

# Quelques applications II plasticité stationnaire

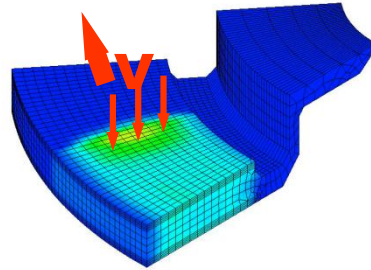
**Habibou MAITOURNAM, Ky DANG VAN  
Mac Lan NGUYEN (SNCF)  
Paul SICCSIC**

# PLAN

- **Motivation et objectif**
- **Méthodes stationnaires**
  - Principe des algorithmes eulériens
  - Algorithmes stationnaires
  - Détermination de l'état stabilisé
  - Périodicité de la structure ou du chargement
- **Quelques exemples d'application**
  - Tassement du ballast
  - Freinage répété

# PLAN

- **Motivation et objectif**
- **Méthodes stationnaires**
  - Principe des algorithmes eulériens
  - Algorithmes stationnaires
  - Détermination de l'état stabilisé
  - Périodicité de la structure ou du chargement
- **Quelques exemples d'application**
  - Tassement du ballast
  - Freinage répété



déformations plastiques équivalentes au passage 1



Faiçonnage :



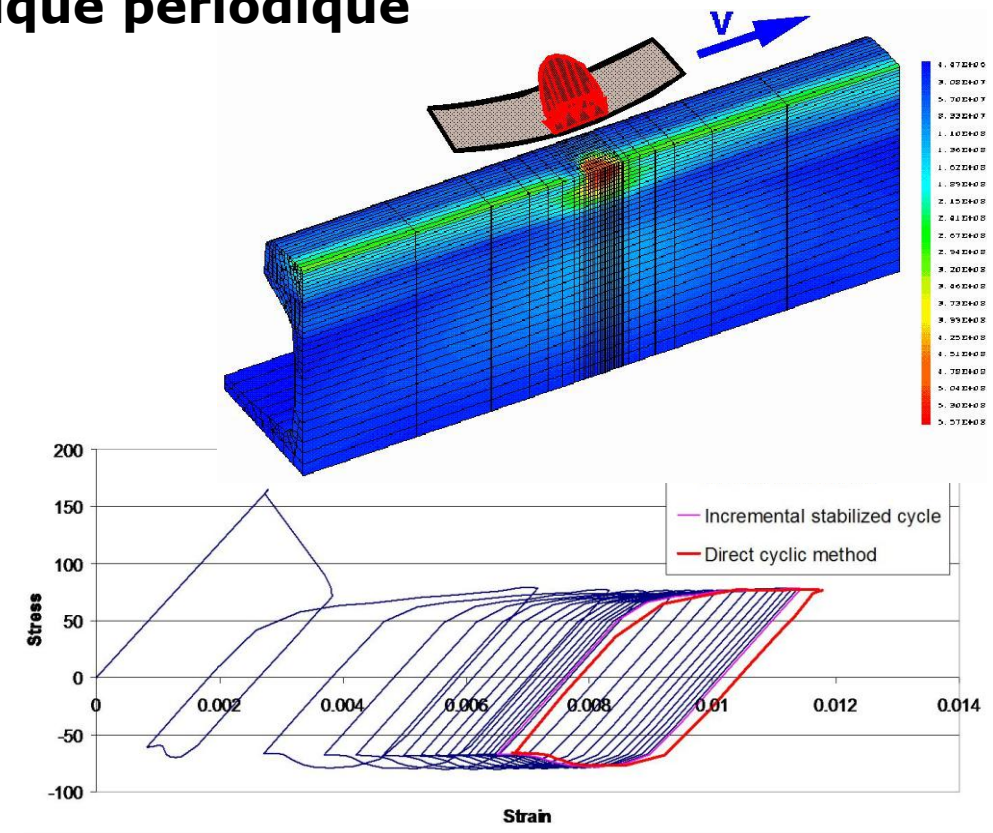
# Structures sous chargements cycliques

## Nature du chargement

1. Charge constante mobile et répétée
2. Charge mobile et répétée, constante par cycle
3. Chargement thermomécanique périodique

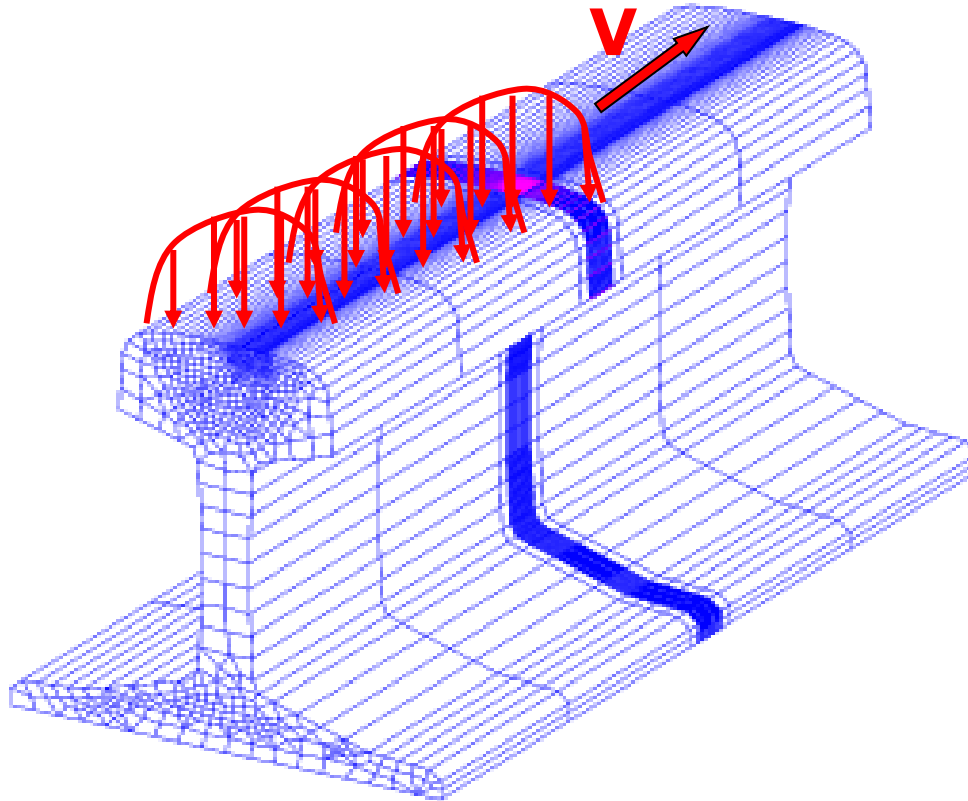
## QUESTIONS :

1. Evolution cycle par cycle ?
2. Y a t-il un état stabilisé ?
3. Nature de cet état limite ?
4. Nombre de cycles ?



# Méthode incrémentale classique

translations incrémentales du chargement



**IMPOSSIBLE DE REALISER DE MILLIERS  
DE PASSAGES TEMPS CPU EXCESSIF**

# PLAN

- **Motivation et objectif**

- **Méthodes stationnaires**

Principe des algorithmes eulériens

Algorithmes stationnaires

Détermination de l'état stabilisé

Périodicité de la structure ou du chargement

- **Quelques exemples d'application**

Tassement du ballast

Freinage répété

# Principe des algorithmes

## DONNEES

- Chargement mobile
- Vitesse de chargement
- Petites transformations

## SIMULATION

- **Repère du chargement**  
*Maillage raffiné uniquement dans les zones à forts gradients (en général, sous le chargement)*  
*Mise en données simplifiée*
- **Coordonnées eulériennes**  
*Maillage fixe*
- **La configuration de référence suit le mouvement rigide de la structure**  
*Petites distorsions des mailles*  
*Pas de réactualisation de géométrie*



## Algorithmes eulériens pour structures pleines

### • Algorithme Stationnaire Passage par Passage

Donne la réponse de la structure **après chaque passage** du chargement thermomécanique qui se déplace avec une vitesse constante

### • Algorithme Stationnaire Direct

Donne directement l'**état stabilisé** de la structure soumise à des **passages répétés** de chargement mobile

### • Algorithme TRC (Transitoire dans le Repère du Chargement)

Donne la **réponse transitoire** d'une structure soumise à un **chargement thermomécanique mobile d'amplitude et de vitesse variables**

#### Hypothèses

*Petites transformations*

+

- *Régime permanent dans le repère du chargement*

- *vitesse constante pendant chaque passage*

+

- *Mêmes cycles de chargement*

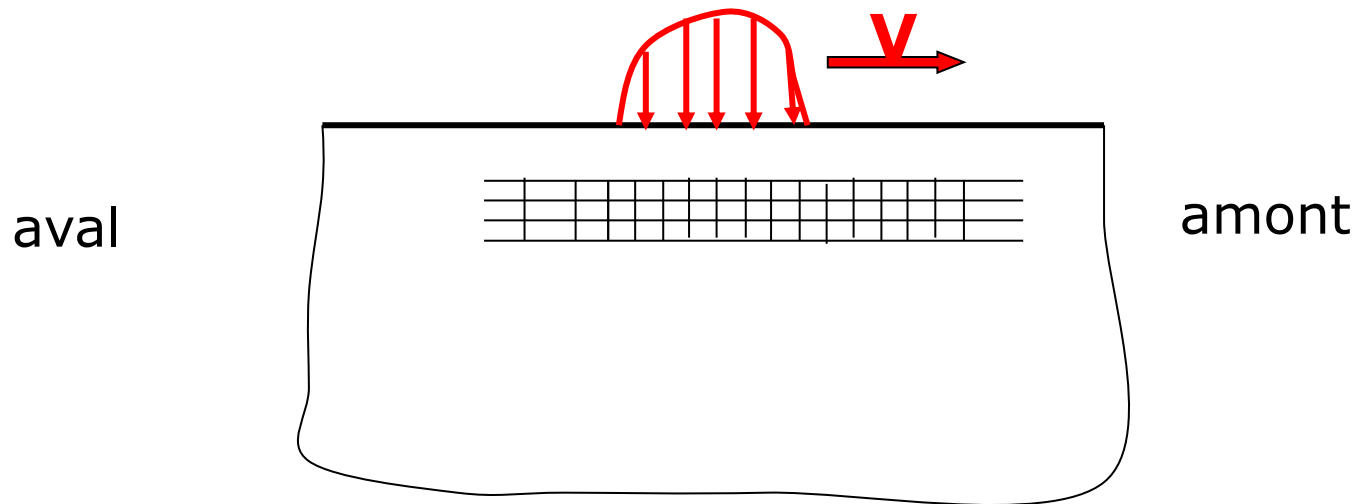
- *Stabilisation (adaptation ou accommodation)*

# Principe des calculs avec chargement mobile

## 1. Utilisation du repère mobile du chargement

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

## 2. Intégration le long des lignes de courant qui sont connues en transformation infinitésimale



# Principe des méthodes stationnaires

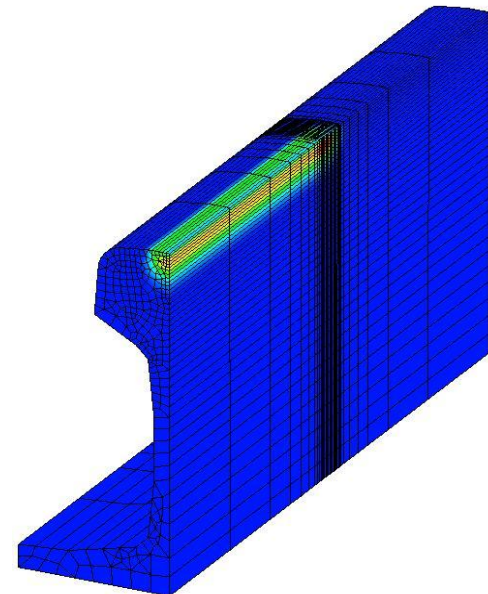
## I. Stationnarité dans le repère mobile du chargement

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad + \mathbf{V} \text{ constante}$$

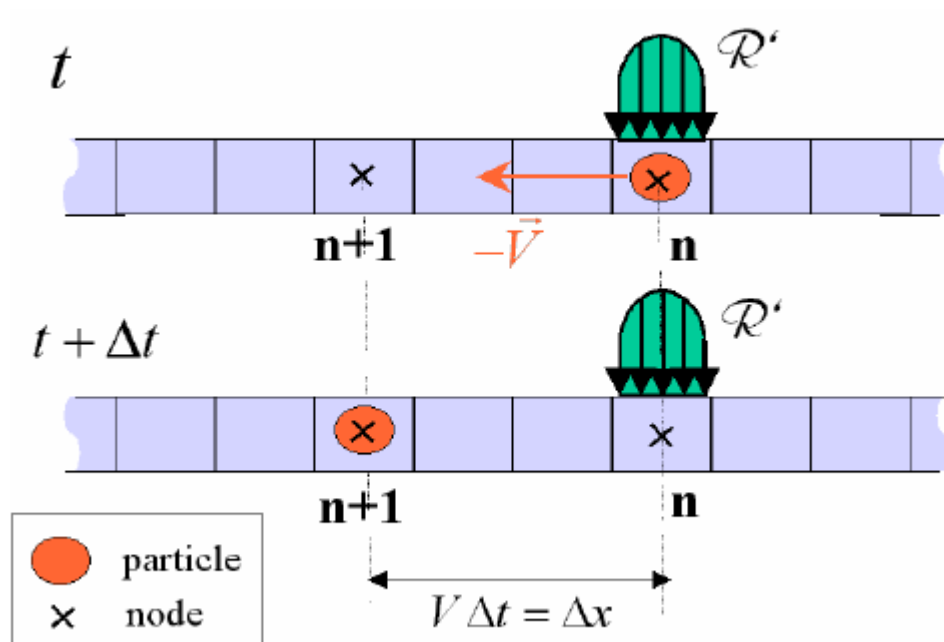
### Conséquences

1. équation d'équilibre
2. loi de comportement non locale
3. Conditions "initiales"

➔ Calcul global d'un passage



# Algorithme stationnaire direct



Le chargement est fixe, et la déformation plastique en un point est fonction de celle du point « amont ».

## Algorithme stationnaire pour 1 passage

(0). Initialisation au début d'une passe  $\mathbf{t}_0 : \{ \sigma_0, \varepsilon_0, \varepsilon_0^p \} \quad \{ \Delta\sigma_0, \Delta\varepsilon_0, \Delta\varepsilon_0^p \} = \{ 0, 0, 0 \}$

(1). A  $\mathbf{t}_j : \{ \Delta\sigma_j, \Delta\varepsilon_j, \Delta\varepsilon_j^p \}$

(2). Equilibre global : détermination de  $\Delta\varepsilon_{j+1} = \Delta\varepsilon_j + \mathbf{c}_{j+1}$

(3). Test de plasticité  $\xi_{j+1}^* = \mathbf{s}_0 - \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + 2\mu \Delta\mathbf{e}_{j+1} - (2\mu + c) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^p (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$

Si  $\| \xi_{j+1}^* \| < k$  Incrément élastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}^p (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

Sinon Incrément plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}^p (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu + c} \left( 1 - \frac{k}{\| \xi_{j+1}^* \|} \right) \xi_{j+1}^*$$

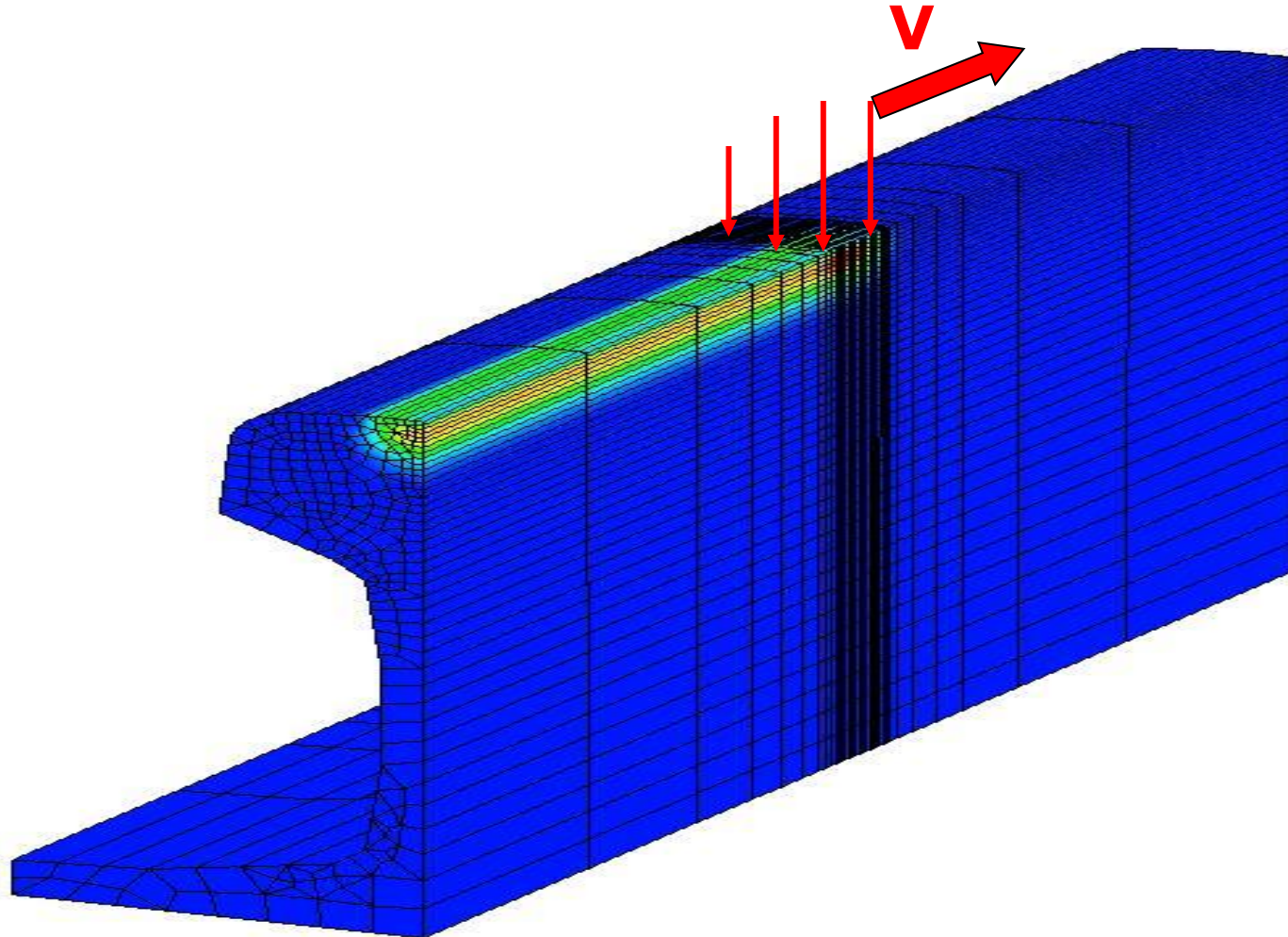
$$\Delta\sigma_{j+1} = L : \left[ (\Delta\varepsilon_{j+1} - \Delta\varepsilon_{j+1}^p) \right]$$

(4). Test de convergence Si convergence : Aller à (0)  
Sinon : Aller à (1)

# méthode stationnaire ppp (NQS, DVK, HM)



**Méthode stationnaire passage par passage**



# *Méthode stationnaire directe*

**I. Stationnarité dans le repère mobile du chargement**

+

**II. Périodicité de la réponse limite**

=

**Obtention direct de l'état asymptotique  
(adaptation, accommodation ou rochet)**

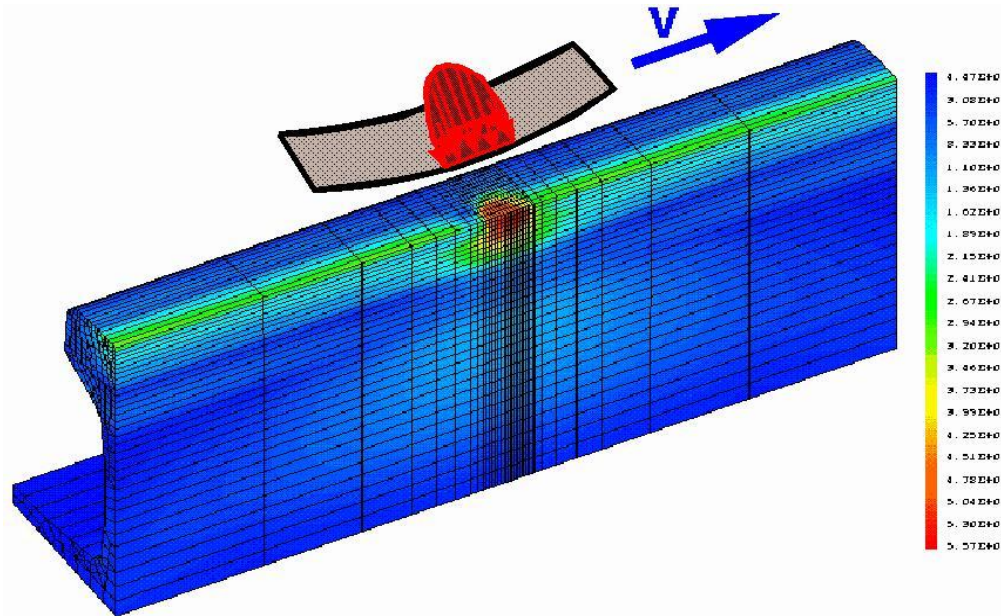
# méthode stationnaire directe

## II. Périodicité de la réponse limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{-x} \underline{\underline{\varepsilon}}^P, x(x) dx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \underline{\underline{\alpha}}_{k,x}(x) dx = 0$$

**→ Calcul direct de l'état limite**





# Mise en oeuvre de la méthode dans Cast3M

En gibiane : base élaborée par J. Kichenin, A. Constantinescu, M Dragon  
Procédures : DEDU, MAMOD, STATIO

- 1. Loi de comportement non locale :**  
nécessité de connaître les grandeurs aux points en amont  
du point considéré  
procédures : DEDU (tran ou rota)

- 2. Prise en compte des termes d'inertie**  
en stationnaire :

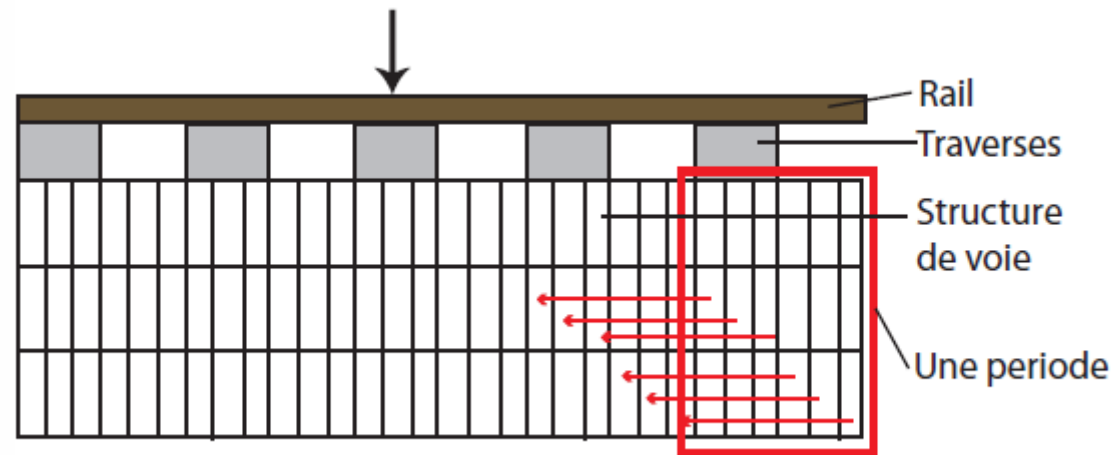
$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \rho(\underline{g} - V^2 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}) = 0$$

par une matrice D particulière

- 3. Conditions de périodicité pour l'arrêt du calcul**

# Cas des Structures Périodiques

- Pour les structures périodiques, la méthode précédente ne marche pas!



- Nécessité de l'adapter

# Méthode stationnaire "périodique"

*But : Recherche directe de la solution périodique d'une structure anélastique périodique soumise à un chargement mobile*

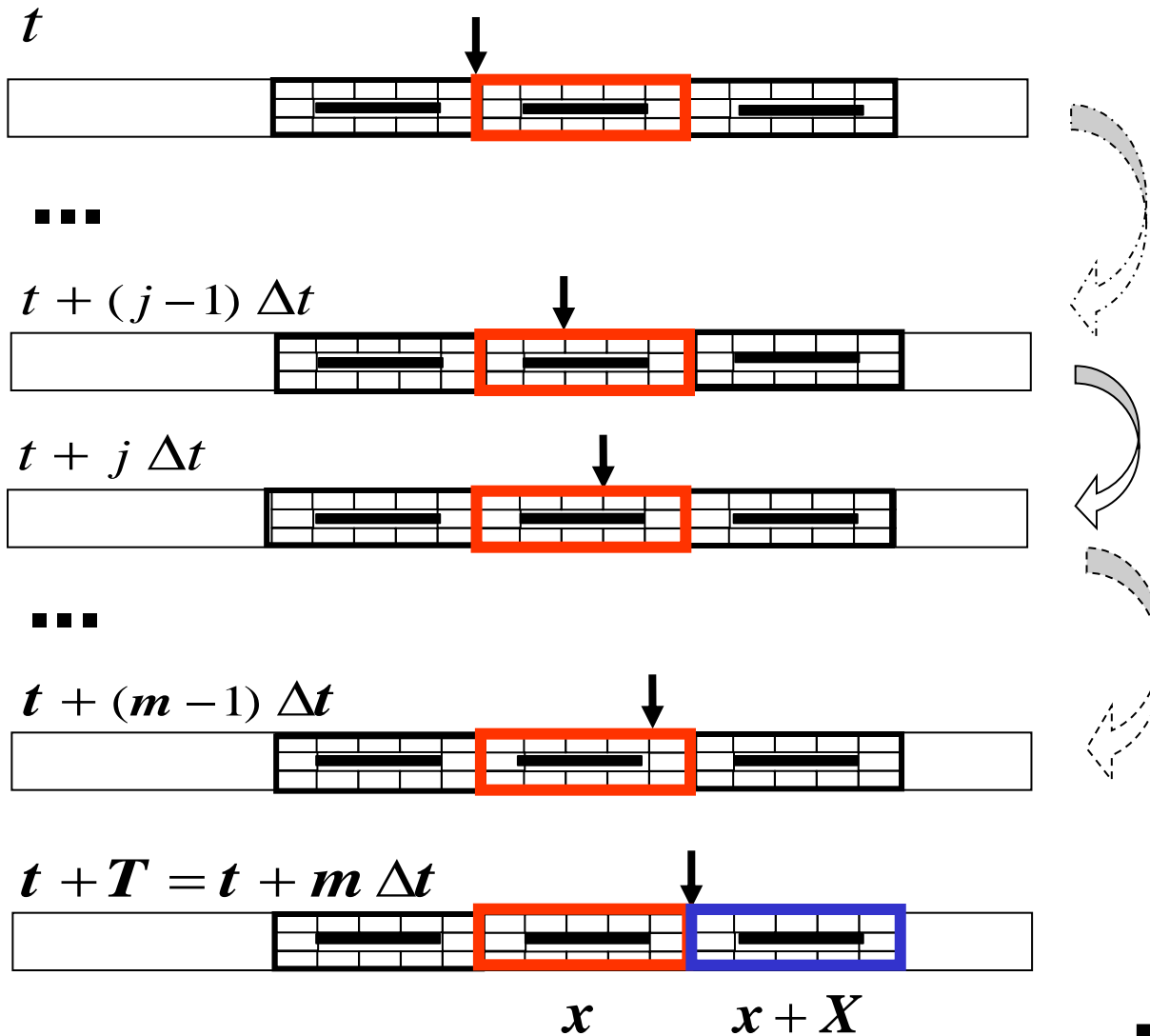
**Idées** : le chargement parcourt uniquement une cellule  $[0,L]$

- ✓ utilisation de la périodicité de le repère lié au chargement.
- ✓ « Grand Incrément de Temps ».

**Principe** : stationarité + grand incrément de temps (la période)

- ✓ construction **sur tout le cycle** (parcourt d'une cellule) des champs cinématiquement et statiquement admissibles.
- ✓ construction **sur tout le cycle** des champs plastiquement admissibles en utilisant la méthode stationnaire

# Algorithme périodique : Principe



Résolution  
"grand incrément"

Propriété de périodicité

Résolution le long  
de lignes de courant

**1. La condition précédente de stationnarité dans le repère du chargement devient une condition de périodicité**

$$\forall t \quad B(x, t) = B(x + X, t + T)$$

T, qui correspond au temps nécessaire au chargement pour parcourir une distance X équivalente à la longueur d'une cellule

**2. La réponse est transitoire sur une période de temps T**

$$\text{Pour } \tau \in [t, t + T] \quad \dot{B}(x, \tau) = \frac{\partial B}{\partial \tau}(x, \tau)$$

- 1. Principe du calcul stationnaire pour le transport de l'état interne entre cellules (ligne de courant, avec microstructure)**
- 2. Principe du grand incrément de temps pour le transitoire sur une cellule**
- 3. Eventuellement, périodicité de l'état limite pour rechercher directement l'état asymptotique**

## Algorithme stationnaire périodique

$j$  position de la charge allant de 1 à  $m$ ,  
( $n-1$ ) point de la cellule amont, homologue du point courant

Si  $j \neq 1$  en posant  $\xi_j^* = \text{dev}\sigma_{j-1} - c\varepsilon_{j-1}^p + 2\mu\Delta(\text{dev}\varepsilon)_j$  on a :

– si  $\|\xi_j^*\| > k$ , il y a plastification

$$\varepsilon_j^p = \varepsilon_{j-1}^p + \frac{1}{2\mu+C} \left(1 - \frac{k}{\|\xi_j^*\|}\right) \xi_j^*$$

– si  $\|\xi_j^*\| \leq k$ , il n'y a pas de plastification

$$\varepsilon_j^p = \varepsilon_{j-1}^p$$

Si  $j = 1$ , en posant  $\xi_1^* = \text{dev}\sigma_{m-1}(\mathbf{x} - X\mathbf{e}_x) - c\varepsilon_{m-1}^p(\mathbf{x} - X\mathbf{e}_x) + 2\mu\Delta(\text{dev}\varepsilon)_1$

– si  $\|\xi_1^*\| > k$ , il y a plastification

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_{m-1}^p(n-1) + \frac{1}{2\mu+C} \left(1 - \frac{k}{\|\xi_1^*\|}\right) \xi_1^*$$

– si  $\|\xi_1^*\| \leq k$ , il n'y a pas de plastification

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_{m-1}^p(n-1)$$

# PLAN

- **Motivation et objectif**

- **Méthodes stationnaires**

Principe des algorithmes eulériens

Algorithmes stationnaires

Détermination de l'état stabilisé

Périodicité de la structure ou du chargement

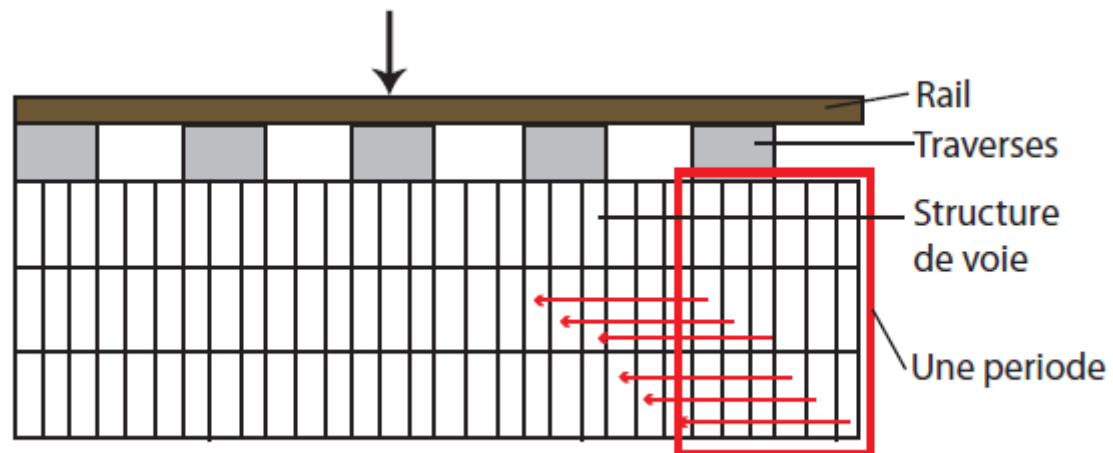
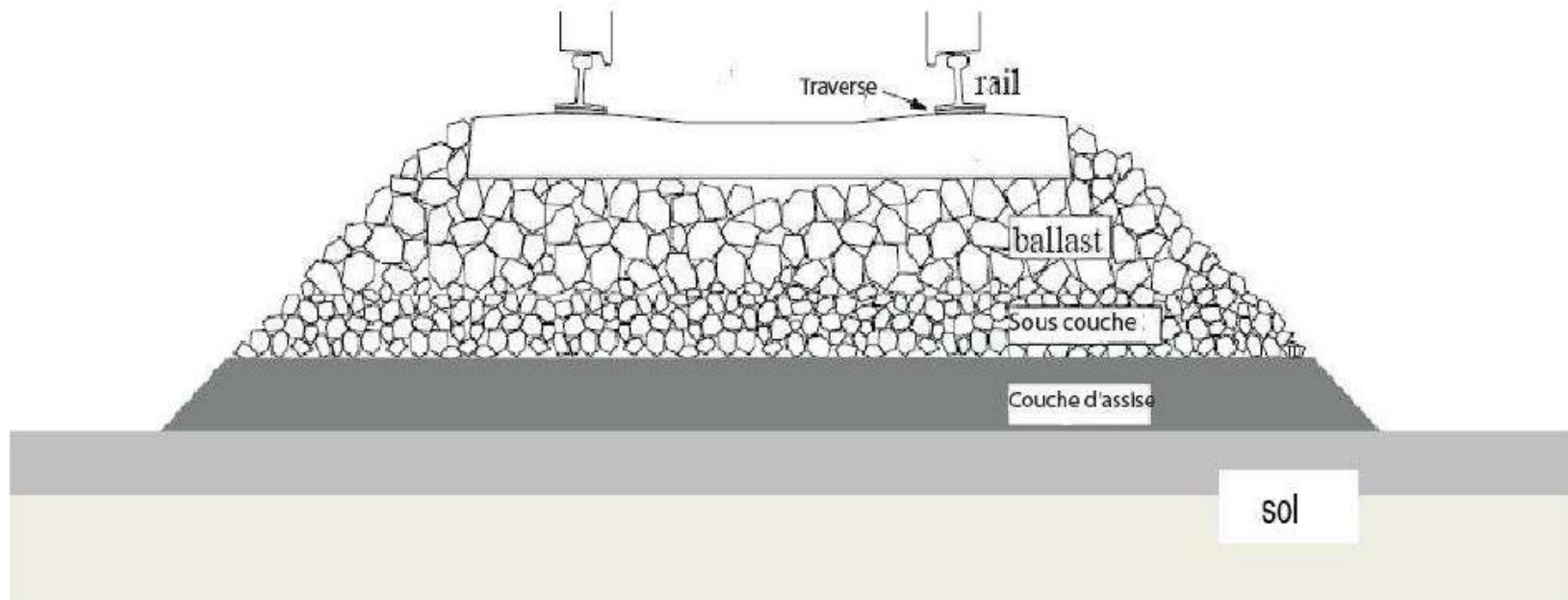
- **Quelques exemples d'application**

Tassement du ballast

Freinage répété



# Tassement du ballast



# Tassement du ballast

Matériau élastoplastique de type Drucker-Prager à écrouissages cinématique linéaire, associé

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad \underline{\underline{X}} = C \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

Fonction de charge  $f: f(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}, p) = \|\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\| + \alpha \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} - k$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p_d + \varepsilon^p_h$$

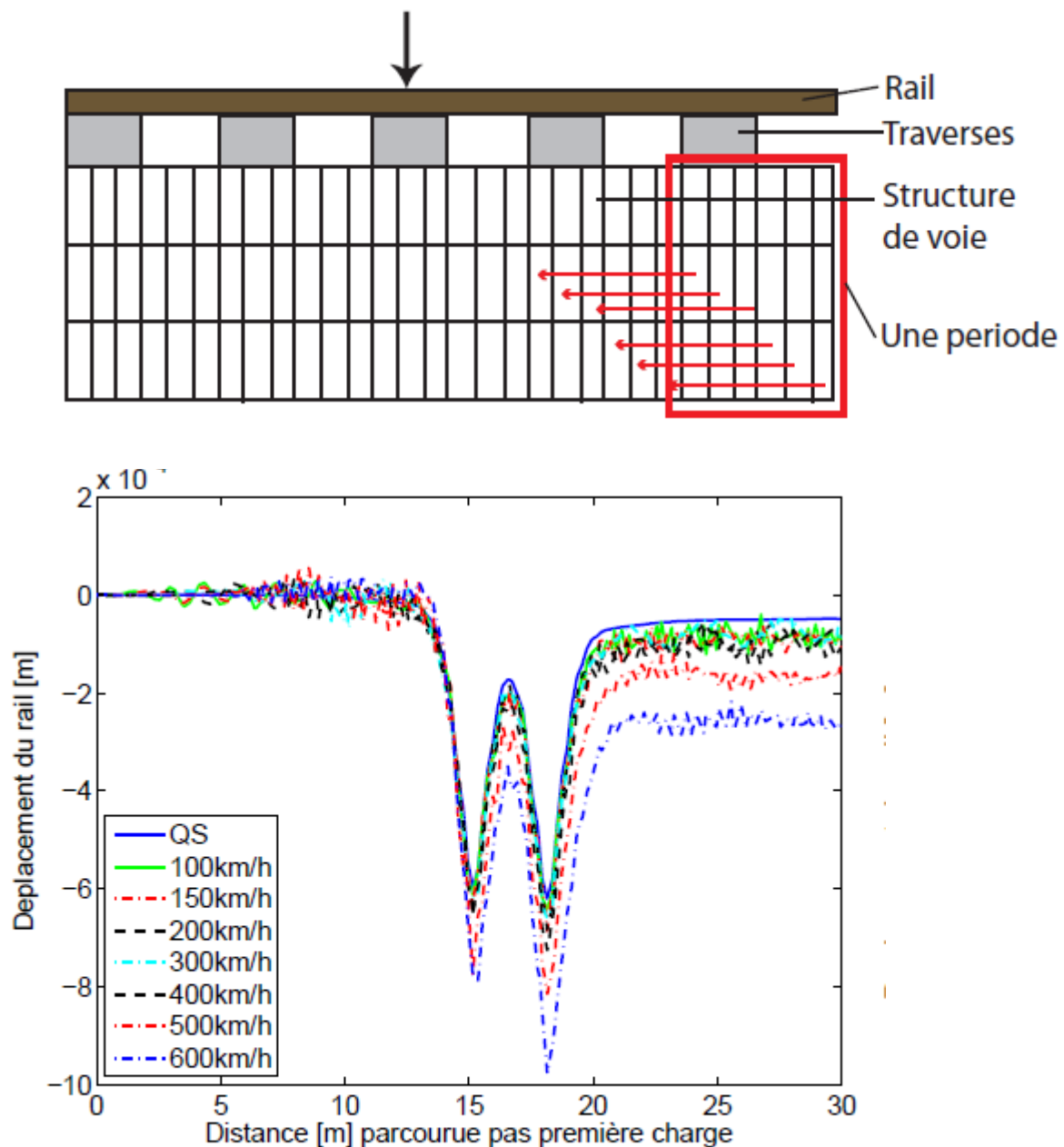
Écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p_d = \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}, p)}{\partial \underline{\underline{s}}} = \lambda \frac{\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}}{\|\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\|} \\ \varepsilon^p_h = \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}, p)}{\partial \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \alpha \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \lambda f = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad f \leq 0$$

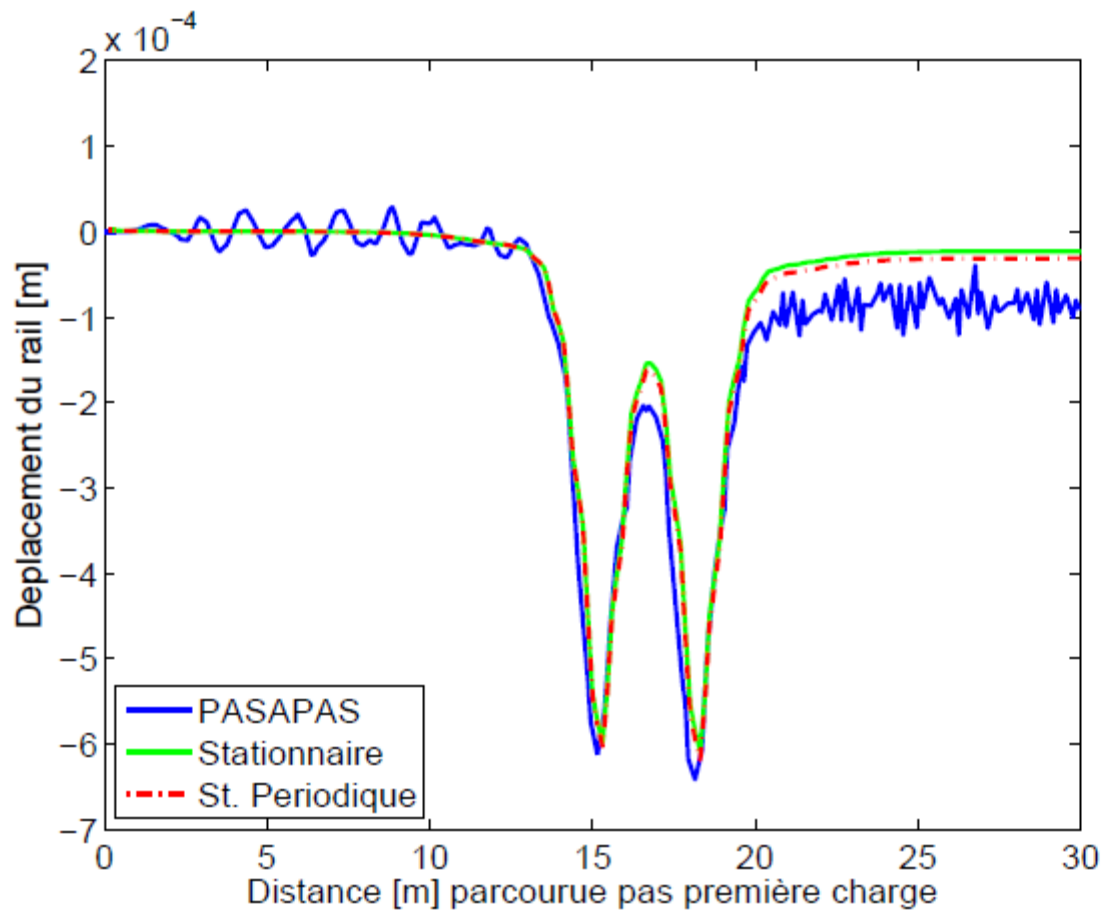
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1}^p = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n^p + \frac{\left\langle \left\| \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}^*} \right\| - \alpha \operatorname{tr} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_{0 \ n+1} + 3\lambda + 2\mu \frac{\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}}{\left\| \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}^*} \right\|} - k \right\rangle}{2\mu \ 1 + \alpha^2 + 3\alpha^2\lambda} \left( \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}^*}}{\left\| \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}^*} \right\|} - \alpha \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right)$$

Prise en compte des termes d'inerties

$$\underline{\underline{\operatorname{div}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) + \rho(\underline{\underline{\mathbf{g}}} - V^2 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\mathbf{u}}}}{\partial x^2}) = \mathbf{0}$$

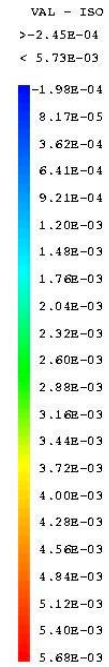
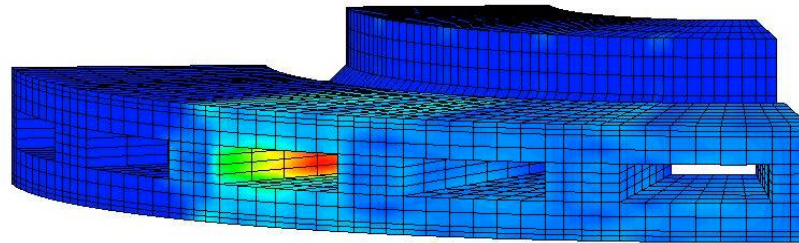


(a) Evolution de la déflexion pour un passage de deux charges



- Comparaison calcul EF classique et stationnaire  $V=100$  km.h (Modèle 3D)

# Déformations plastiques équivalentes au cours du mouvement du chargement le long d'une cellule

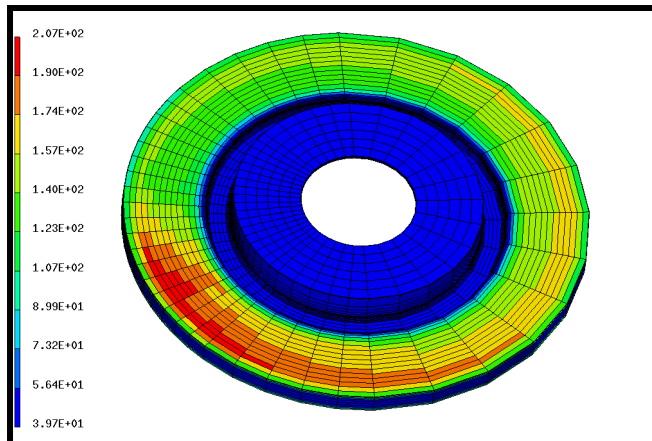


def. plastiques eqv au passage 1, position 8

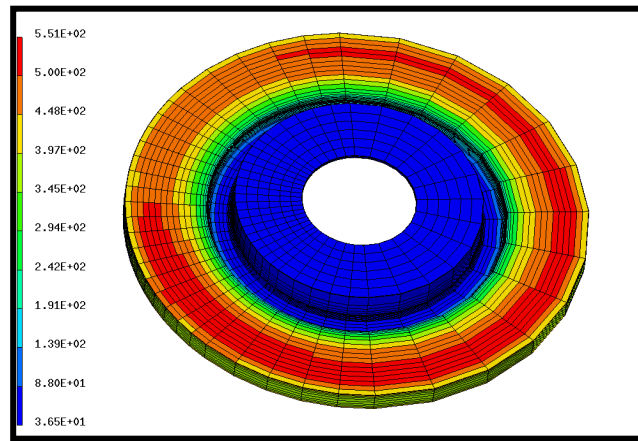
# Transitoire dans le repère du chargement

(MLNT, JJT, HM)

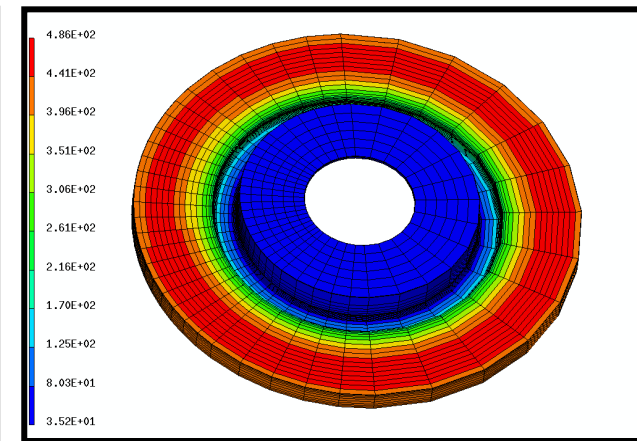
## Application : freinage (MLNT)



Début de freinage



Température maximale



Fin de freinage