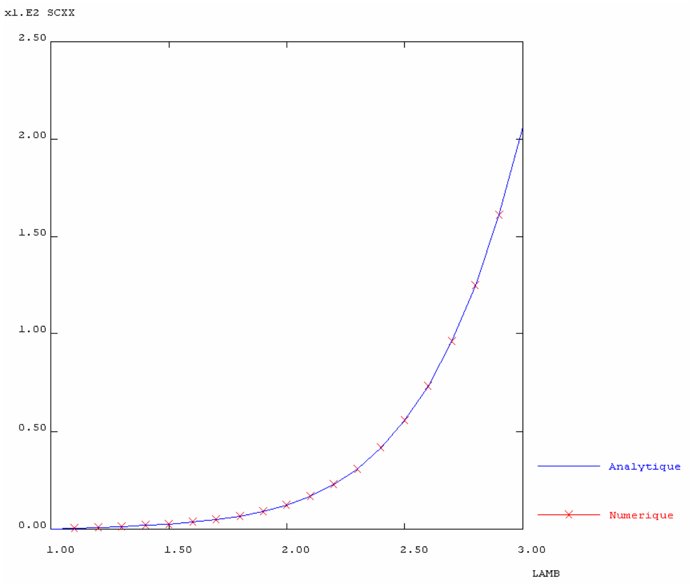
Qua8

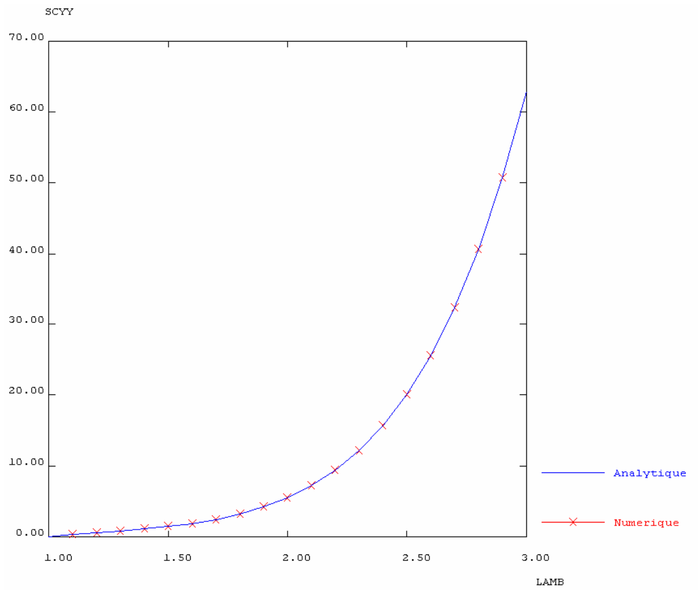
Traction biaxiale

Solution analytique incompressible Biderman



Cauchy



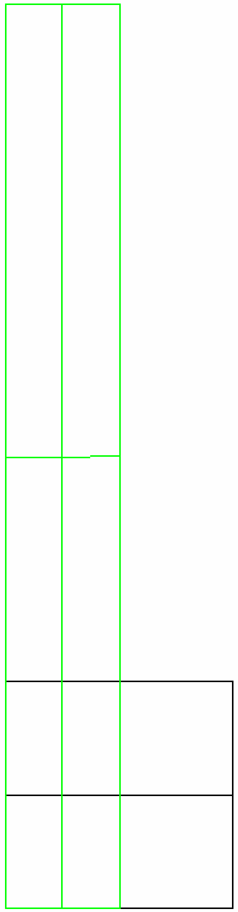


Qua4

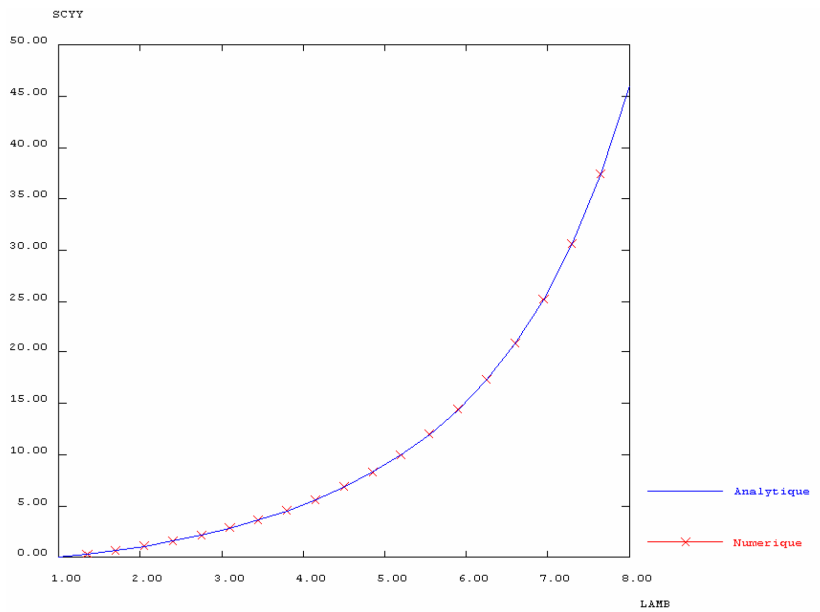
Qua8

Traction

Solution analytique incompressible Huit Chaines



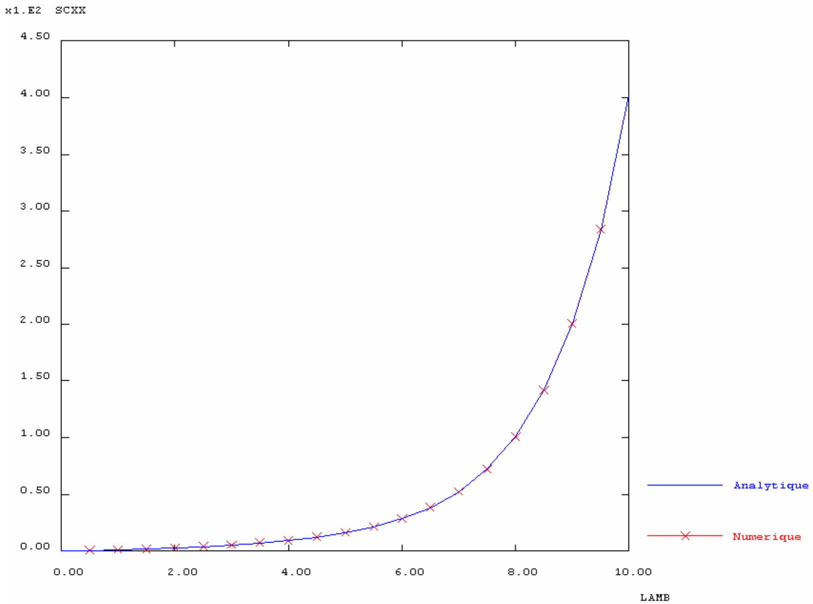
Cauchy

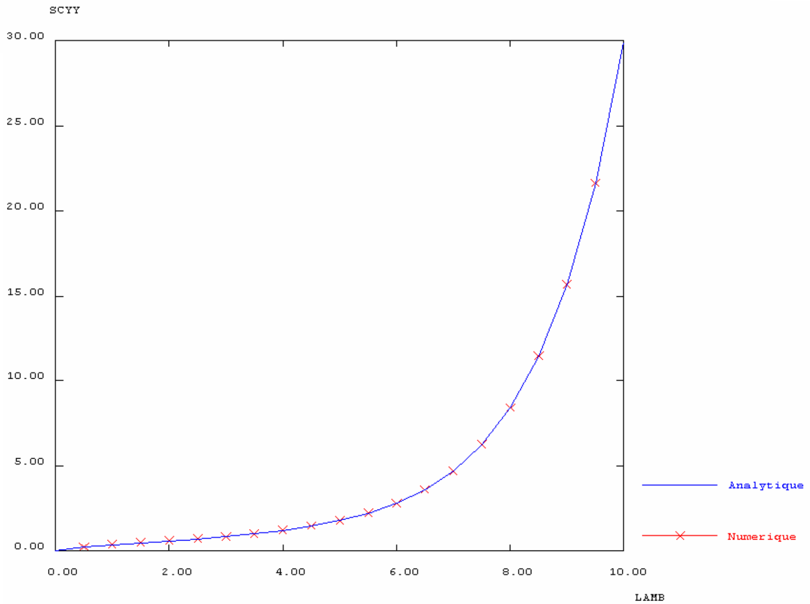


Traction biaxiale

Solution analytique incompressible Huit Chaines

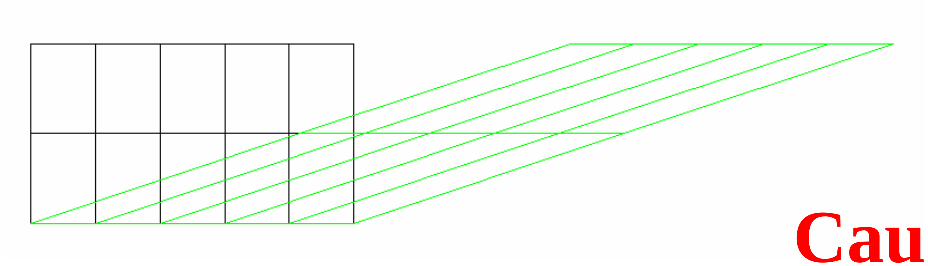
Cauchy

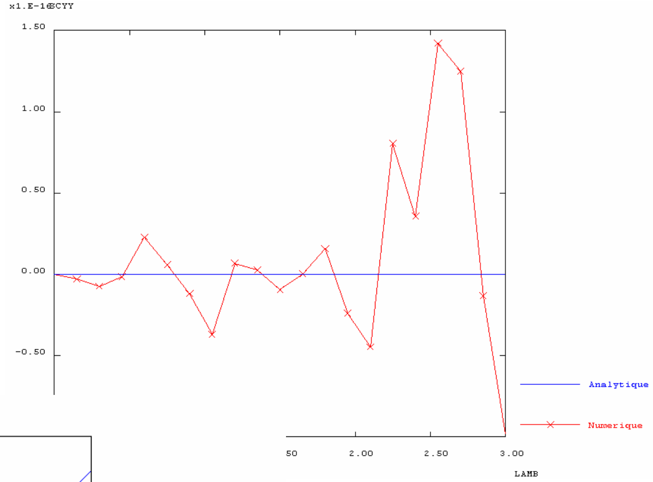




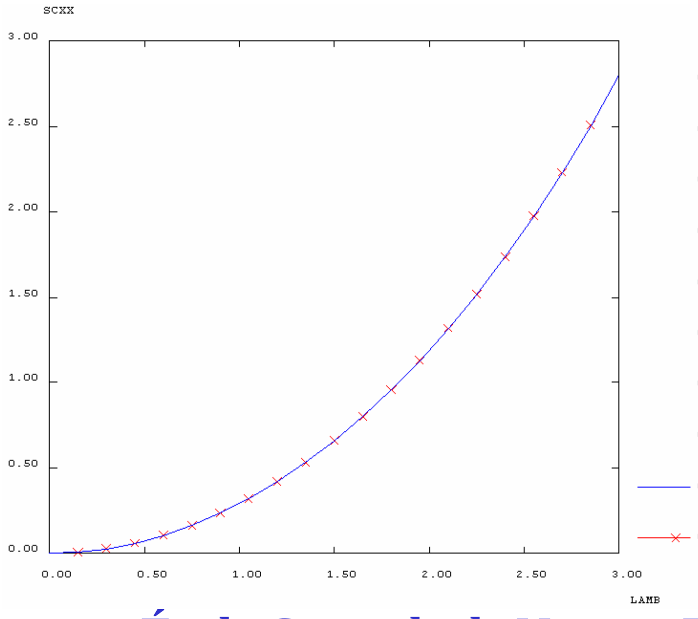
Glissement simple

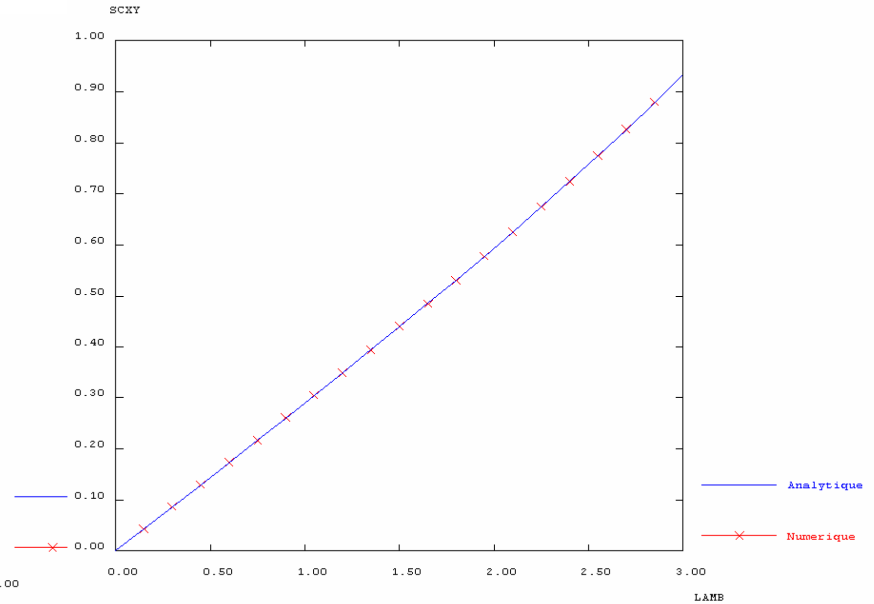
Solution analytique *incompressible Huit Chaines*





Cauchy





Plan

- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - De Mooney Rivlin à GD, GDM isotrope, GDM
- Développement UMAT
  - De la théorie à la programmation
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, analytique et Abaqus
- Conclusion

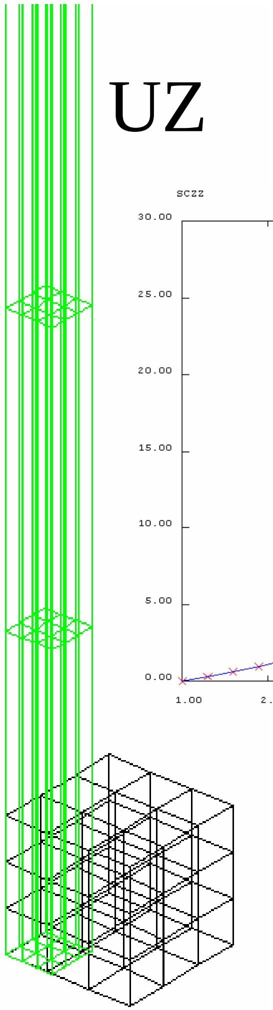
Plan

- Contexte
- La Performance des modèles hyperélastiques
  - De la théorie à la programmation
- Développement UMAT
  - De la théorie à la programmation
- Exemples de validation
  - 2D, 3D, Effet Mullins
- Conclusion

Essai de Traction

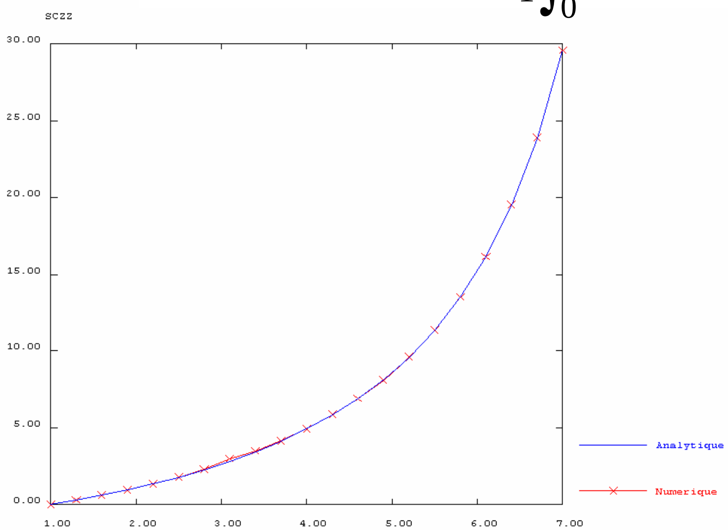
Quasi incompressible Gornet Desmorat 3D

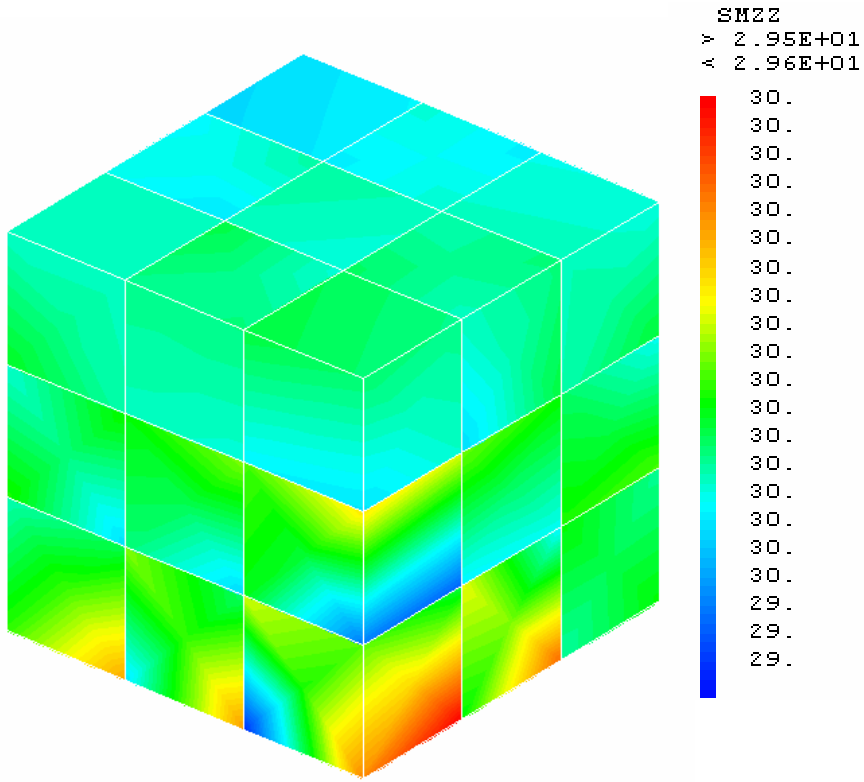
UZ



$$W = h_1 \int_0^{I_1-3} \exp(h_3 I_1'^2)\, dI_1' + 3h_2 \int_0^{I_2} \frac{dI_2'}{\sqrt{I_2'}}$$

Cauchy



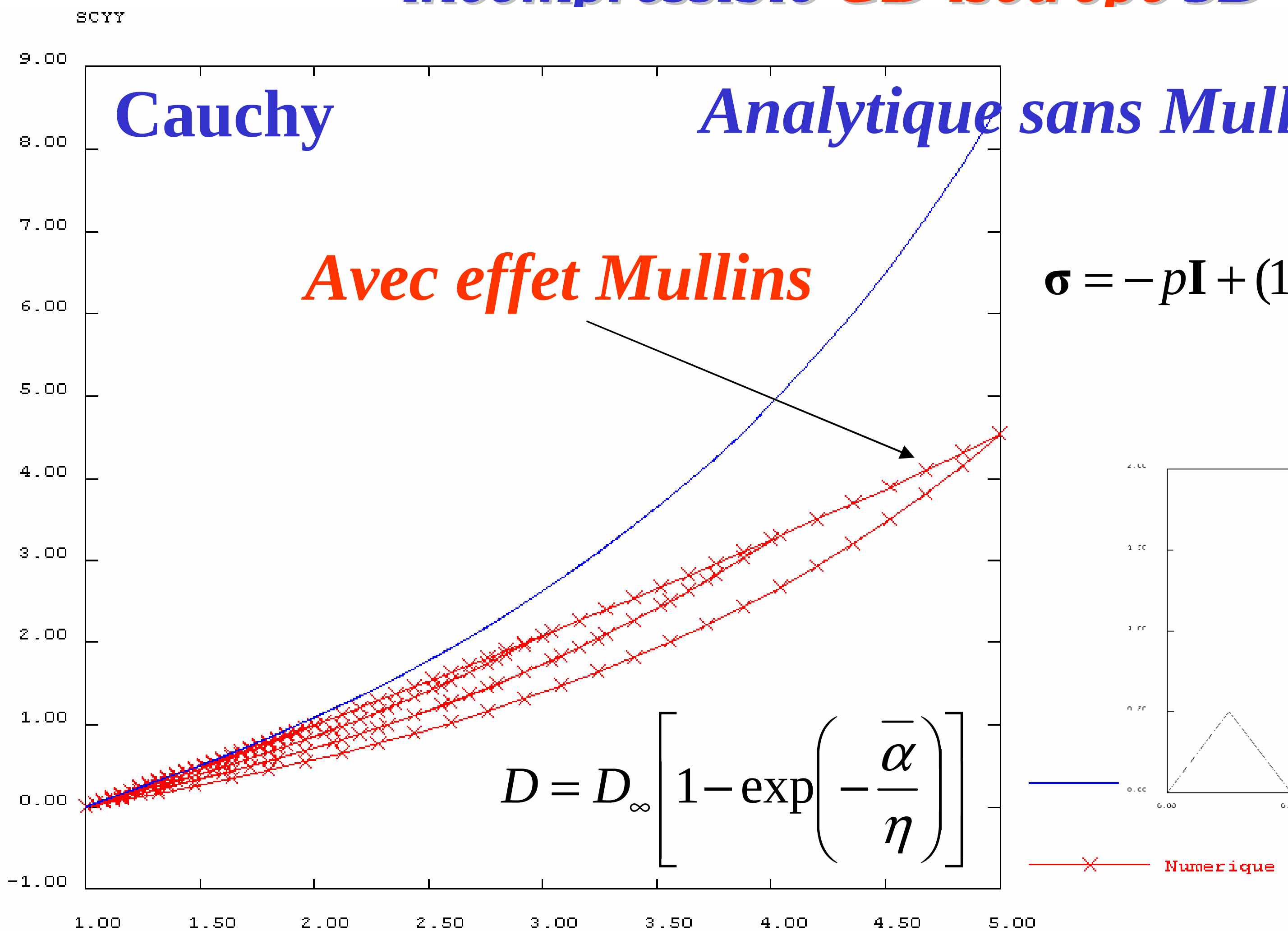


CUB8

École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

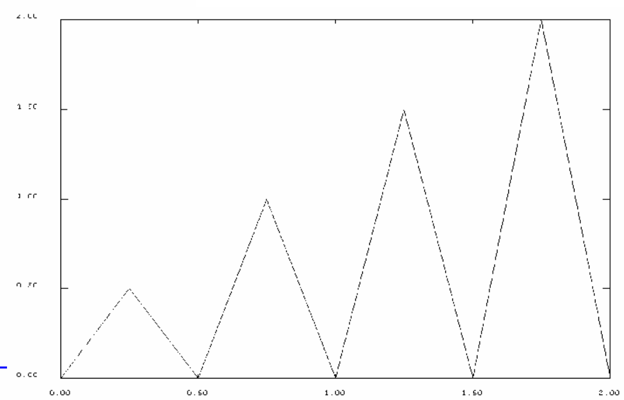
Essai de Traction

incompressible GD isotrope 3D



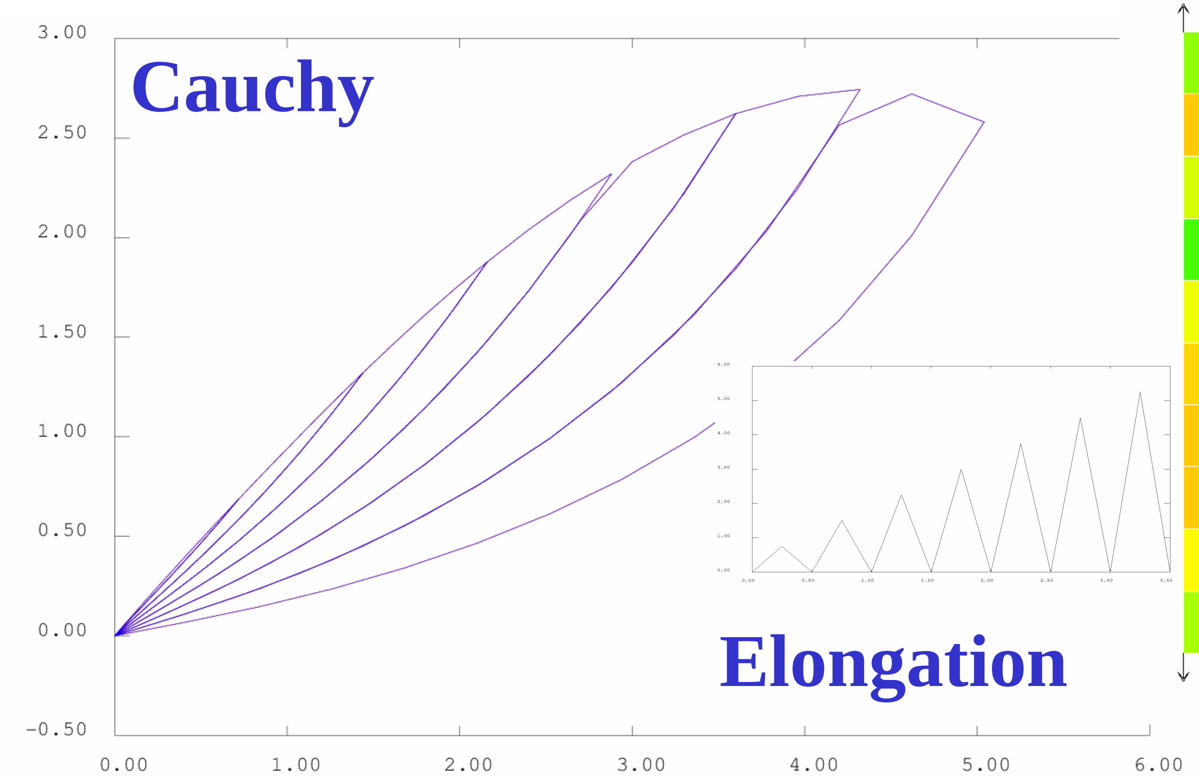
Analytique sans Mullins

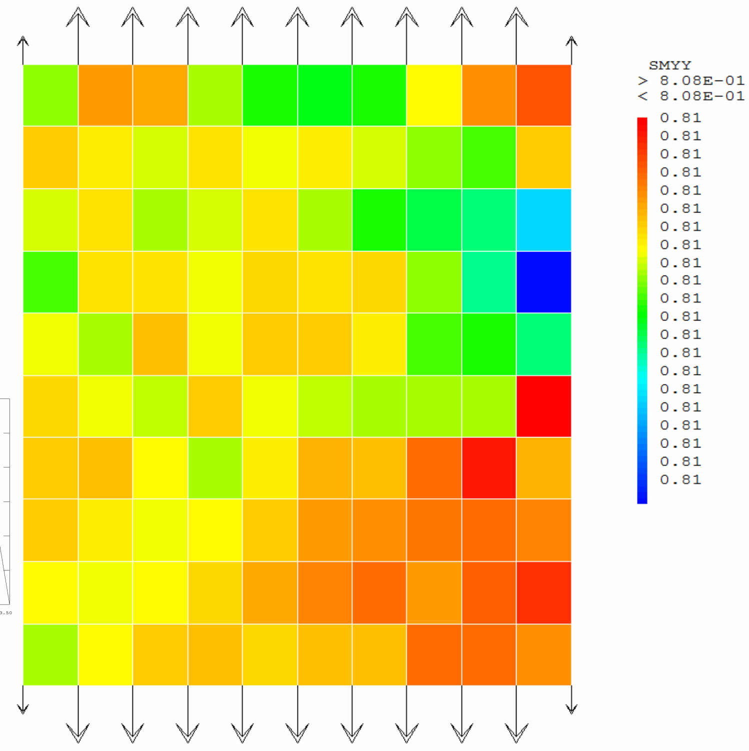
$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1-D)2\mathbf{B}\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{B}}$$



Essai de Traction

Quasi incompressible G D Mullins





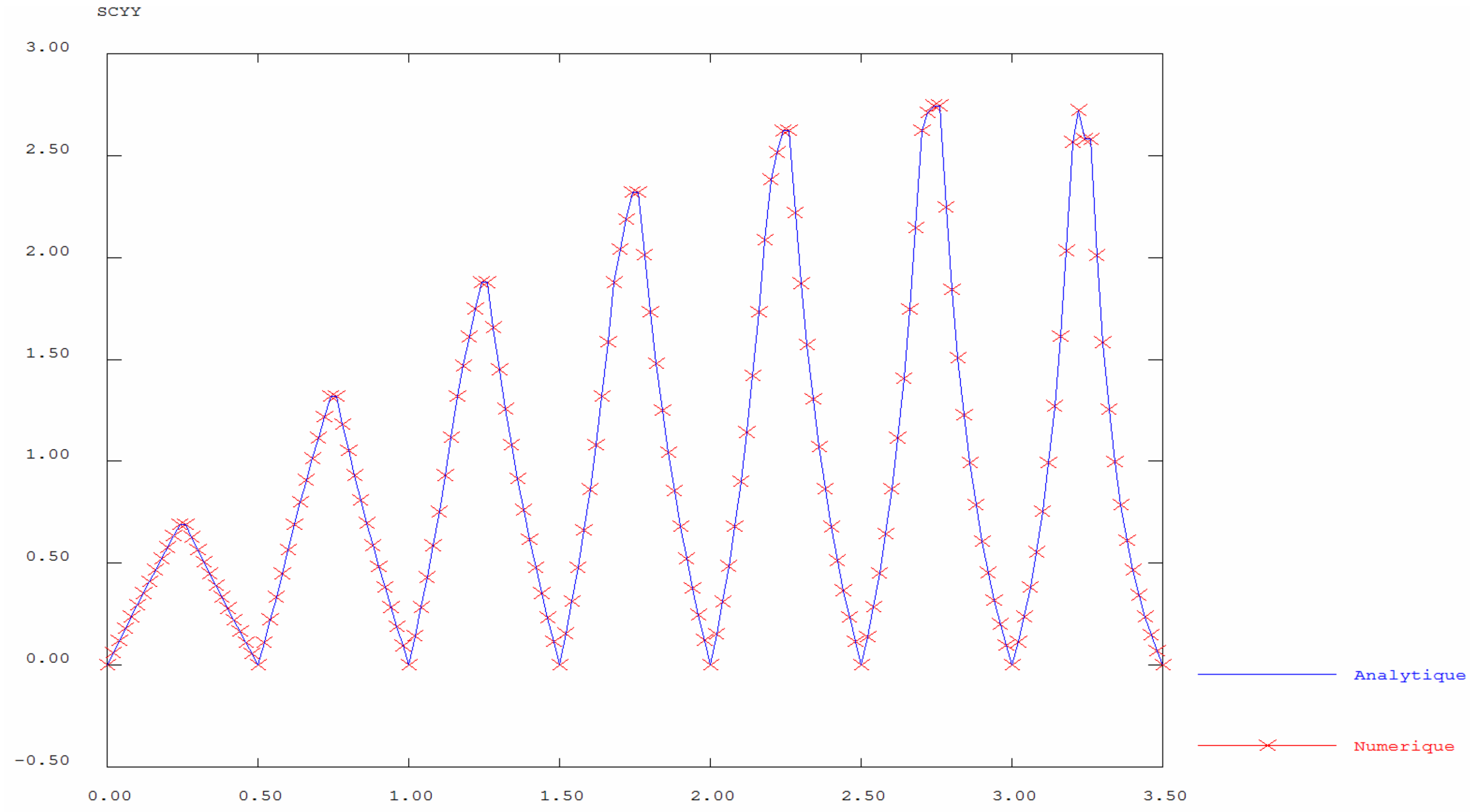
QUA4

Analytique et EF avec Mullins

École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

Essai de Traction

Quasi incompressible G D isotrope Mullins



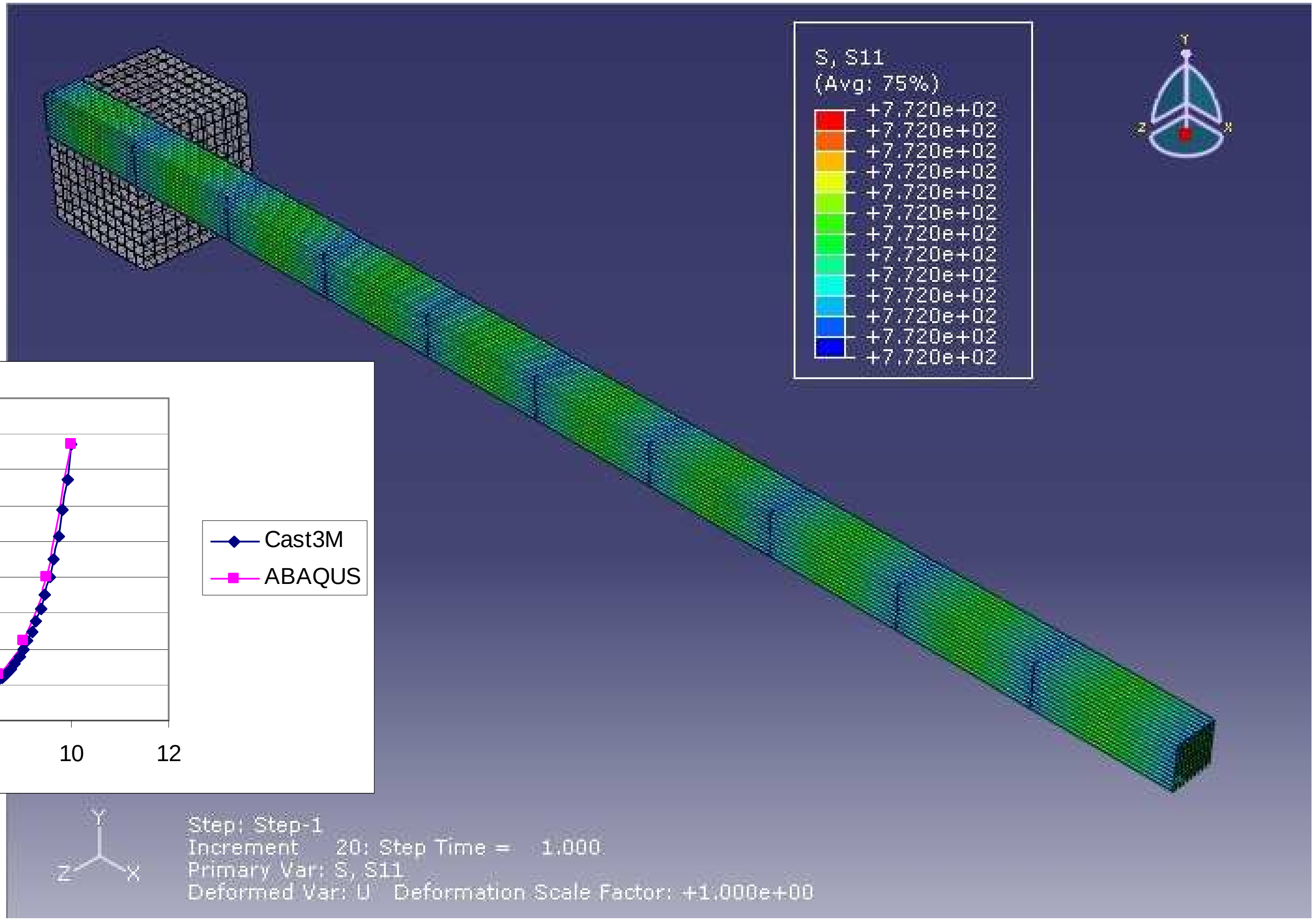
École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

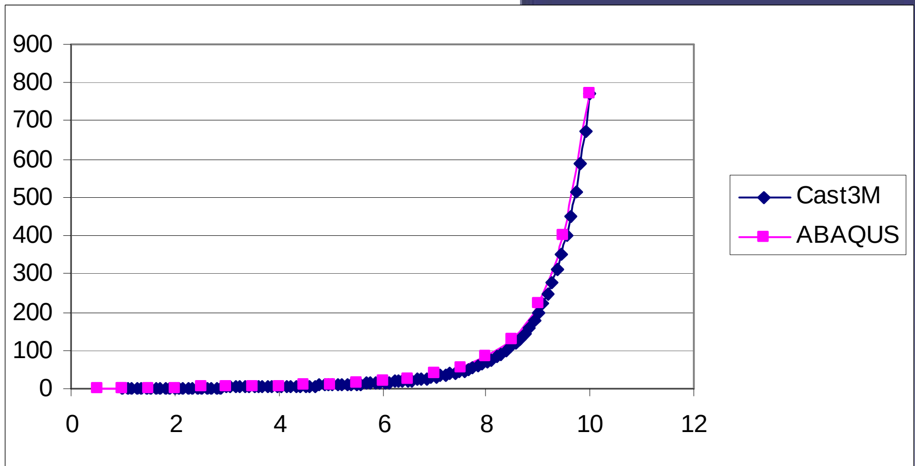
Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Éléments Finis

Modèle Gornet Desmorat 2009

ABAQUS

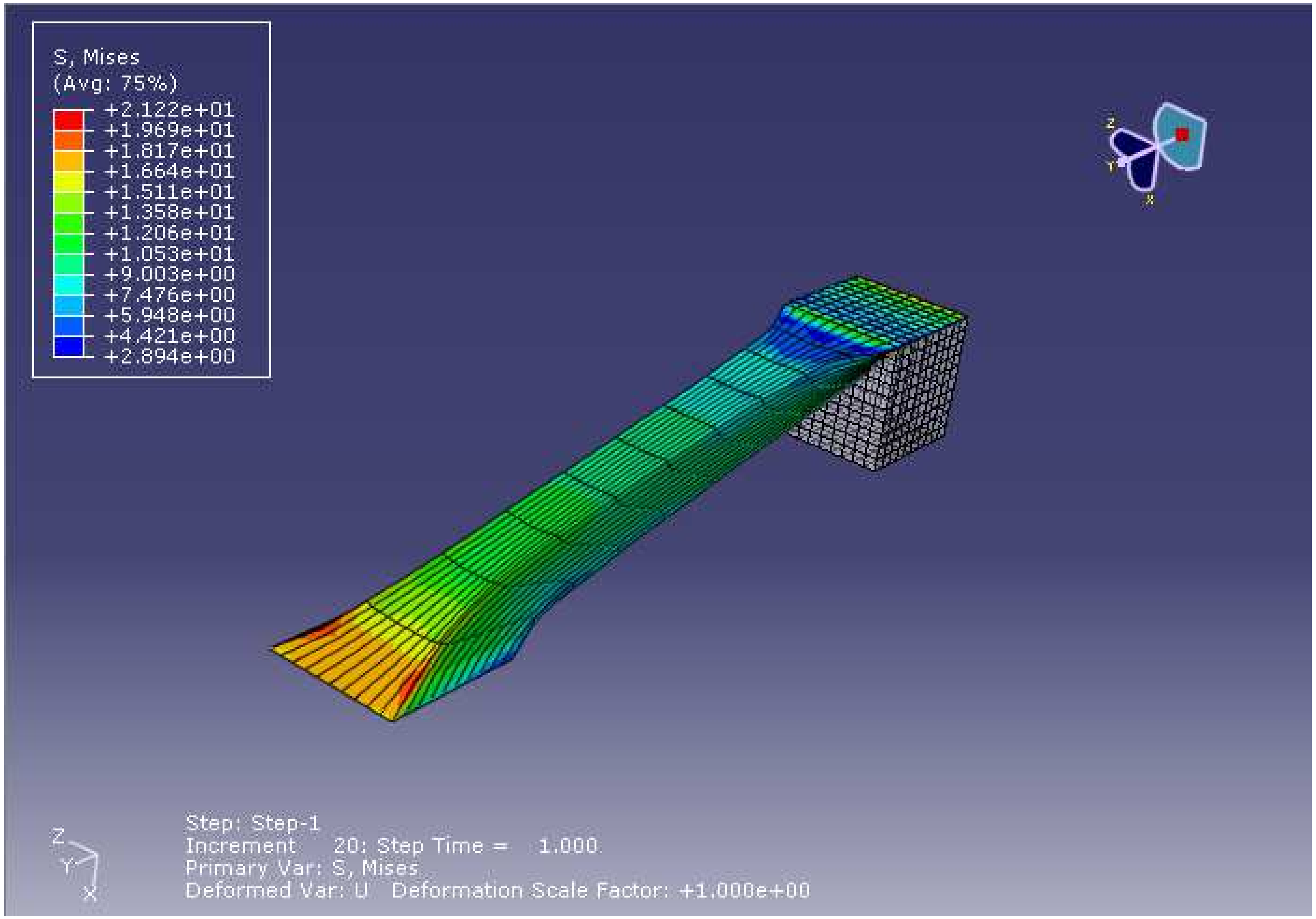




Éléments Finis

Modèle Gornet Desmorat 2009

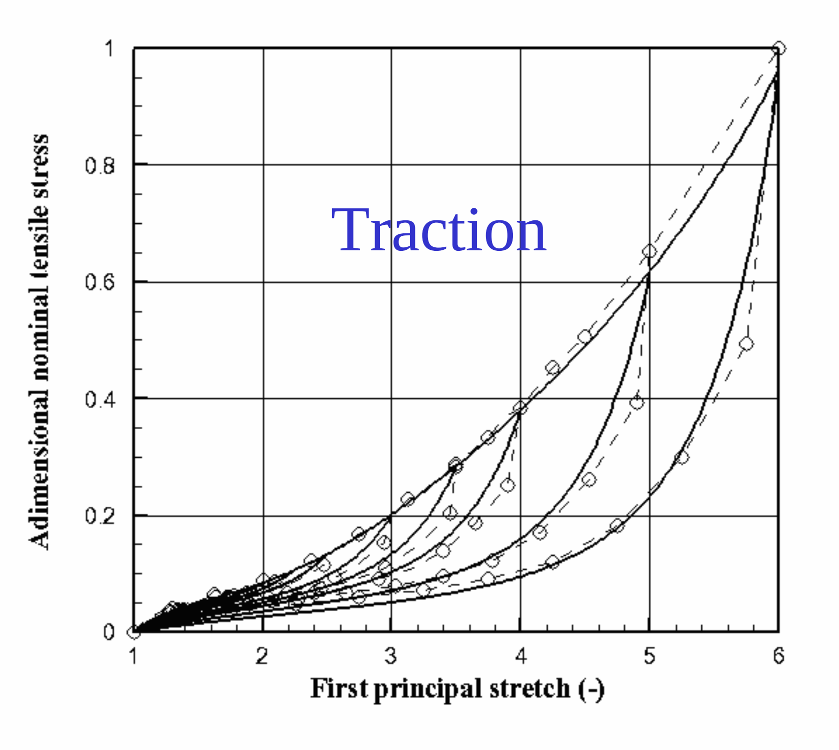
ABAQUS

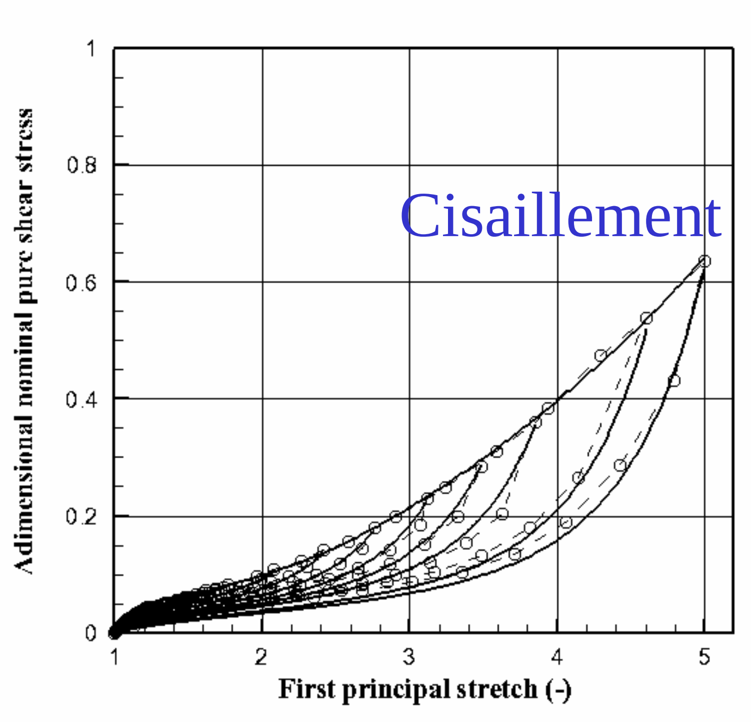


Modèle GDM effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

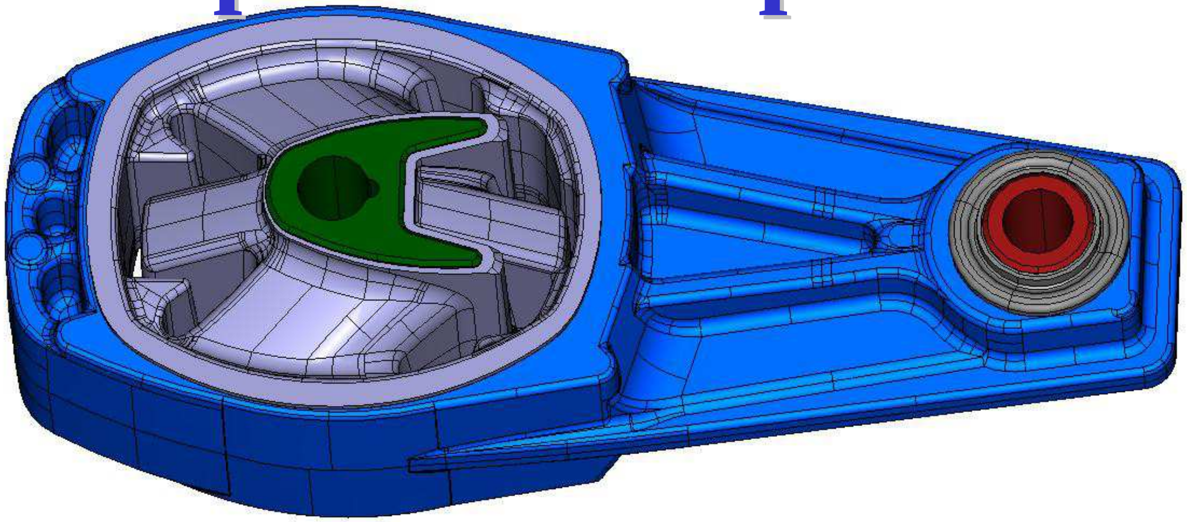
Gornet et al. ECCMR 2011

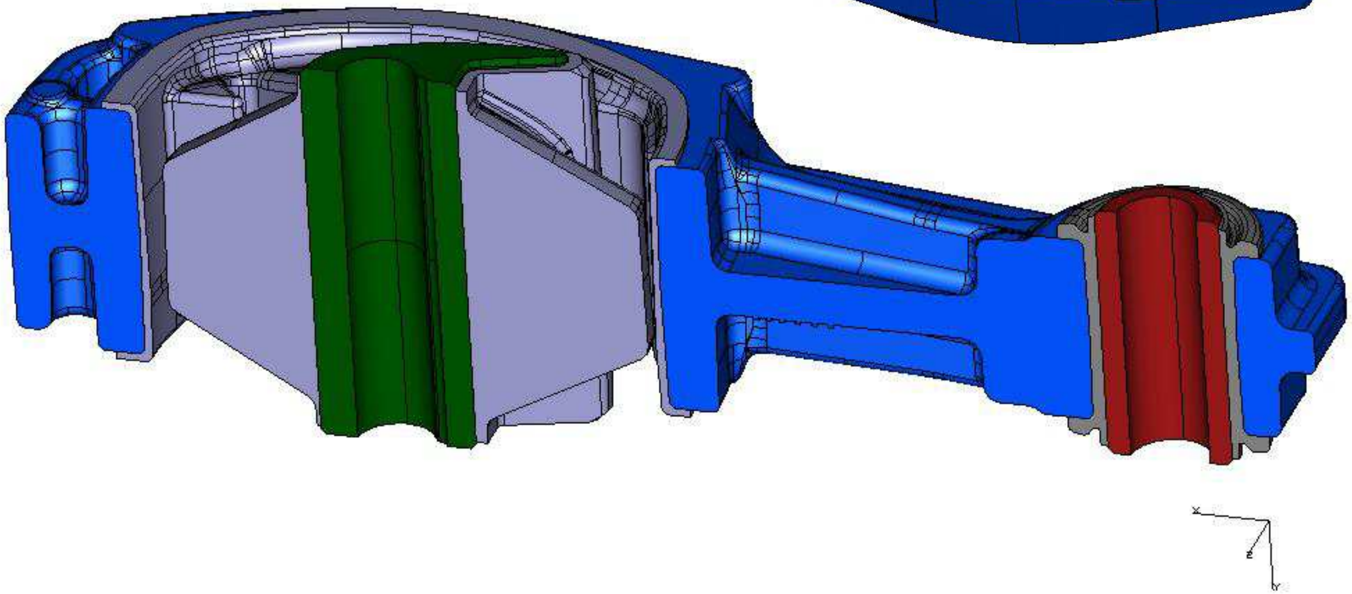




École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

Biellette de reprise de couple





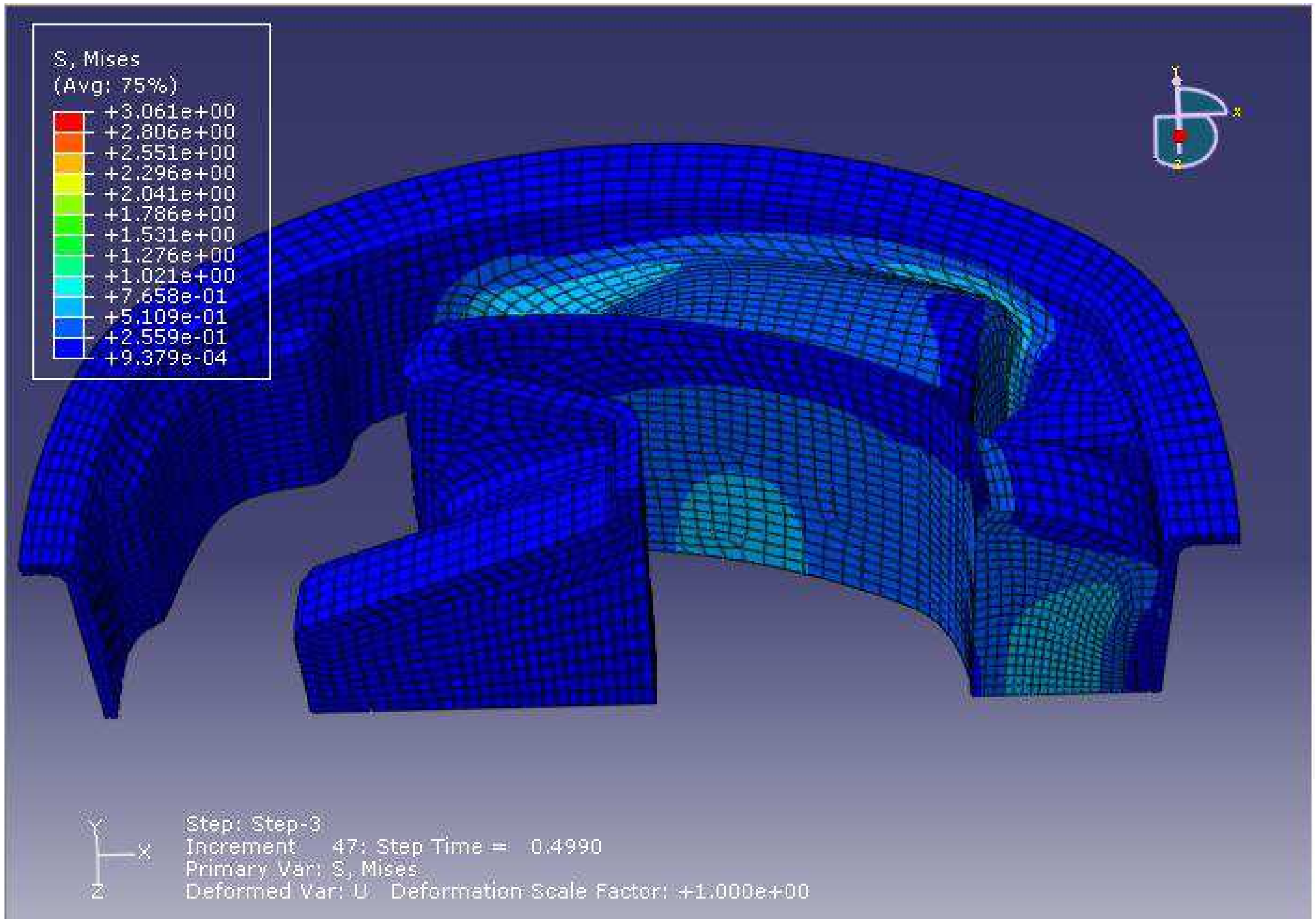
École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

Biellette de reprise de couple

Modèle Gornet Desmorat 2009

TRELLEBORG AUTOMOTIVE

ABAQUS



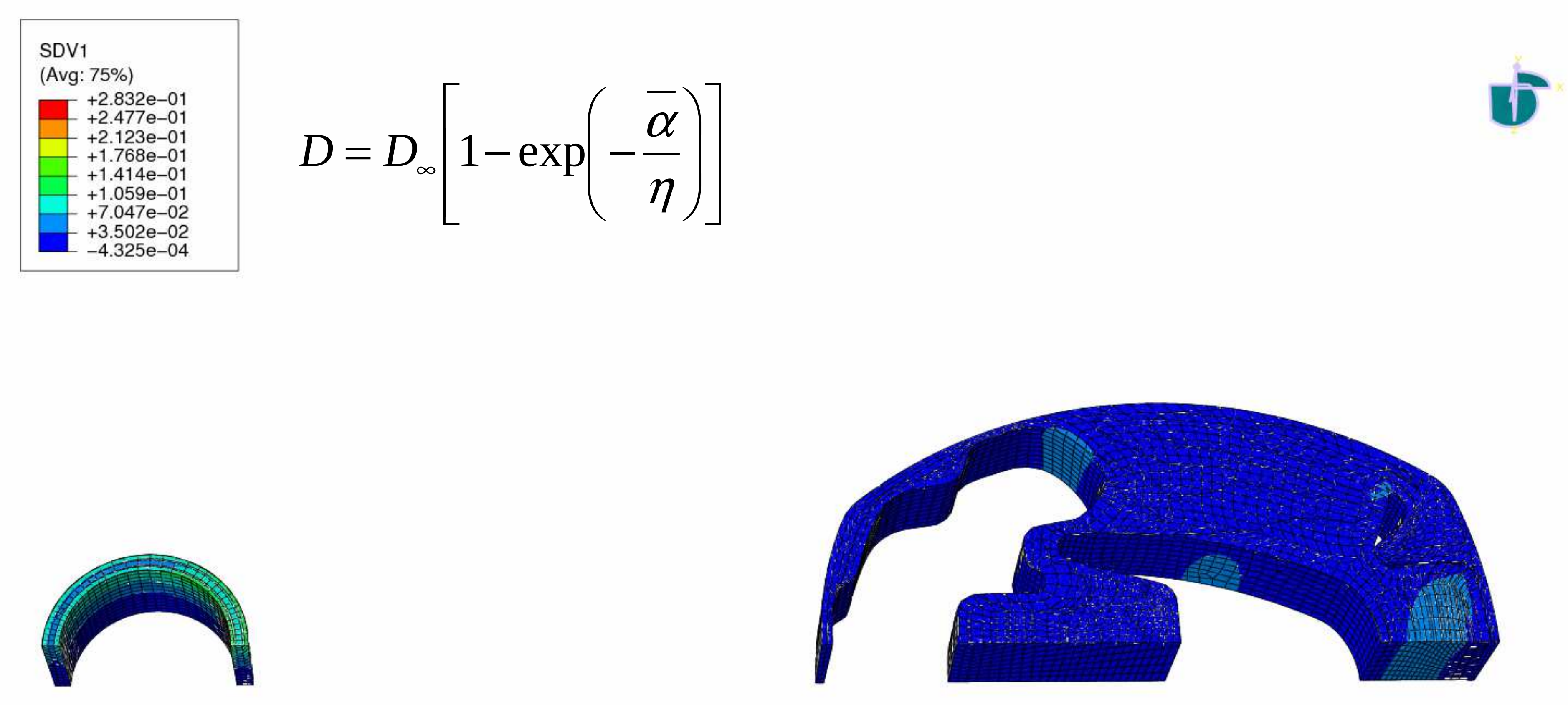
Matériau :

Caoutchouc

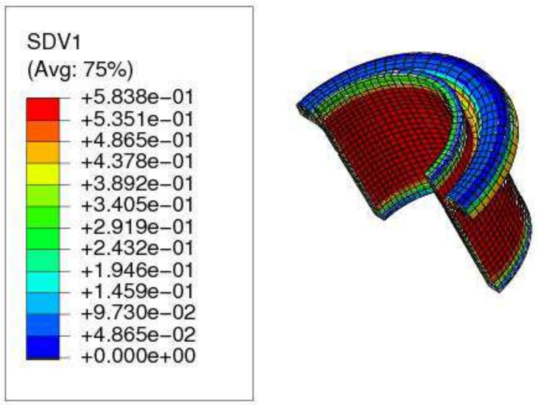
L.R.G. TRELOAR
Expériences 1944

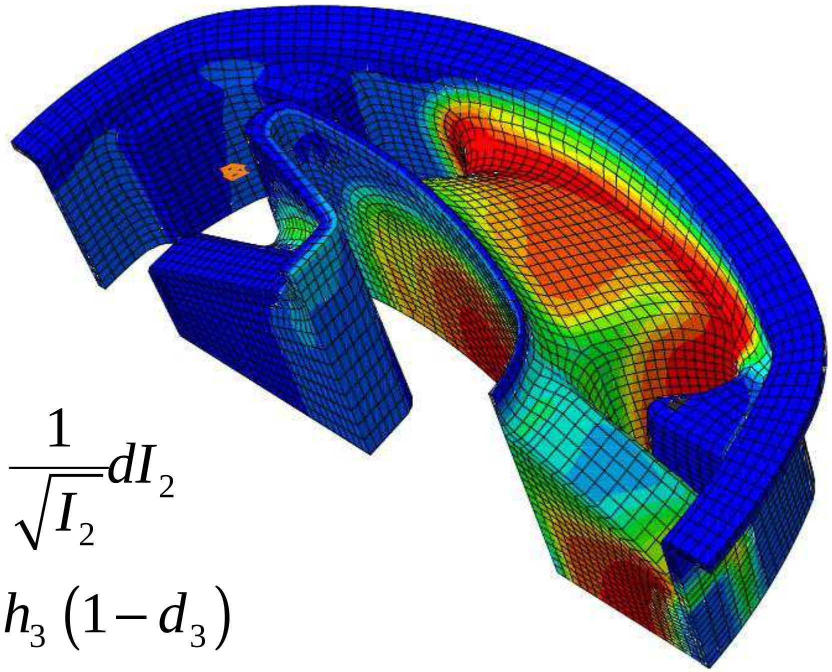
Biellette de reprise de couple
Modèle GDM isotrope 2009

$$D = D_{\infty}\left[1 - \exp\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\eta}\right)\right]$$



Biellette de reprise de couple
Modèle GDM 2011



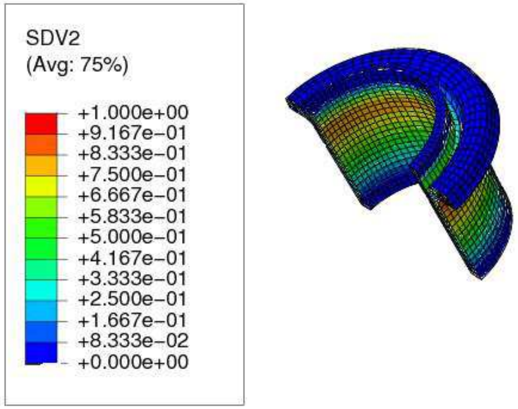


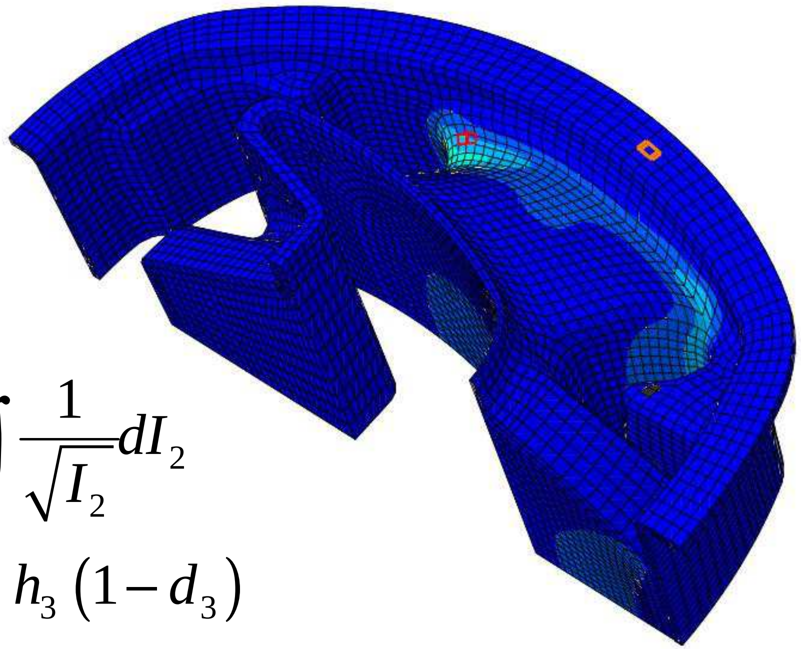
Dégradation d1

$$W_{GDM}\left(I_1, I_2\right) = \tilde{h}_1 \int e^{\tilde{h}_3 (I_1 - 3)^2} dI_1 + 3\tilde{h}_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2$$

$$\tilde{h}_1 = h_1\left(1 - d_1\right), \tilde{h}_2 = h_2\left(1 - d_2\right), \tilde{h}_3 = h_3\left(1 - d_3\right)$$

Biellette de reprise de couple
Modèle GDM 2011



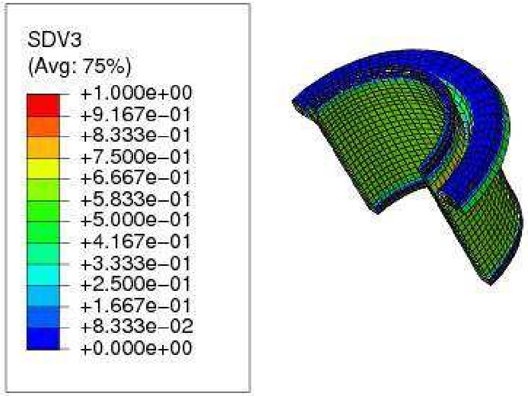


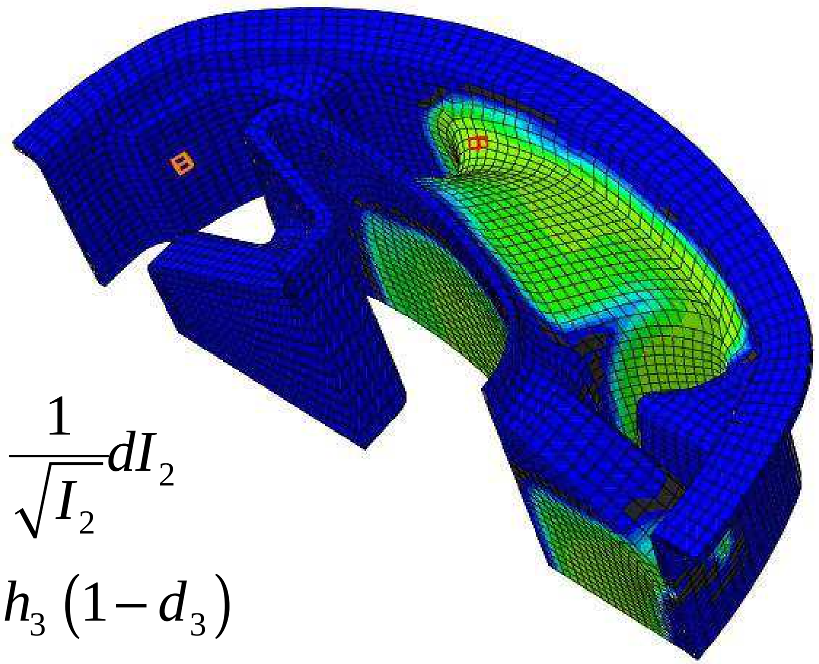
Dégradation d2

$$W_{GDM}\left(I_1, I_2\right) = \tilde{h}_1 \int e^{\tilde{h}_3 (I_1-3)^2} dI_1 + 3\tilde{h}_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2$$

$$\tilde{h}_1 = h_1\left(1-d_1\right), \tilde{h}_2 = h_2\left(1-d_2\right), \tilde{h}_3 = h_3\left(1-d_3\right)$$

Biellette de reprise de couple
Modèle GDM 2011





Dégradation d3

$$W_{GDM}\left(I_1, I_2\right) = \tilde{h}_1 \int e^{\tilde{h}_3 (I_1-3)^2} dI_1 + 3\tilde{h}_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2$$

$$\tilde{h}_1 = h_1\left(1-d_1\right), \tilde{h}_2 = h_2\left(1-d_2\right), \tilde{h}_3 = h_3\left(1-d_3\right)$$

École Centrale de Nantes, Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique – GeM
UMR CNRS 6183

Conclusion

- Performance des modèles hyperélastiques
- Simulations des essais : Treloar, Kawabata
- Modèles GD, GDM : Treloar, Trelleborg
- Matériaux Incompressibles
  - Traction, Cisaillement, Biaxiale…
- Matériaux Quasi incompressibles
- Implantations Cast3M CEA / ABAQUS