

---

# Modélisation stochastique de tronçon de voie ferrée

---

N. Rhayma,  
Direction I&R - SNCF, Paris  
LaMI, université Blaise Pascal.

# Problématique

**Conception** : dimensionner pour assurer des coûts de maintenance maîtrisés

**Prévision** : déterminer le taux de dégradation d'une infrastructure

**Diagnostic** : comprendre les mécanisme de dégradation et leur importance pour une situation données.

**Reconnaissance** :  
évaluation des propriétés d'une structure ferroviaires (géométrique, mécanique)

**Caractériser le comportement des sols** :  
prélèvements + essais laboratoires

**Hiérarchisation des solutions de maintenance**:  
évaluer le potentiel de différentes solutions techniques à l'aide d'outils numériques

**Outils numériques permettant :**

- de prendre en compte des lois de comportement sols,
- de s'interfacer avec d'autres outils (fiabilité, stochastique),
- de proposer des solutions industrialisables

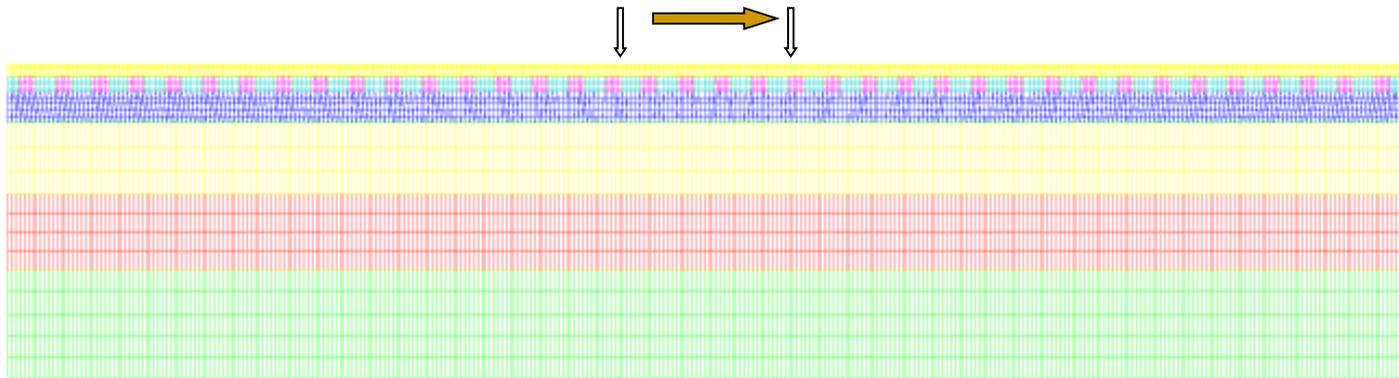
---

## Objectifs:

- Quantifier la variabilité de la plate-forme ferroviaire à partir de mesures in-situ,
- Développer un modèle numérique représentant une portion de la voie,
- Adapter une méthode d'analyse probabiliste (MEFS).

# Modélisation EF de la voie

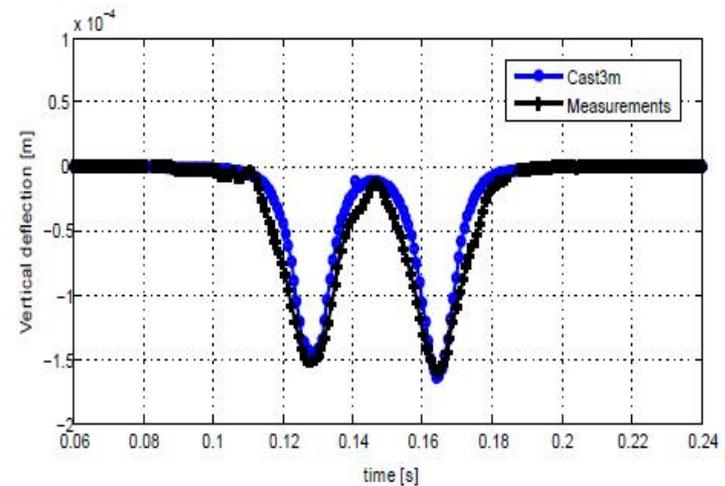
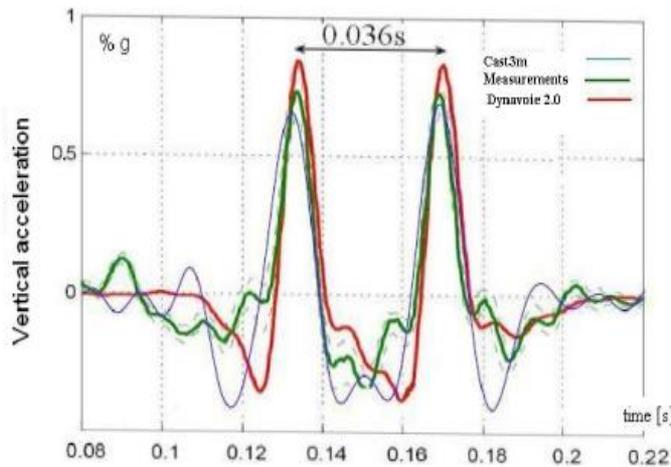
- Modèle multicouche 2D : 12792 éléments, 13577 nœuds)
- 30 m de long (50 traverses)
- Couches de l'infrastructure avec comportement élasto-plastique
- Maillage EF: compromis entre précision et coûts de calculs
- Simulations du passage d'un bogie (17 tonnes) à une vitesse de 160 km/h.
- Résolution : PASAPAS, 40 min CPU



# Modélisation EF de la voie

## Validation :

- Critère de Boussinesq
- Distribution des charges sous les traverses (critère de Sauvage)
- Comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux



Résultats en accord avec les résultats expérimentaux

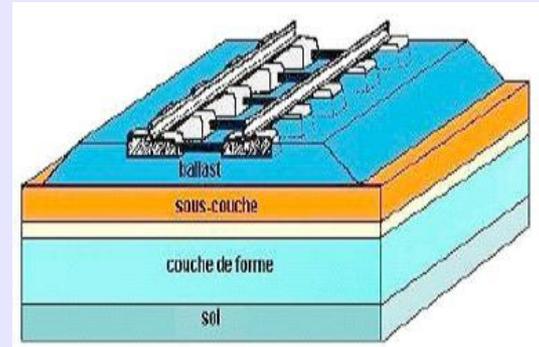
# Modélisation EF de la voie

## 8 paramètres incertains :

- > Epaisseurs des couches
- > Modules d'Young des couches

Variables aléatoires (v.a.) lognormales

$$Y = (Y_1, \dots, Y_8)^T$$



Couche	qd [MPa]		Epaisseur [cm]	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
<b>Ballast</b>	11,12	3,22	26,5	11,75
<b>Sous-couche</b>	15,69	12,18	64,4	25,64
<b>Couche de forme</b>	7,51	4,08	117,38	59,4
<b>Limons</b>	6,34	4,56	162,2	69,4

## 4 variables de contrôle

- > Déflexion maximale de la 25<sup>ème</sup> traverse :  $S_d$
- > Accélération maximale de la 25<sup>ème</sup> traverse :  $S_a$
- > Déflexion maximale du rail au centre du modèle:  $R_d$
- > Indicateur de nivellement :  $\tilde{N}L$

$$Z = (\tilde{N}L, R_d, S_d, S_a)^T$$

# Méthode de collocation stochastique

## Construction de surface de réponse par la méthode de collocation stochastique

Développement sur une base de polynômes de Lagrange

- Identification simple des coefficients du développement
- Calcul des moments statistiques des variables de sortie
- Densité de probabilité

Approches non intrusives : calculer les coefficients du développement à partir d'une batterie de calculs déterministes :

- + Nombre de calculs mécaniques limité
- + Mise en œuvre simple

# Méthode de collocation stochastique

## Normalisation Gaussienne

$$Y = (Y_1, \dots, Y_8)^t \xrightarrow{\mathbf{T}} X = (X_1, \dots, X_8)^t$$

Comportement mécanique aléatoire de la voie ferrée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{Q}(t) + h(Q(t), \dot{Q}(t), \xi(t), t, X) = 0, \quad t > 0 \\ Q(0) = q_0 ; \dot{Q}(0) = \dot{q}_0 \\ Z(t) = g(Q(t)), \quad t \geq 0 \\ m_Z(t) = \mathbf{IE}[Z(t)], \quad t \geq 0 \\ R_Z(s, t) = \mathbf{IE}[Z(s)Z^T(t)], \quad s \geq 0, t \geq 0 \end{array} \right.$$

# Méthode de collocation stochastique

## Principe de la méthode

1 - Solution de la forme :

$$Q(t) = r(t, X) \quad Z(t) = G(t, X)$$

2 - Recherche d'une solution approchée de la forme :

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} r_{j_1 \dots j_p}(t) L_{n_1, j_1}(x_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(x_p)$$

$L_j$  polynômes de Lagrange

$r_j(t)$  solution de

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) + h(r(t), \dot{r}(t), \xi(t), t, x) = 0, & t > 0 \\ r(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases}$$

# Méthode de collocation stochastique

## 3 - Approximation du processus réponse

Réponse (déplacement, accélérations....)

Nombre de points de collocation

Inconnues du problème

Base de polynômes de Lagrange

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} g(r_{j_1 \dots j_p}(t)) L_{n_1, j_1}(x_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(x_p)$$

Les coefficients  $g(r_{j_1 \dots j_p}(t))$  sont déterminés par appels au modèle EF déterministe

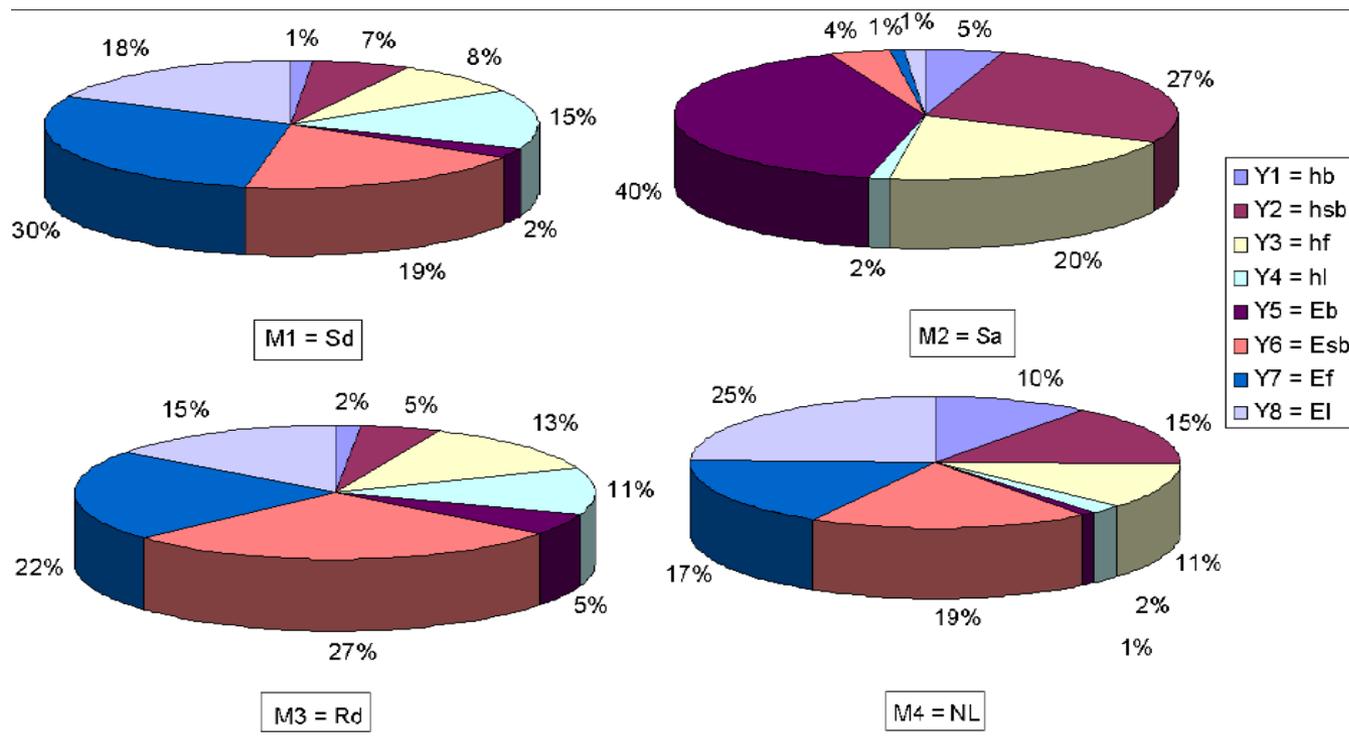
## 4 - Estimation des moments statistiques

$$\tilde{m}_M = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} s_{j_1 \dots j_p}$$
$$\tilde{V}_M = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} s_{j_1 \dots j_p}^2 - \tilde{m}_M^2$$

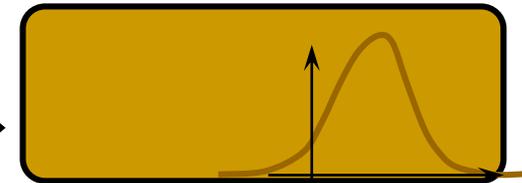
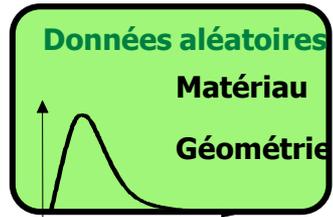
Estimation facile des densités de probabilité (PDF) par SMC sur la SR ou procédure de Johnson (probdens)

# Analyse de sensibilité locale

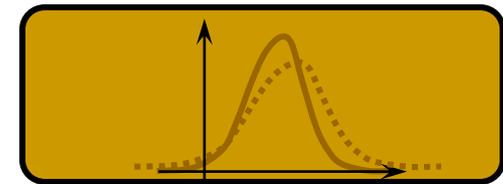
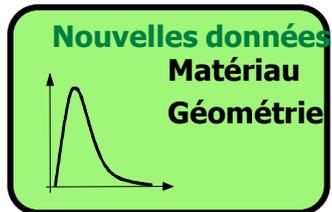
- Hiérarchisation des v.a.
- Réduction du nombre de v.a. à prendre en compte
  - méthode *OAT* (One-Factor-At-A-Time )
  - création d'une perturbation au niveau de des coefficients de variations et on analyse l'impact sur les variables de sortie



4 v.a.



Perturbation :  
opérations de  
maintenance

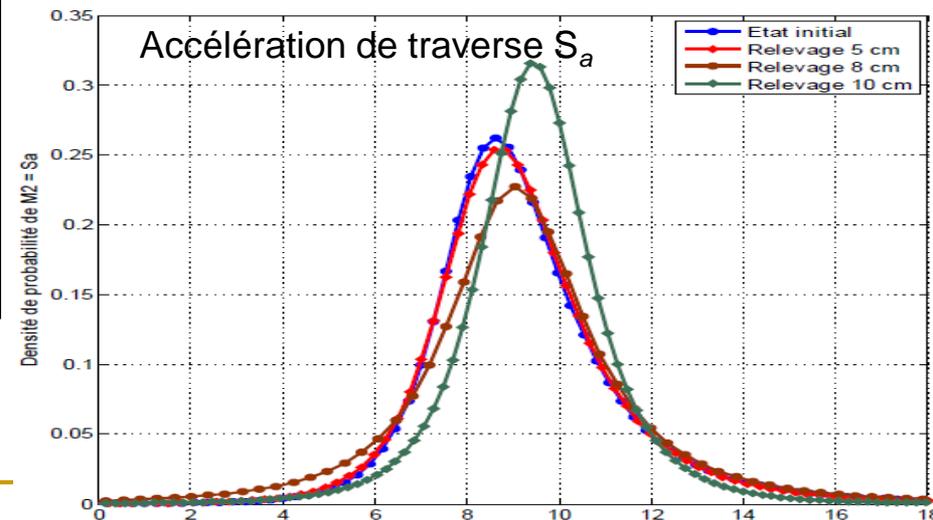
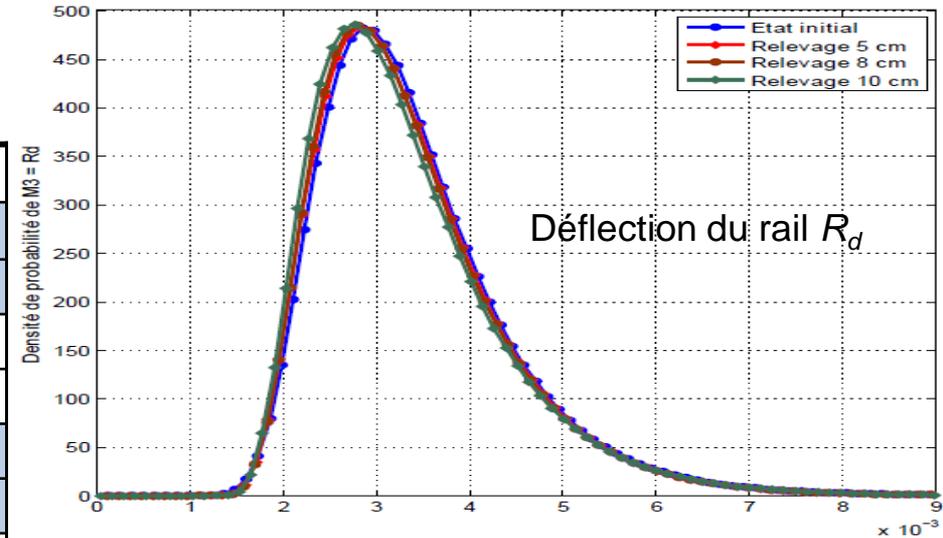


# Analyse de sensibilité

**Relevage de la voie : 3 épaisseurs : 5, 8 et 10 cm**

Relevage	Paramètre	Moyenne	Ecart-type
5 cm	Epaisseur ballast	31 cm	11 cm
	Module ballast	45	8
	Module sous-couche	26,55	18,27
	Module couche de forme	9,21	5,84
8 cm	Epaisseur ballast	34 cm	11 cm
	Module ballast	45	8
	Module sous-couche	26,55	18,27
	Module couche de forme	9,21	5,84
10 cm	Epaisseur ballast	36 cm	11 cm
	Module ballast	45	8
	Module sous-couche	26,55	18,27
	Module couche de forme	9,21	5,84

Faible apport pour ce type  
d'opération

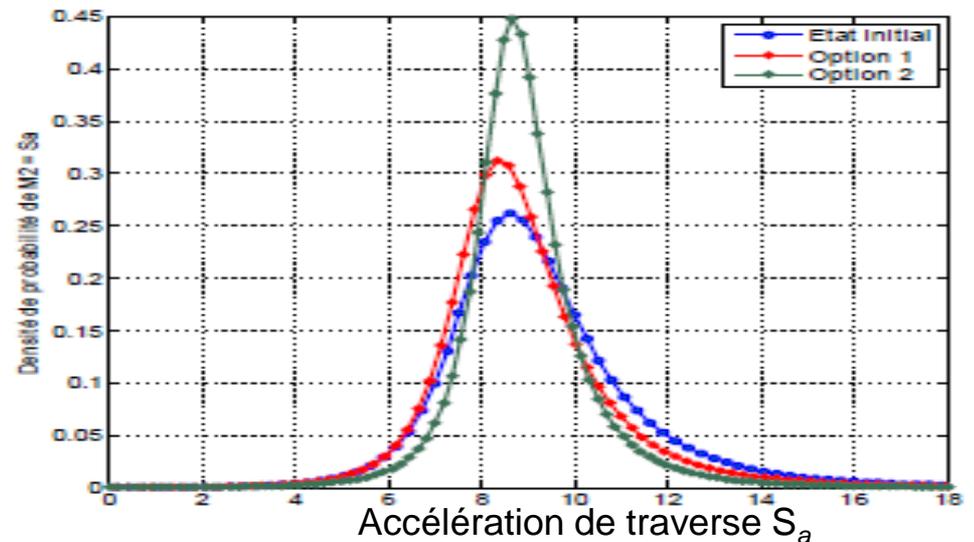
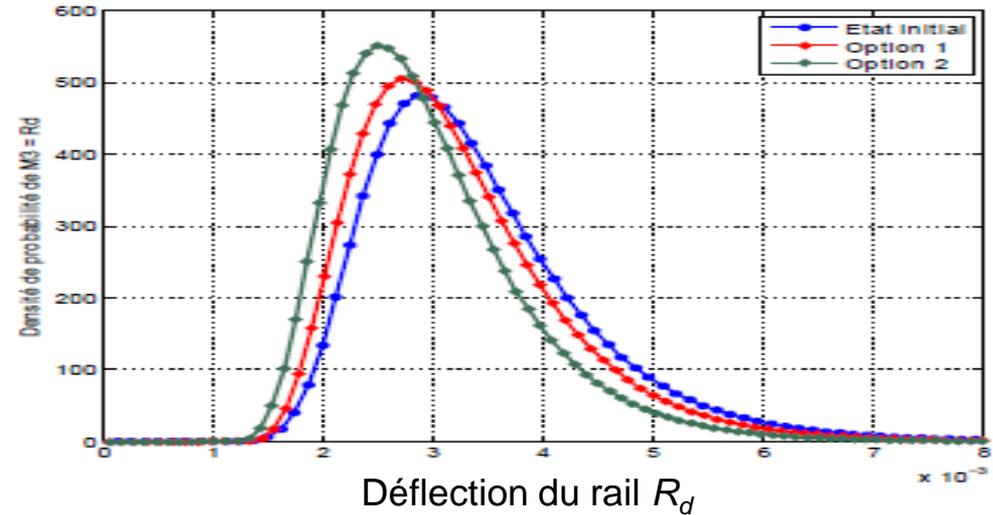


# Analyse de sensibilité

## Traitement de la couche intermédiaire :

Deux options de compactage

	Paramètre	Moyenne	Ecart-type
Option 1	Epaisseur ballast	26 cm	3 cm
	Module ballast	50	2,5
	Module sous-couche	50	7
	Module couche de forme	19	5,84
Option 2	Epaisseur ballast	26 cm	3 cm
	Module ballast	50	2,5
	Module sous-couche	70	7
	Module couche de forme	19	5,84

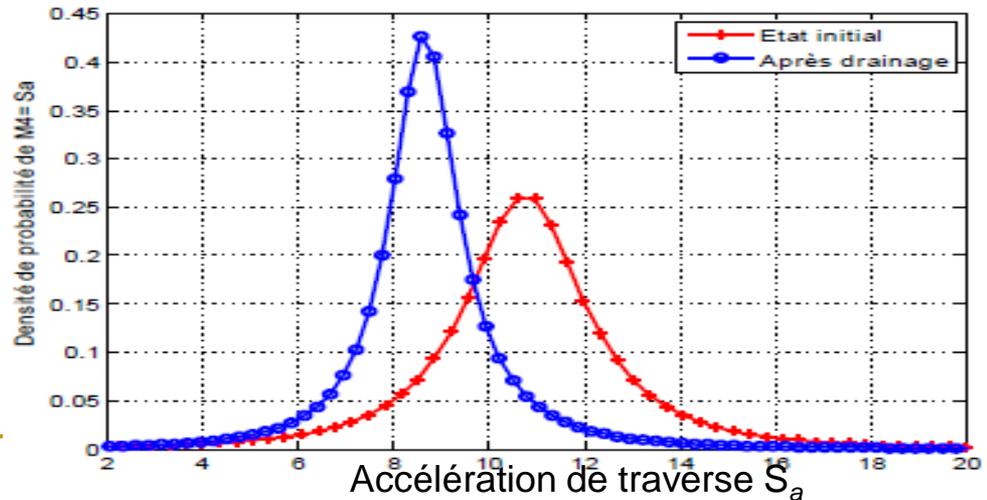
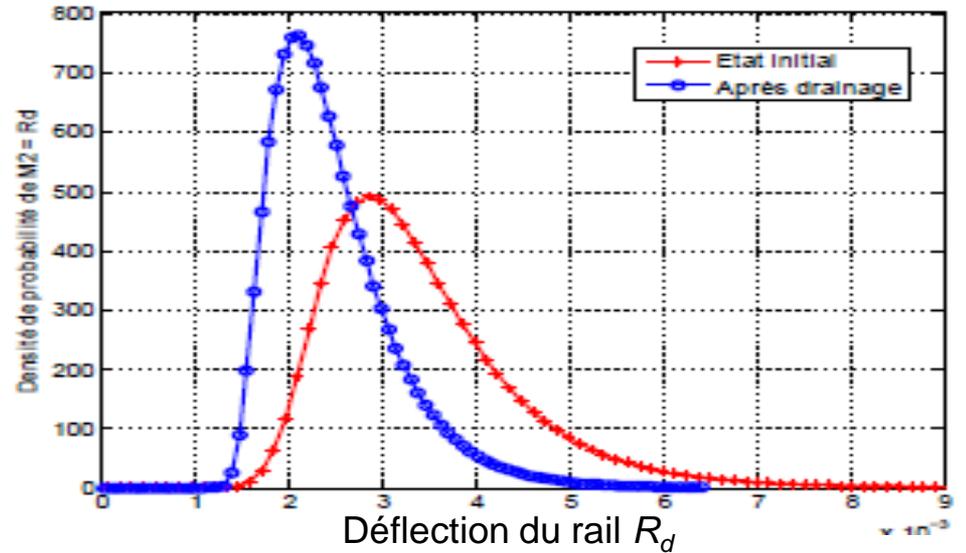


# Analyse de sensibilité

## Traitement de la plate-forme par amélioration des conditions de drainage



	Paramètre	Moyenne	Ecart-type
Après drainage	Epaisseur ballast	26 cm	11 cm
	Module ballast	38,91	11,27
	Module sous-couche	40	7
	Module couche de forme	20	5,84



# Analyse fiabiliste

Critère de défaillance

Fonction d'état limite :  $F(\mathbf{x}) = 0$

Domaine de sûreté

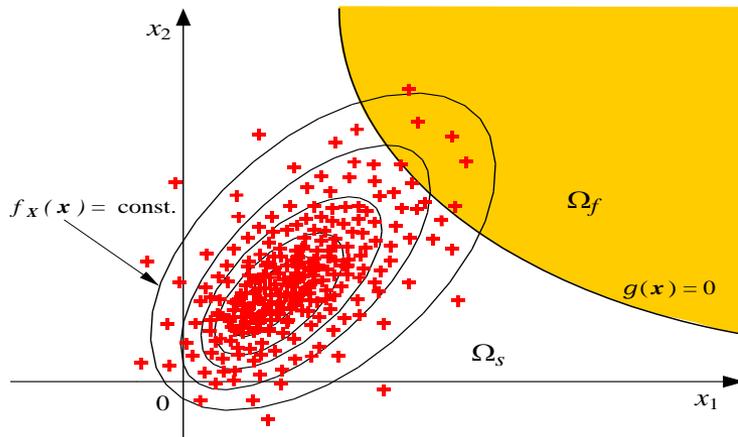
$$\Delta_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, F(\mathbf{x}) > 0\}$$

Domaine de défaillance

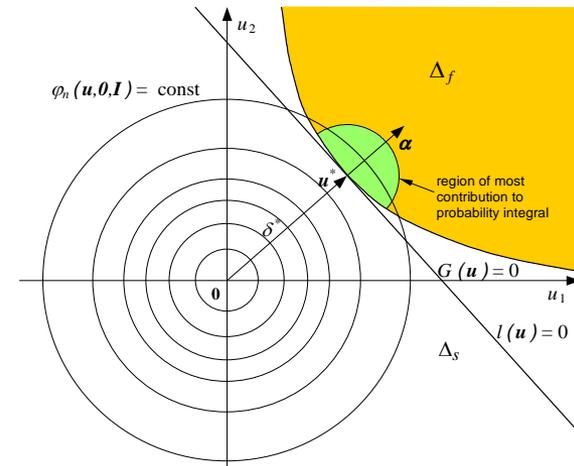
$$\Delta_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, F(\mathbf{x}) \leq 0\} \Rightarrow Pf$$

Expression explicite (collocation stochastique)

Méthode de Monte-Carlo



Approximation du 1er ordre (FORM)



$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^p \text{ tel que :} & \beta_{HL} = d(O, \Delta_f) \\ \|\mathbf{x}^*\| = \min_{\mathbf{x} \in \Delta_f} \|\mathbf{x}\| & P_f = \Phi(-\beta) \end{cases}$$

# Analyse fiabiliste

## Calcul d'indice de fiabilité (Hasofer-Lind)

Approximation de la 1er ordre (FORM)

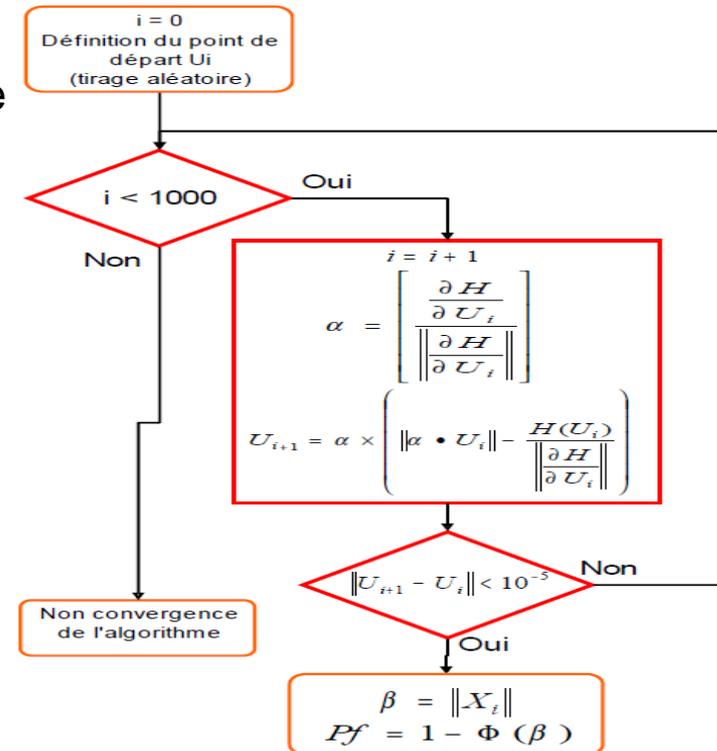
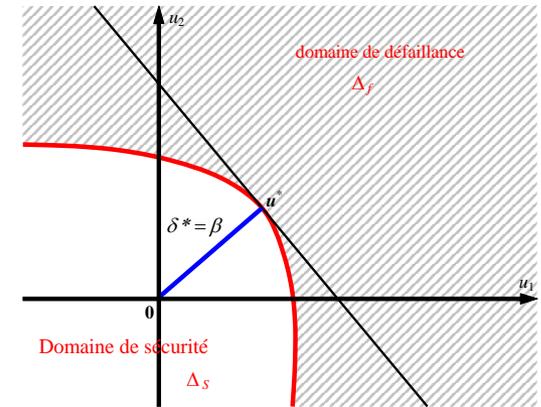
Optimisation : algorithme déterministe ( Rackwitz-Fiessler)

- basée sur le calcul des gradients de chaque variable (différence finie) ,
- à partir de ces gradients, on estime linéairement le point de conception,
- on reprend la même stratégie autour de ce nouveau point jusqu'à convergence

une itération de fiabilité fait appel à n+1 calculs mécaniques ( n est le nombre de v.a. )

Algorithme à convergence rapide (Fiabili ???)

Développement sous forme de procédure



# Analyse fiabiliste

Critère 1 :  $G(y) = R_d(y) - \overline{R_d}$   
 $\overline{R_d} = 6,8 \text{ mm}$

Critère 2 :  $G(y) = S_a(y) - \overline{S_a}$   
 $\overline{S_a} = 12 \text{ ms}^{-2}$

## Relevage de la voie

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Relevage 5 cm	1,5127	0,0652	2,83	0,0614	1,76
	Relevage 8 cm	1,5286	0,0632	5,81	0,0593	5,12
	Relevage 10 cm	1,5487	0,0607	9,46	0,0573	8,32
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Relevage 5 cm	1,7746	0,0379	49,66	0,0382	49,86
	Relevage 8 cm	1,8298	0,0336	55,37	0,0319	58,13
	Relevage 10 cm	2,0192	0,0217	71,18	0,0205	73,09

# Analyse fiabiliste

## Traitement de la couche intermédiaire

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Option 1	1,6417	0,05036	24,94	0,0522	16,14
	Option 2	1,8717	0,03065	54,32	0,0341	45,44
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Option 1	1,639	0,0506	32,80	0,0466	38,84
	Option 2	1,955	0,02529	66,41	0,0193	74,67

## Traitement de la plate-forme par amélioration des conditions de drainage

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Après drainage	2,8657	0,0021	96,87	0,0018	97,12
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Après drainage	2,7699	0,0028	96,28	0,0023	96,32

---

## Conclusions

- Méthodologie de prise en compte de la variabilité des paramètres de la voie ferrée,
- Utilisation d'une méthode des EFS (Cast3M) : approximation des moment statistiques, PDF
- Analyse de la sensibilité : paramètres les plus influents et nécessitant le plus grand effort de maintenance
  
- Analyse fiabiliste : scénarios de défaillance, probabilité de défaillance
- Hiérarchisation des opérations de maintenance