

Modèles hyperélastiques dans Cast3M

Application au Caoutchouc

Théorie et programmation UMAT

Laurent GORNET

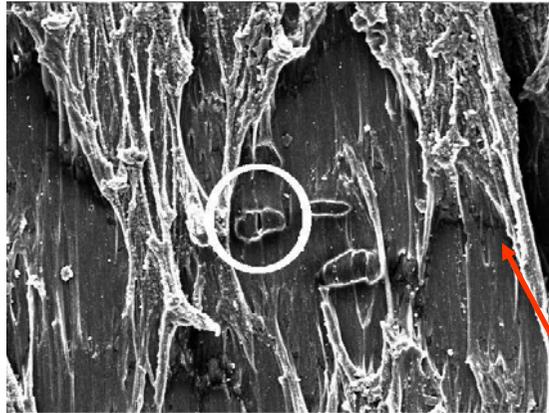
Maître de Conférences HDR

Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, Effet Mullins
- **Conclusion**

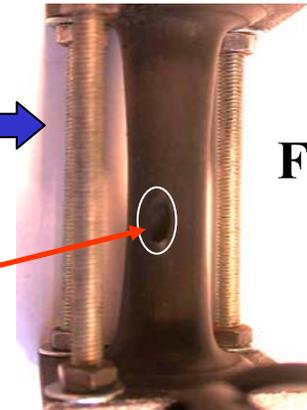
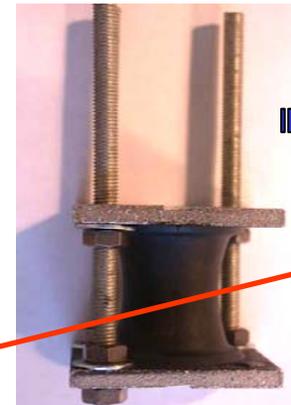
Durabilité des structures

Interaction modèle-expérience



Rupture

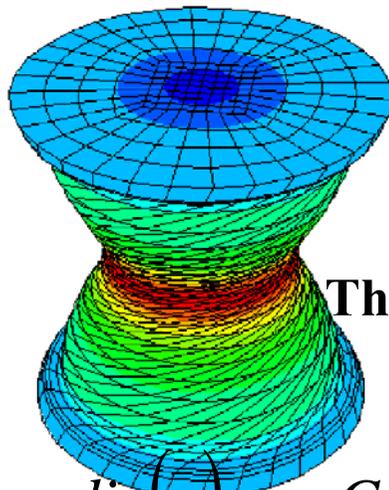
00 μm



Fatigue



Caoutchouc : études multi-échelles

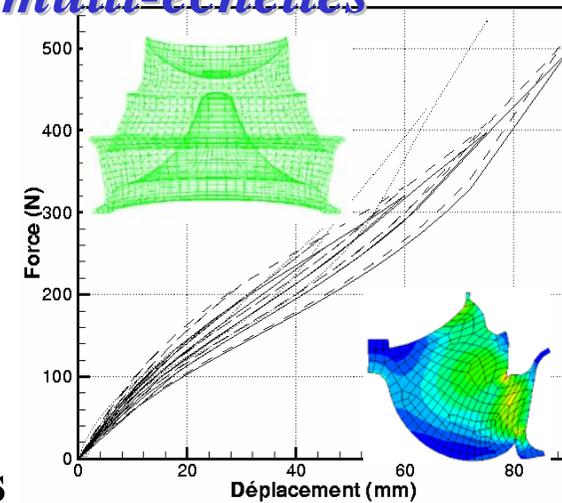


Thermique

$$r - \text{div}(\underline{q}) = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$



Structures

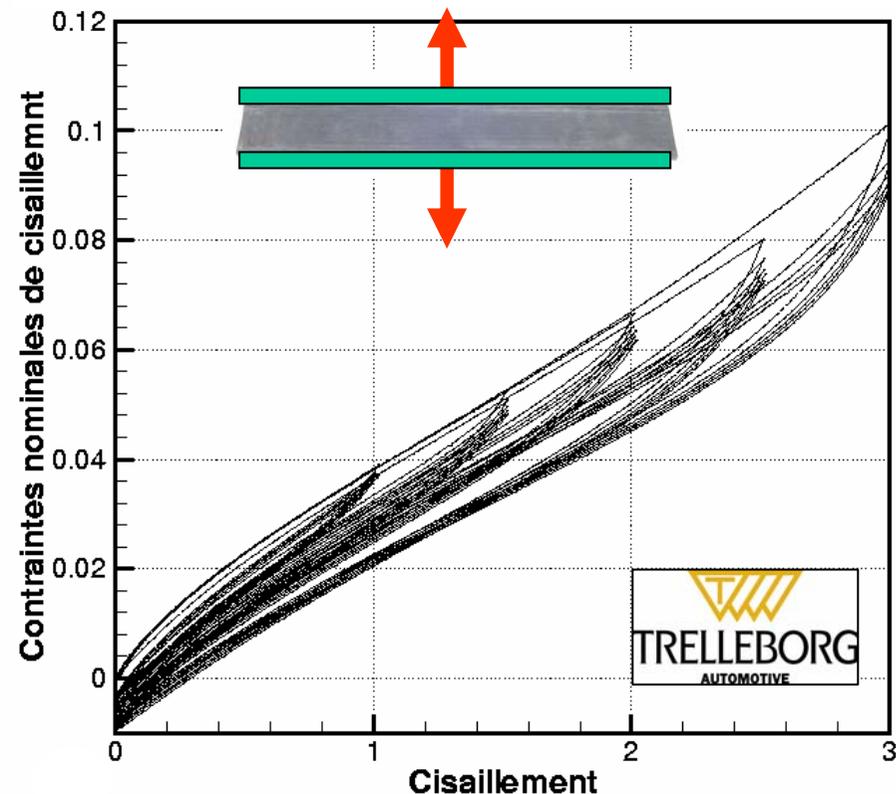
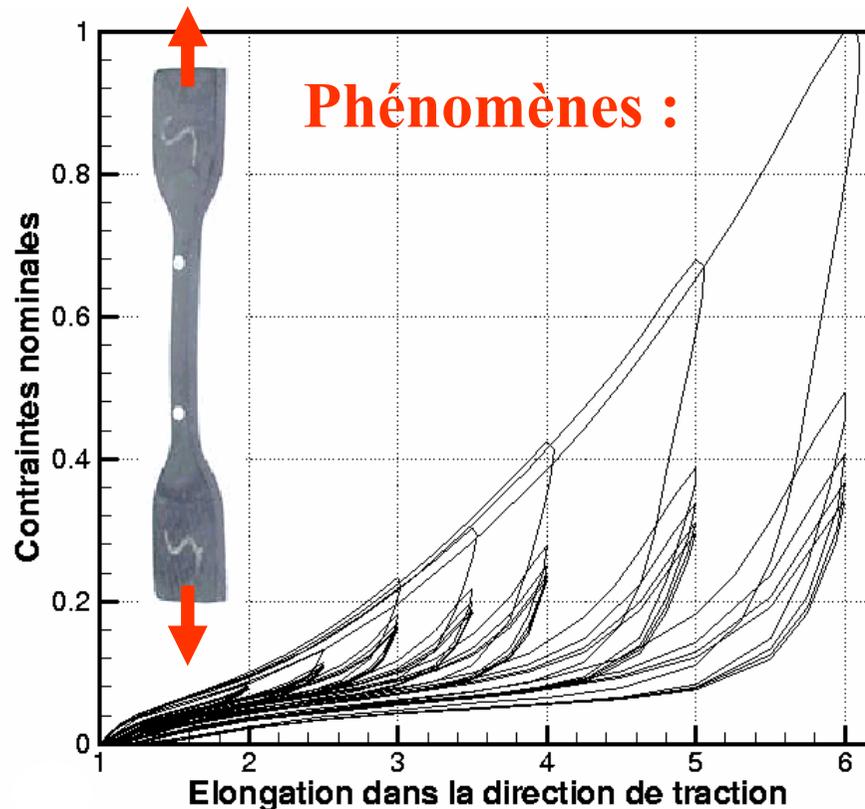


Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, Effet Mullins
- **Conclusion**

Essais sur caoutchoucs

Essais cyclés de traction et de glissement pur



Effet Payne

Hystérésis

Effet Mullins

Modélisations des caoutchoucs

Approche phénoménologique : 1940 - 1975

• Décrire les courbes expérimentales

- Mooney-Rivlin (1940,48) —→ 2 constantes

$$W = \underline{C_1}(I_1 - 3) + \underline{C_2}(I_2 - 3)$$

- Hart-Smith (1967) —→ 3 constantes

$$W = \underline{C_1} \int_0^{I_1-3} \exp(\underline{C_3} I_1'^2) dI_1' + \underline{C_2} \ln \frac{I_2}{3}$$

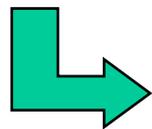
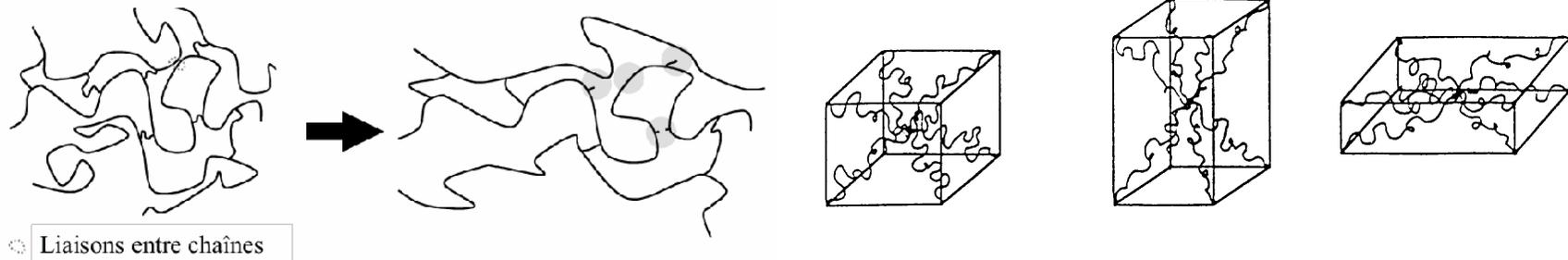
- Ogden (1972) —→ 6 constantes

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{\underline{\mu}_i}{\underline{\alpha}_i} \lambda_1^{\underline{\alpha}_i} + \lambda_2^{\underline{\alpha}_i} + \lambda_3^{\underline{\alpha}_i} - 3$$

Modélisations des caoutchoucs

Approche statistique : 1940, 1990 - ?

- Treloar (1943) , James et Guth (1947)
- Arruda et Boyce (1993)
- modèle tube (1997)
- Marckmann *et al.* (2002)



échec dans les années 40, retour aujourd'hui

Néohookien

Approche statistique (1940)

- Energie de déformation
- Statistique Gaussienne

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad C_{10} = 0.5NkT$$

- N: nombre de chaine moléculaire par unité de volume
- K: constante de Boltzmann
- T: température absolue

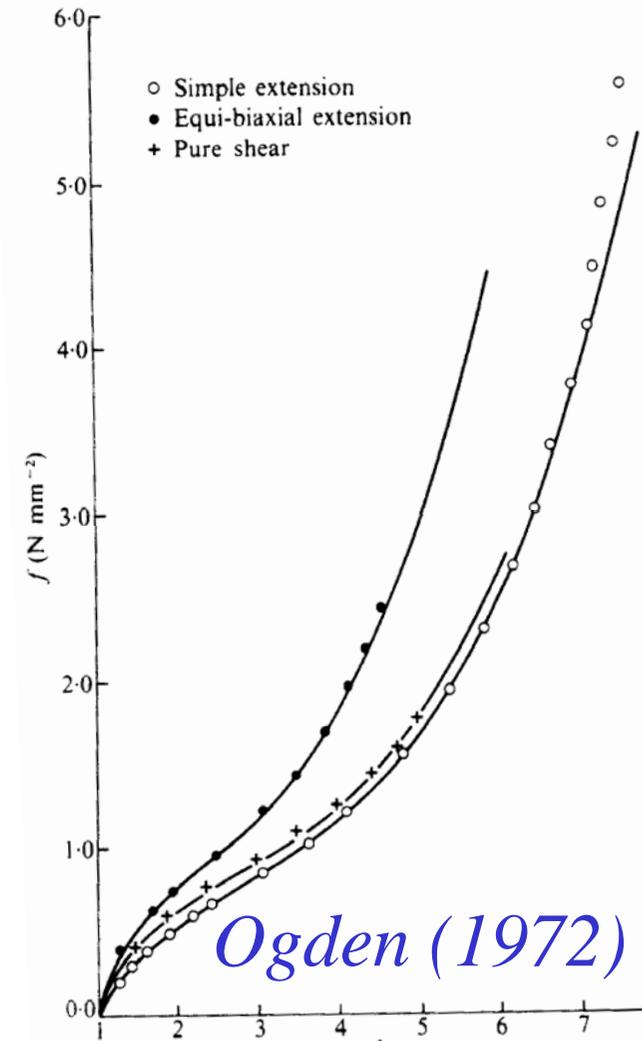
Mooney Rivlin

Approche phénoménologique (1948)

- Matériau incompressible
- Isotrope dans l'état non déformé
- Comportement linéaire :
 - cisaillement simple
- Energie de déformation :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_2 - 3)$$

- Caoutchouc naturel vulcanisé
 - Traction simple
 - Traction Equi-Biaxiale
 - Glissement pur
- Modèle Néo-hookien
- Paramètres Mooney-Rivlin
 - $C_1 = 0.183$ MPa
 - $C_2 = 0.0034$ MPa



Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, Effet Mullins
- **Conclusion**

Code E.F. CAST3M

Atelier logiciel Castem

- Langages développeur : *GIBI + ESOPE*
 - Opérateurs développés en *ESOPE*
 - fortran + Gestion dynamique de la mémoire
- Langage utilisateur : *GIBIANE*
 - Maillages, calculs E.F. , procédures
 - Procédures développées en *GIBIANE*

Atelier logiciel Cast3M calculs sous *GIBI*

- Procédure *GIBIANE!*
 - Créations de nouveaux développements
 - Personnaliser son code E.F.

ABAQUS-UMAT

Fortran 77

- *SUBROUTINE MOONEY* (**STRESS**,
STATEV, *DDSDDE*, SSE, SPD, SCD,RPL,
DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, *STRAN*,
DSTRAN, TIME, DTIME,TEMP, DTEMP,
PREDEF, DPRED,CMNAME, NDI, NSHR,
NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS,
COORDS,DROT, PNEWDT, CELENT,
DFGRD0, **DFGRD1**,NOEL, NPT, LAYER,
KSPT, KSTEP, KINC)

UMAT

implémentation d'un modèle

- Loi de comportement (toto.eso)
 - Eso2For : toto.f, toto.o
- Modification de la UMAT (umat.eso)
 - Eso2For : umat.f, umat.o
- Fabrication de l'exécutable Cast3M
- L'exemple : test-toto.dgibi
 - Solutions analytiques ! ?

MODE

LCMAT = MOTS 'YOUN' 'NU '
'C10' 'C20' 'DINF' 'ETHA';

LCVAR = MOTS 'D ' ;

MO = MODE SU 'MECANIQUE' 'ELASTIQUE'
'ISOTROPE' 'NON_LINEAIRE'
'UTILISATEUR' 'NUME_LOI' 9
'C_MATERIAU' LCMAT 'C_VARINTER'
LCVAR ;

MATE

```
MA = MATE MO 'YOUN' YU 'NU ' XNU  
'C10' C1 'C20' C2 'DINF' DD 'ETHA' ETH  
;
```

*Initialisation des variables internes

```
chpD0i = MANU CHML MO 'D ' 0.0  
'STRESSES' 'TYPE' 'VARINTER' ;
```

PASAPAS

```
TAB1 = TABLE;  
TAB1.'VARIABLES_INTERNES' = TABLE ;  
TAB1.'VARIABLES_INTERNES'. 0 = chpD0i ;  
TAB1 . GRANDES_DEFORMATIONS = VRAI ;  
TAB1 . MODELE = MO;  
TAB1 . CARACTERISTIQUES = MA ;  
TAB1 . CHARGEMENT = CH1 ;  
TAB1 . TEMPS_CALCULES = PR1;  
TAB1 . 'TEMPS_SAUVES' = PR2;  
PASAPAS TAB1 ;
```

Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, Effet Mullins
- **Conclusion**

Traction

Solution analytique Mooney-Rivlin



$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad [B] = F F^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

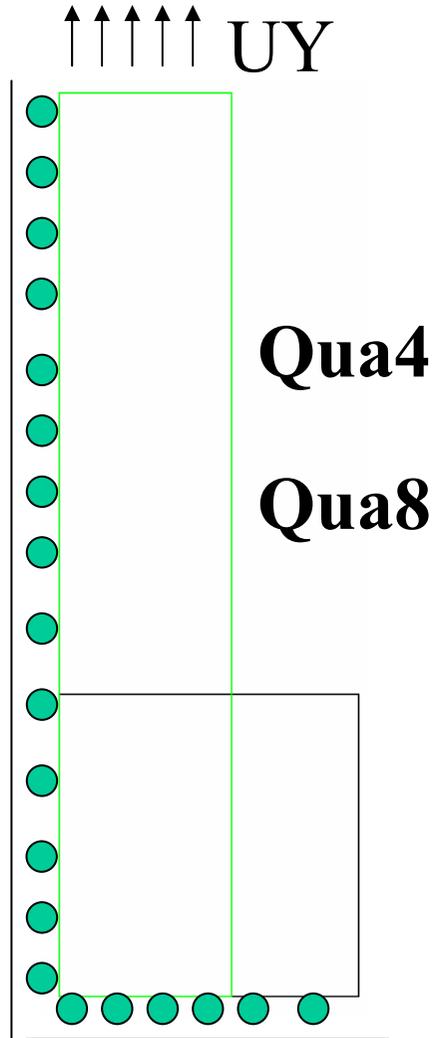
$$[\sigma] = \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) [B] - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [B]^2 - p[I]$$

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}[B] = \lambda^2 + 2/\lambda \\ I_2 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\text{tr}[B])^2 - \text{tr}[B]^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2} + 2 \cdot \lambda \\ I_3 = \det[B] = 1 \end{cases} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$$

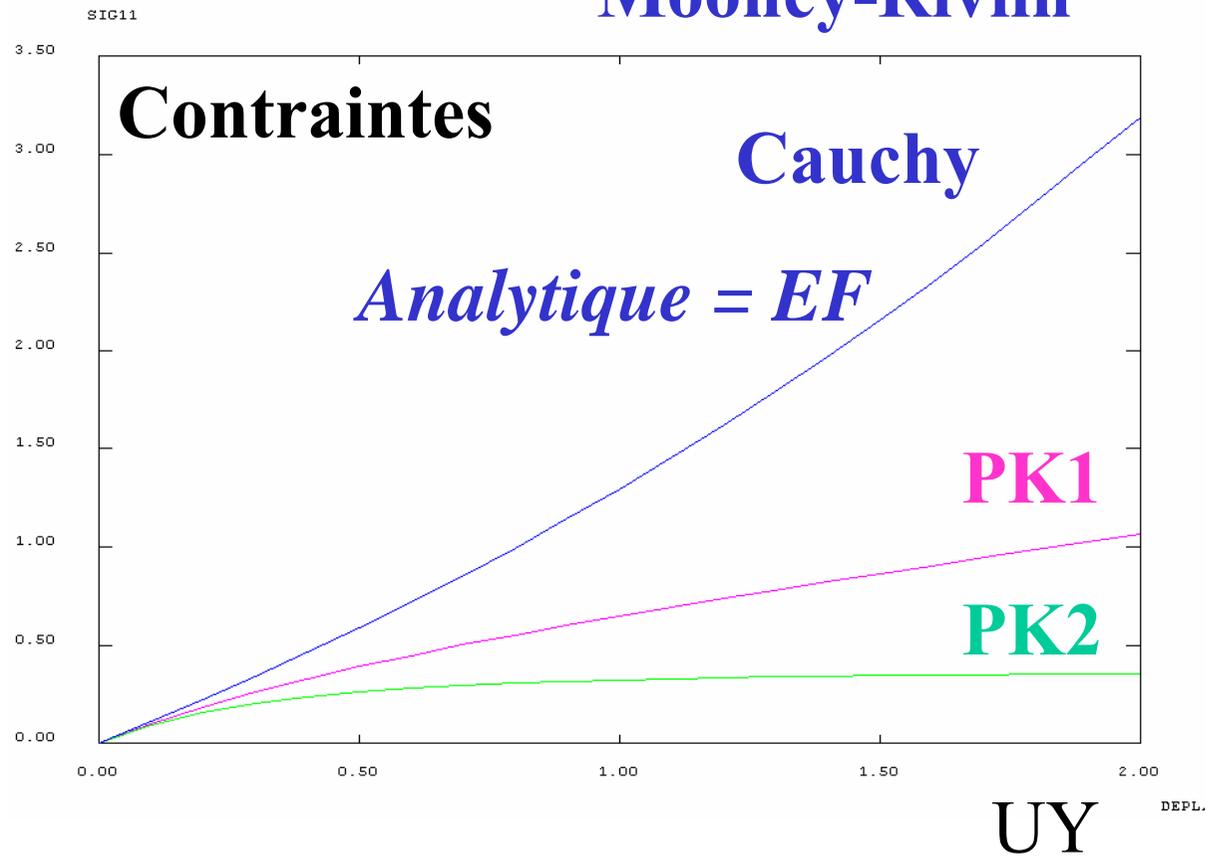
$$\sigma = 2 \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_1 + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) C_2 \right]$$

Traction

Contrainte plane

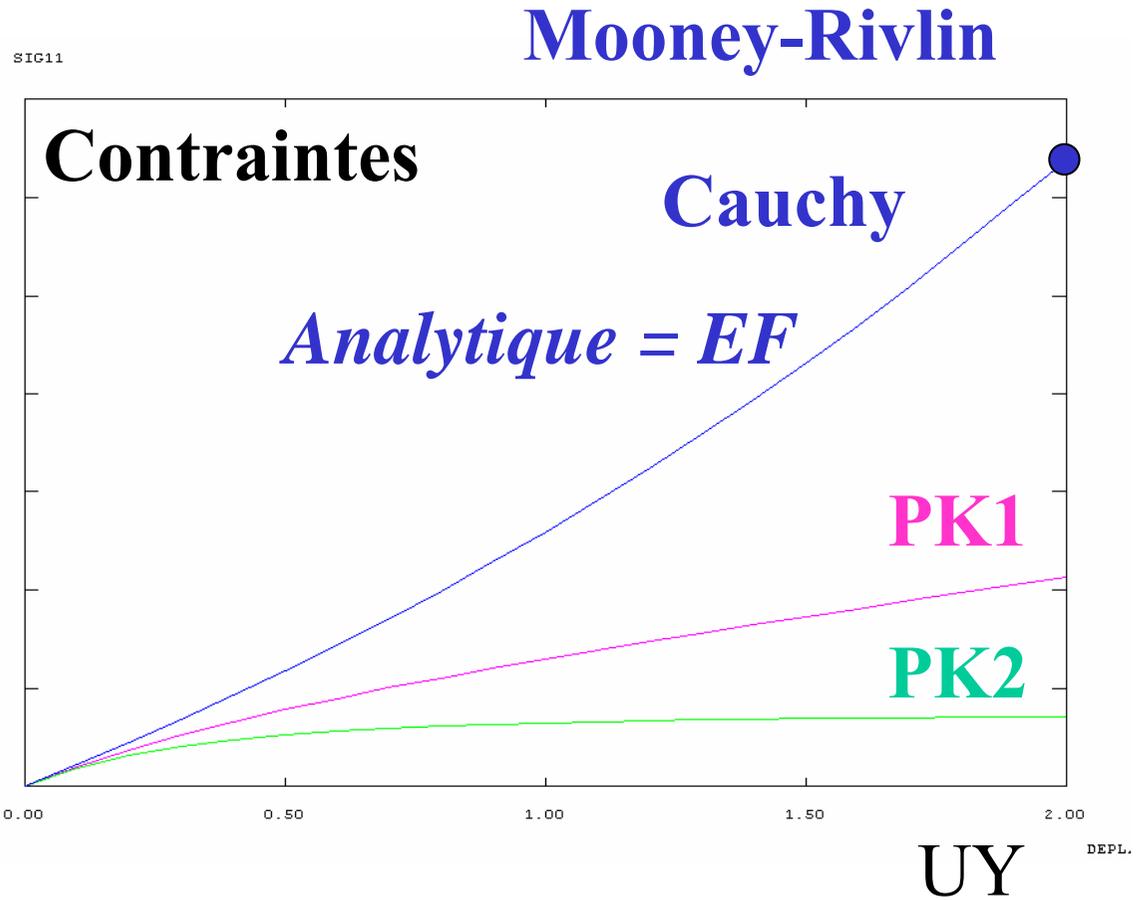
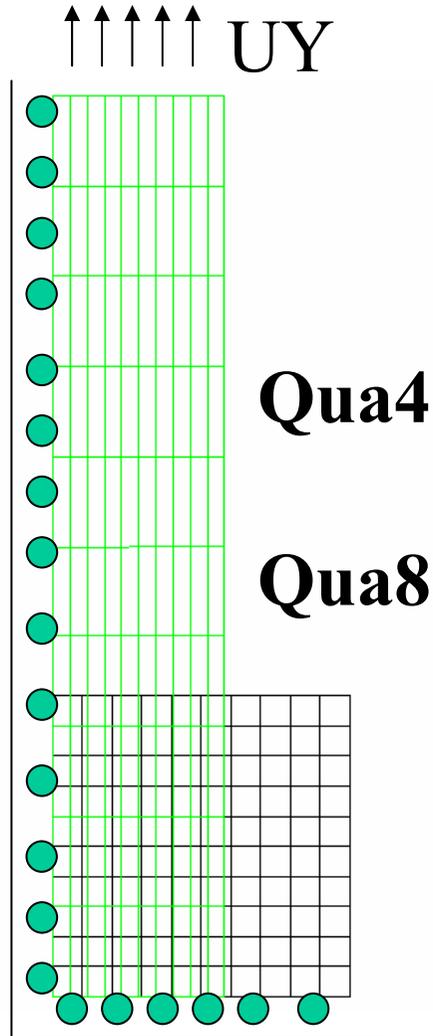


Mooney-Rivlin



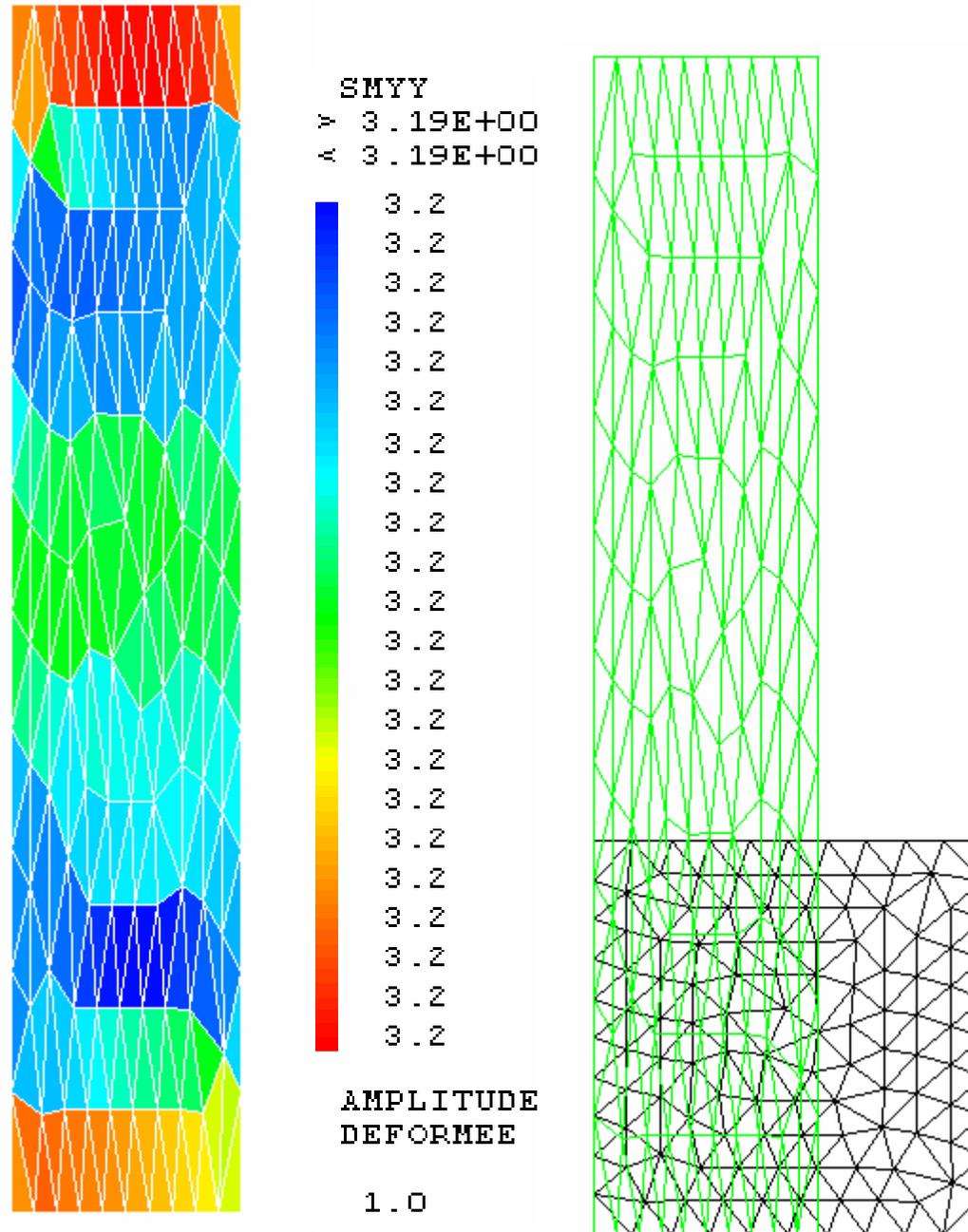
Traction

Contrainte plane

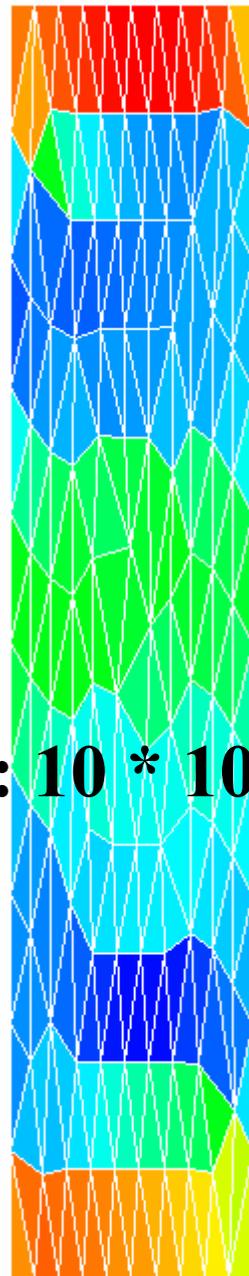


Tri3

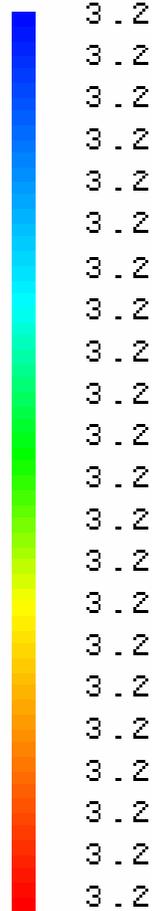
Sans problème !



Tri6
Eléments : 10 * 10

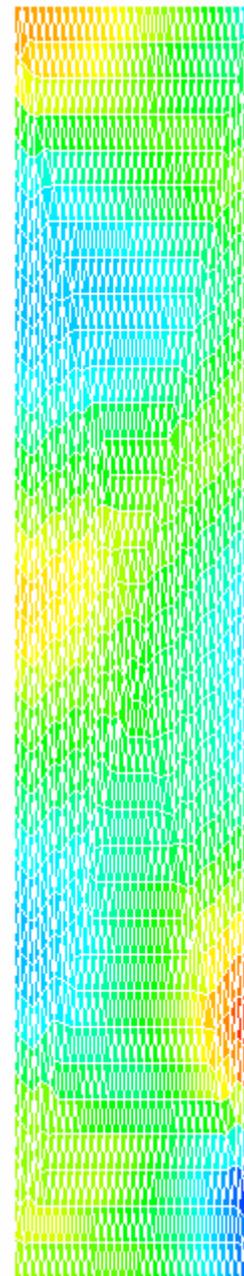


VONMISES
Y 3.19E+00
X 3.19E+00

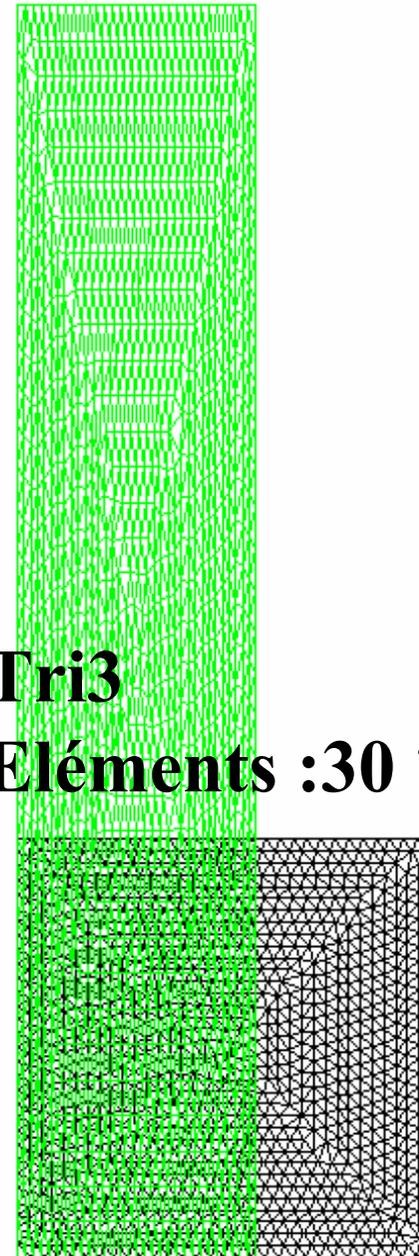


AMPLITUDE
DEFORMEE

1.0

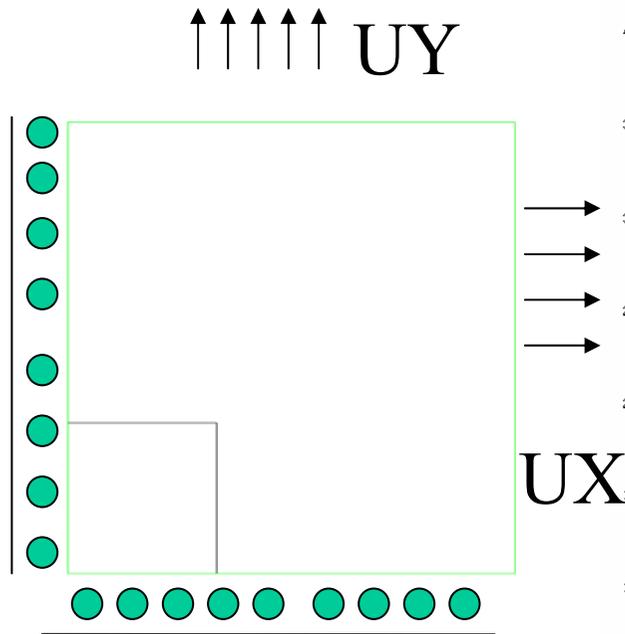


Tri3
Eléments : 30 * 30



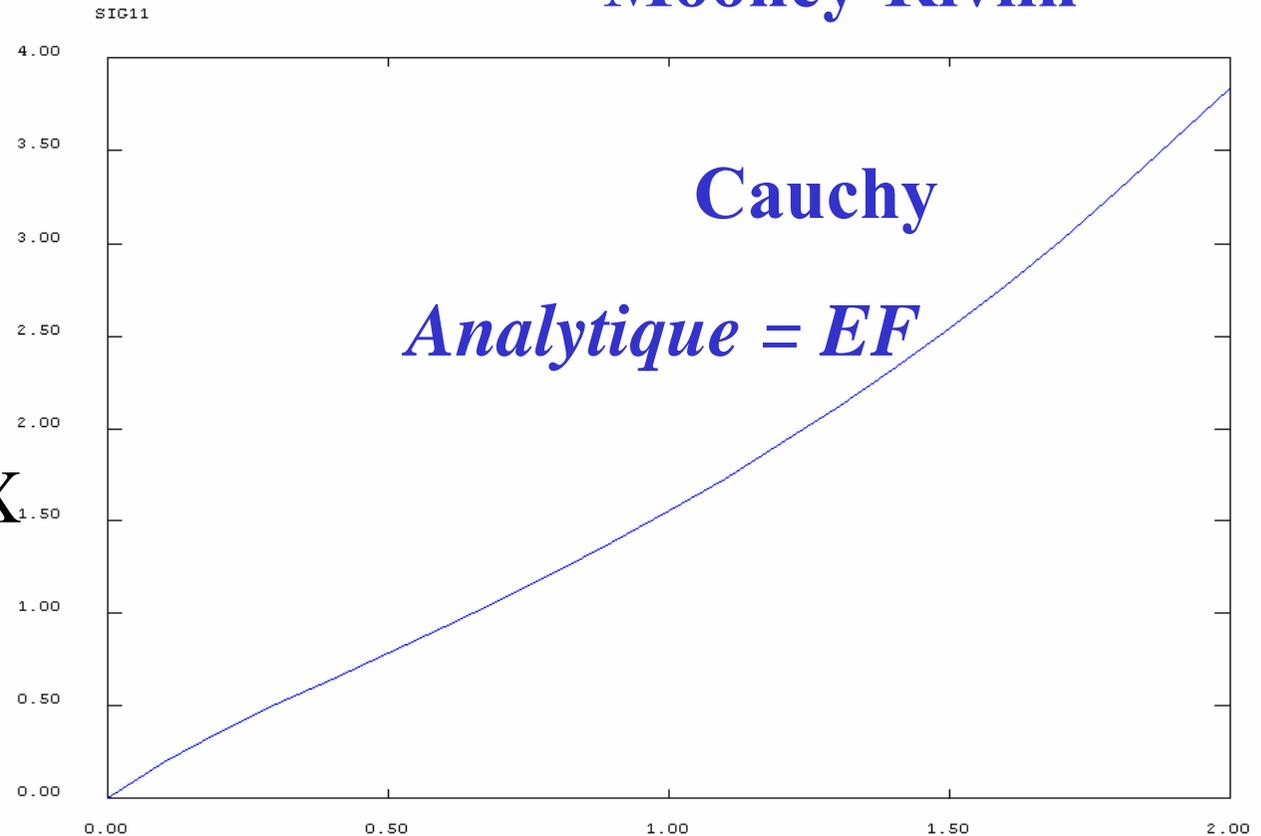
Traction biaxiale

Mooney-Rivlin



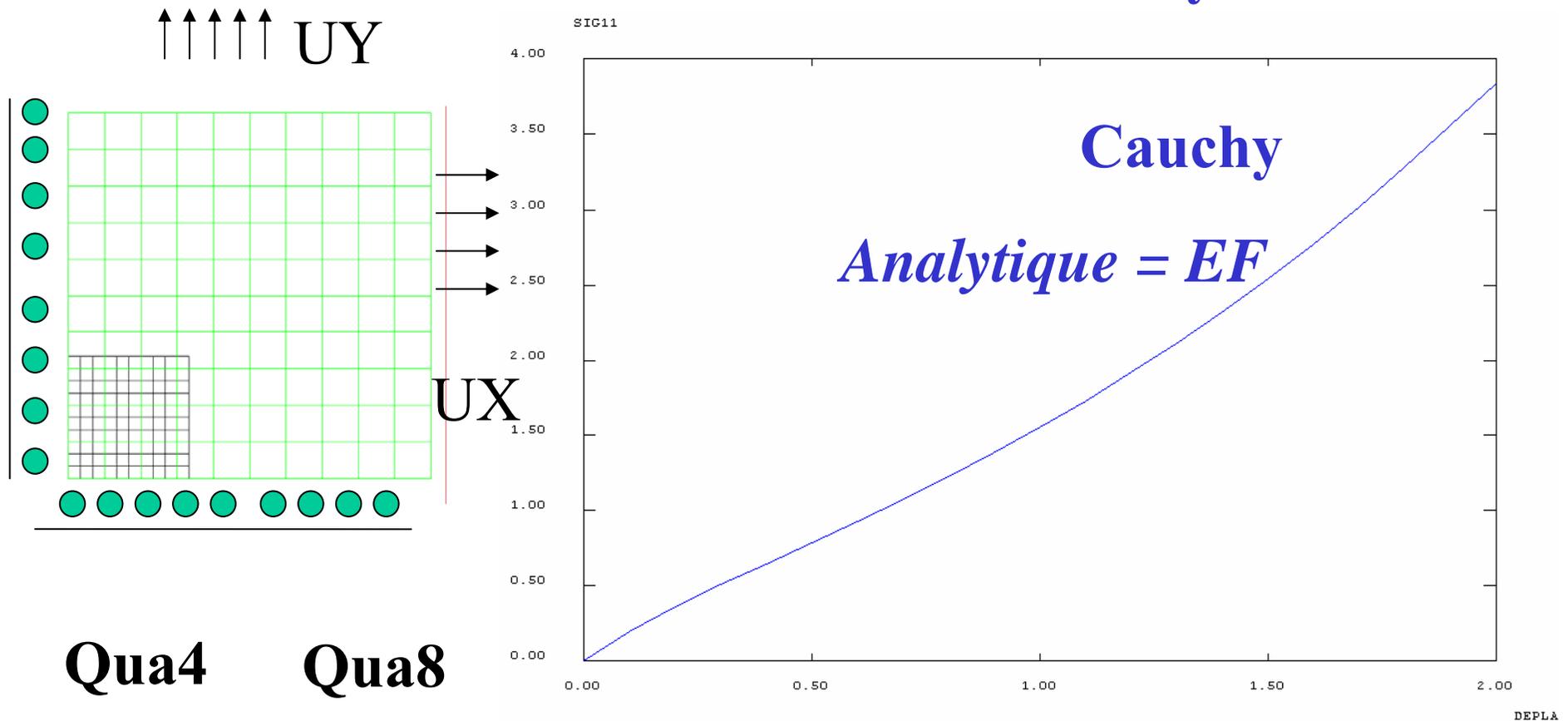
Qua4

Qua8



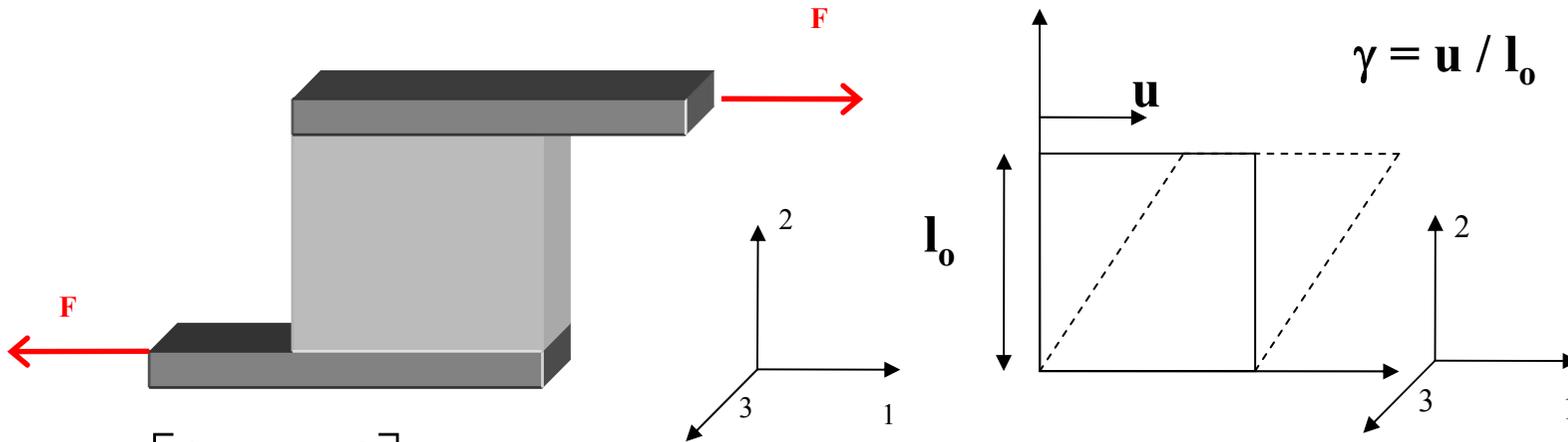
Traction biaxiale

Mooney-Rivlin



Glissement simple

Solution analytique 1/2



$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = F^T F = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}[B] = 3 + \gamma^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\text{tr}[B])^2 - \text{tr}[B]^2 \right\} = 3 + \gamma^2 \\ I_3 = \det[B] = 1 \end{cases}$$

Glissement simple

Solution analytique Mooney-Rivlin 2/2

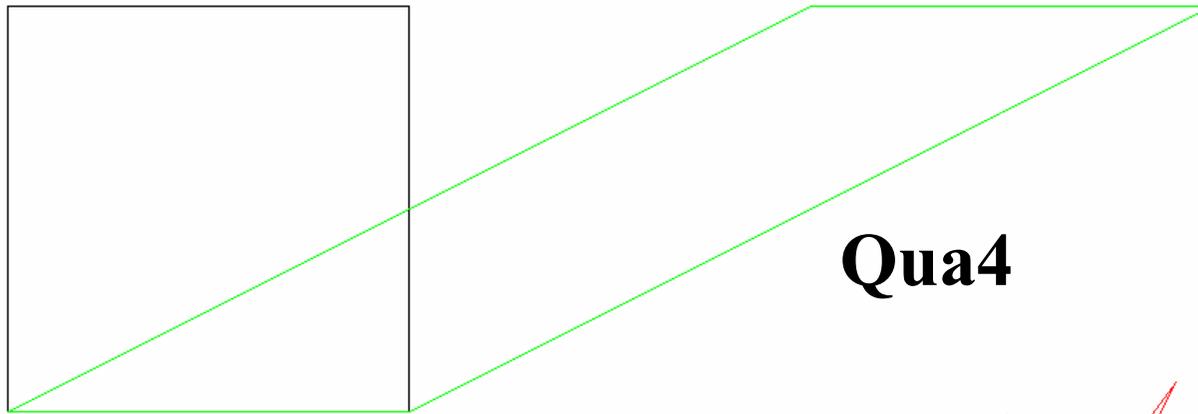
$$[\sigma] = \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) [B] - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [B]^2 - p[I]$$

$$\sigma_{33} = 0 \longrightarrow p = 2.[C_1 + (2 + \gamma^2).C_2]$$

$$\sigma_{11} = 2 C_1 \gamma^2 \quad \sigma_{22} = -2 C_1 \gamma^2 \quad \sigma_{12} = 2.(C_1 + C_2).\gamma$$

Un élément linéaire

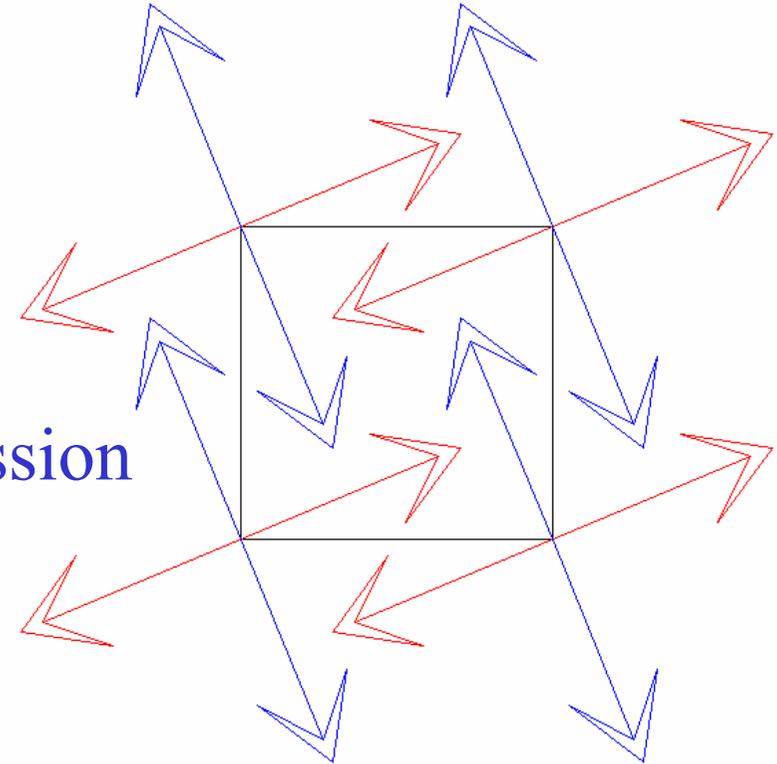
Solution analytique EF



Qua4

Traction

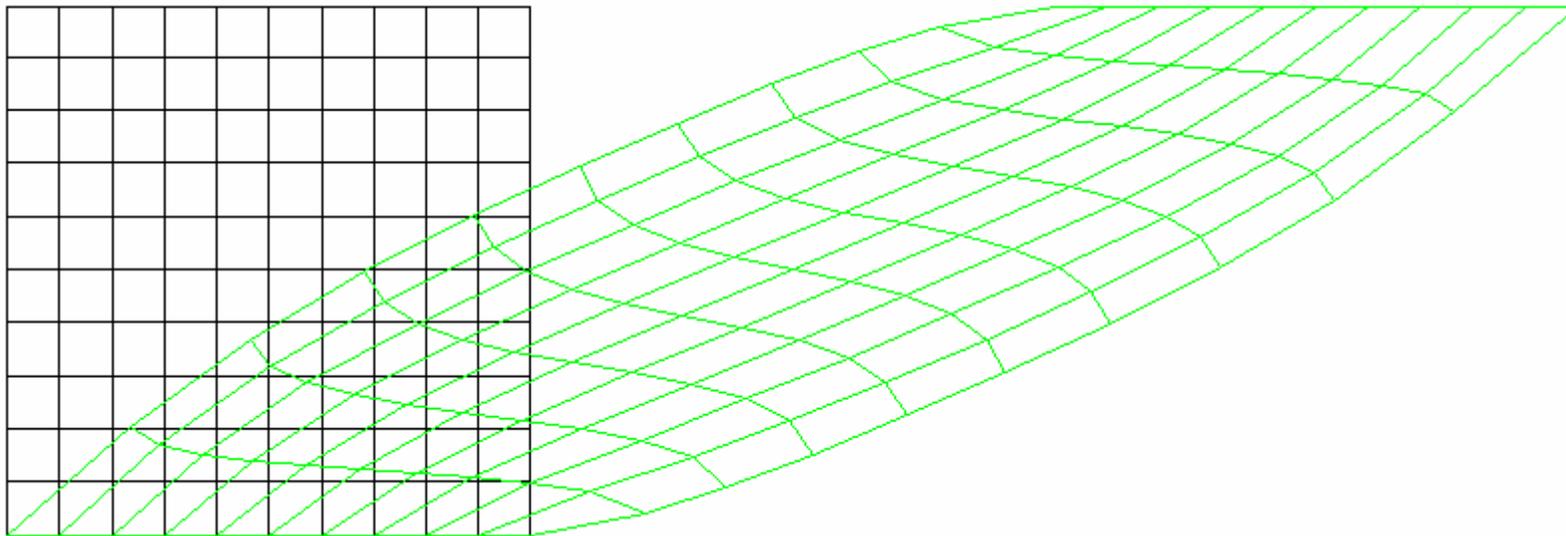
Compression



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{bmatrix}$$

$$\sigma = (C_1 - C_2)\gamma^2 + (C_1 + C_2)|\gamma|\sqrt{\gamma^2 + 4}$$

Cisaillement simple

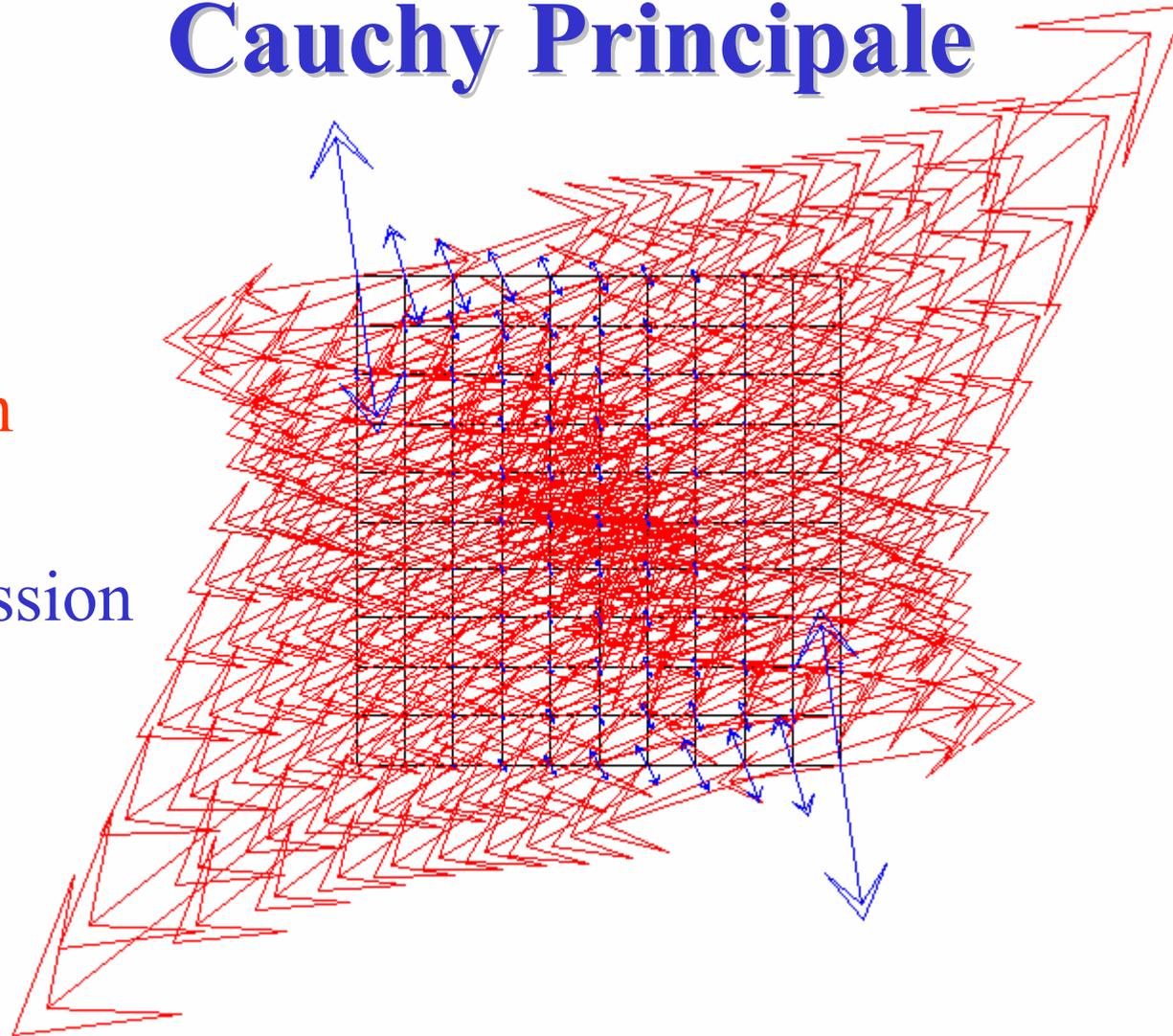


Qua4 Qua8

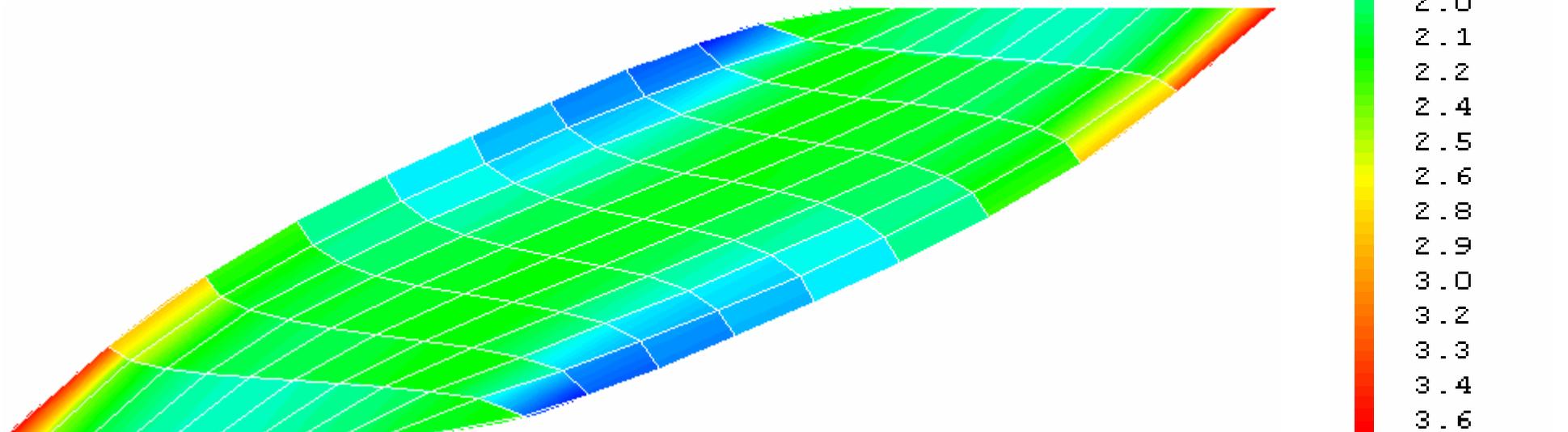
Cauchy Principale

Traction

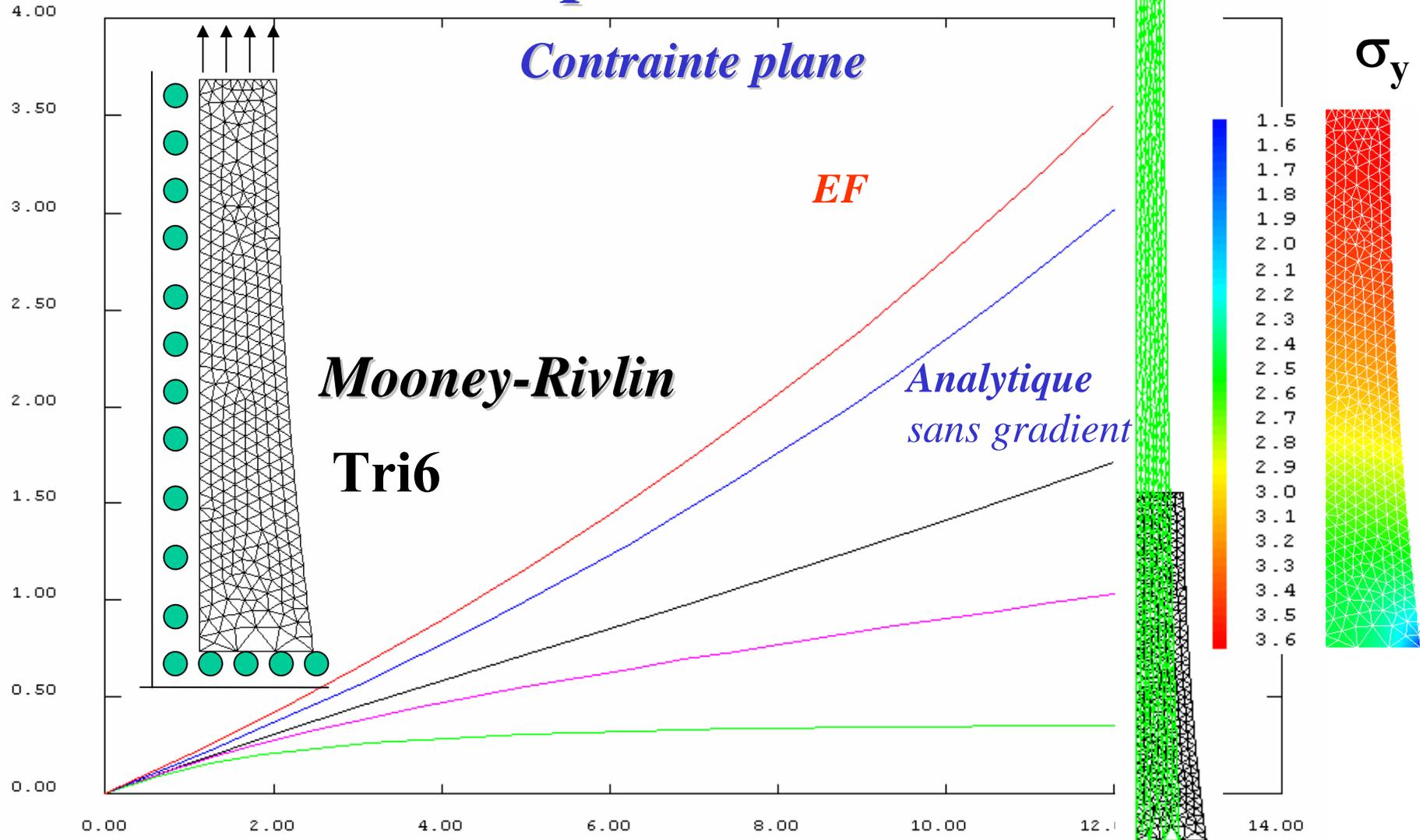
Compression



Von Mises



Éprouvette



Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, Effet Mullins
- **Conclusion**

NéoHookien

Quasi incompressible 3D

- Densité d'énergie $W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2$
 $C_1 = 1 \text{ MPa}, D=10^{-4}$
- Fonction de pénalisation (Simo 1988)
- Cas général $W = \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U(J)$

Fonctions de pénalisation

La bibliographie

$$W = \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U(J)$$

$$\lim_{J \rightarrow 0} U = +\infty$$

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} U = +\infty$$

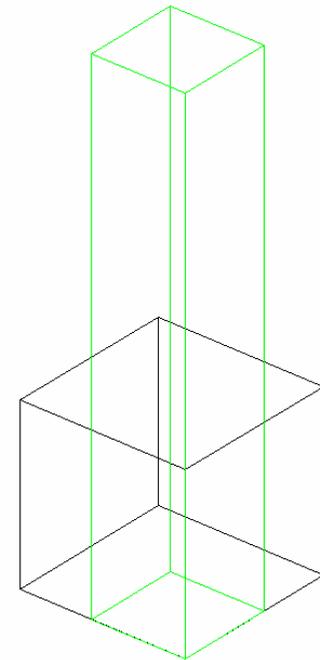
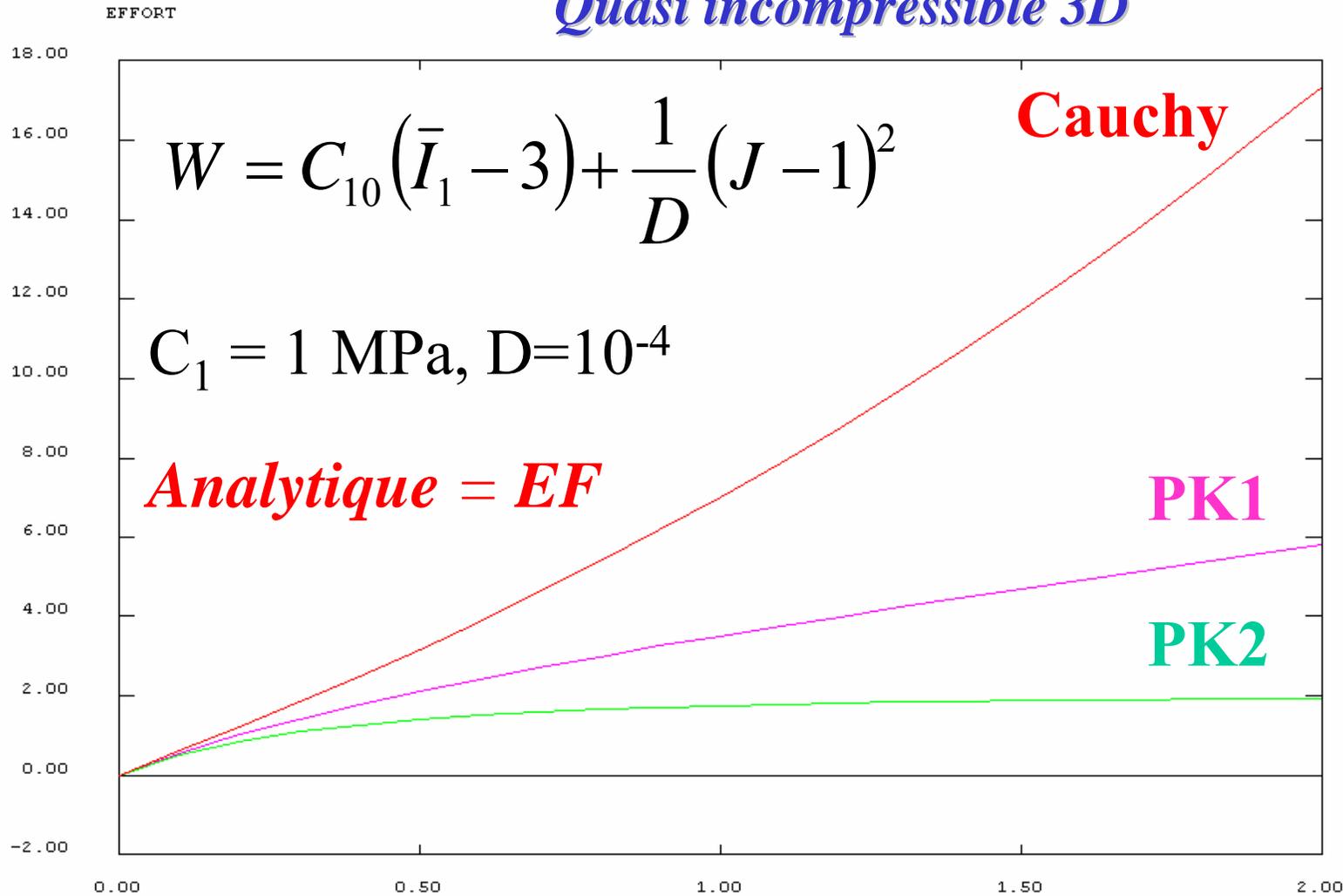
$$\lim_{J \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial J} = -\infty$$

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \frac{\partial U}{\partial J} = +\infty$$

Référence	
Simo (1988); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = \frac{K}{2}(J-1)^2$
Valanis et Landel (1967)	$U(J) = K \frac{(\ln J)^2}{2}$
Simo et Taylor (1982); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = K \frac{(J-1)^2 + (\ln J)^2}{4}$
Ogden (1972); Kaliske et Rothert (1997b)	$U(J) = K\theta^2(\theta \ln J + J^{-\theta} - 1)$
Liu <i>et al.</i> (1992, 1994)	$U(J) = K(J \ln J - J + 1)$
Simo et Pister (1984)	$U(J) = \frac{1}{2}\lambda(\ln J)^2 - \mu \ln J$
Doll et Schweizerhof (2000)	$U(J) = K \frac{\exp(J-1) - \ln J - 1}{2}$
Doll et Schweizerhof (2000)	$U(J) = K(J-1) \ln \frac{J}{2}$
Kaliske et Rothert (1999)	$U(J) = \frac{K}{2} \left(\frac{J^2-1}{2} - \ln J \right)$

Essai de Traction

Quasi incompressible 3D

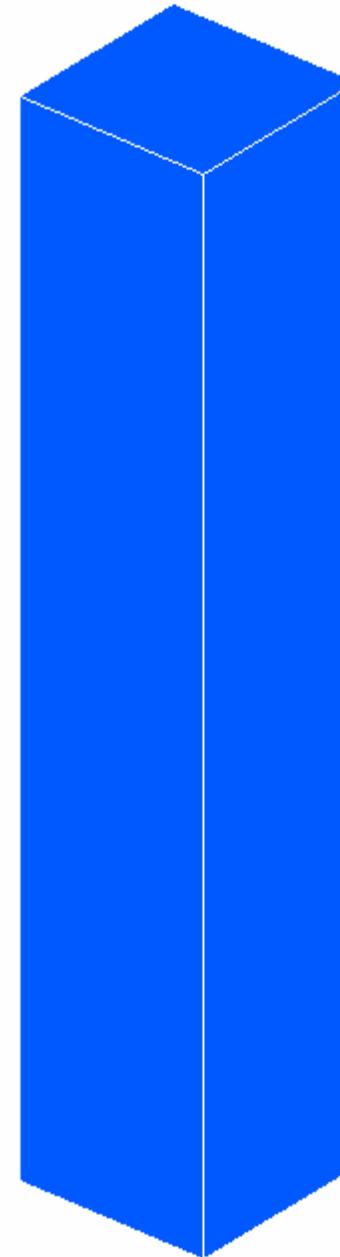
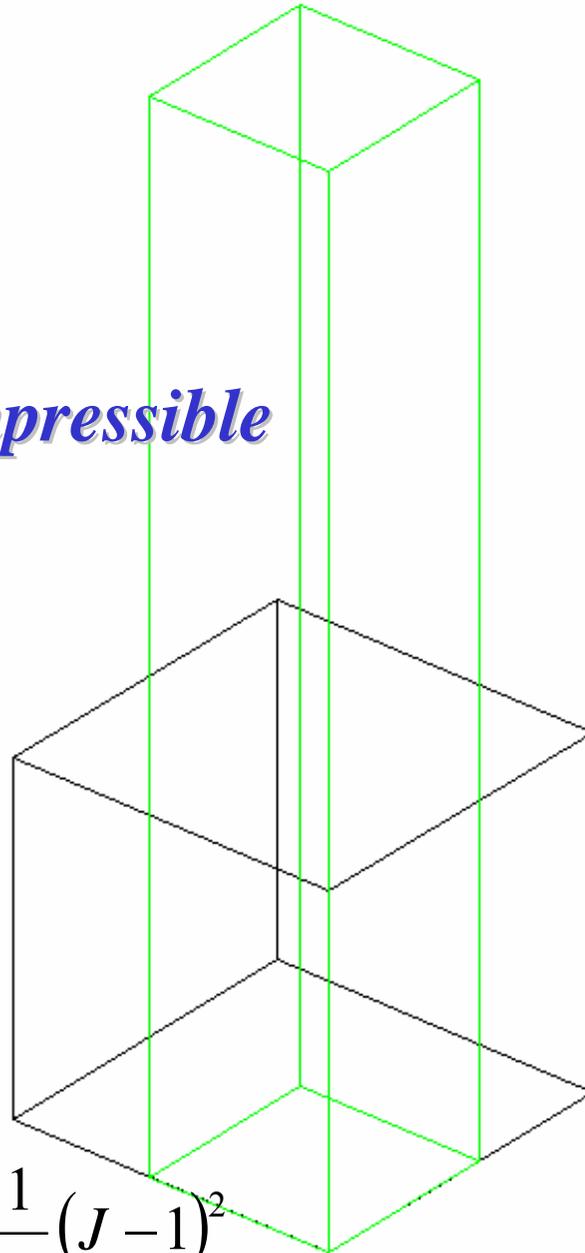


CUB8

UY

Néohookien
Quasi incompressible

CUB8



SMZ2
 > 1.73E+01
 < 1.73E+01



17.

AMPLITUDE
 DEFORMEE

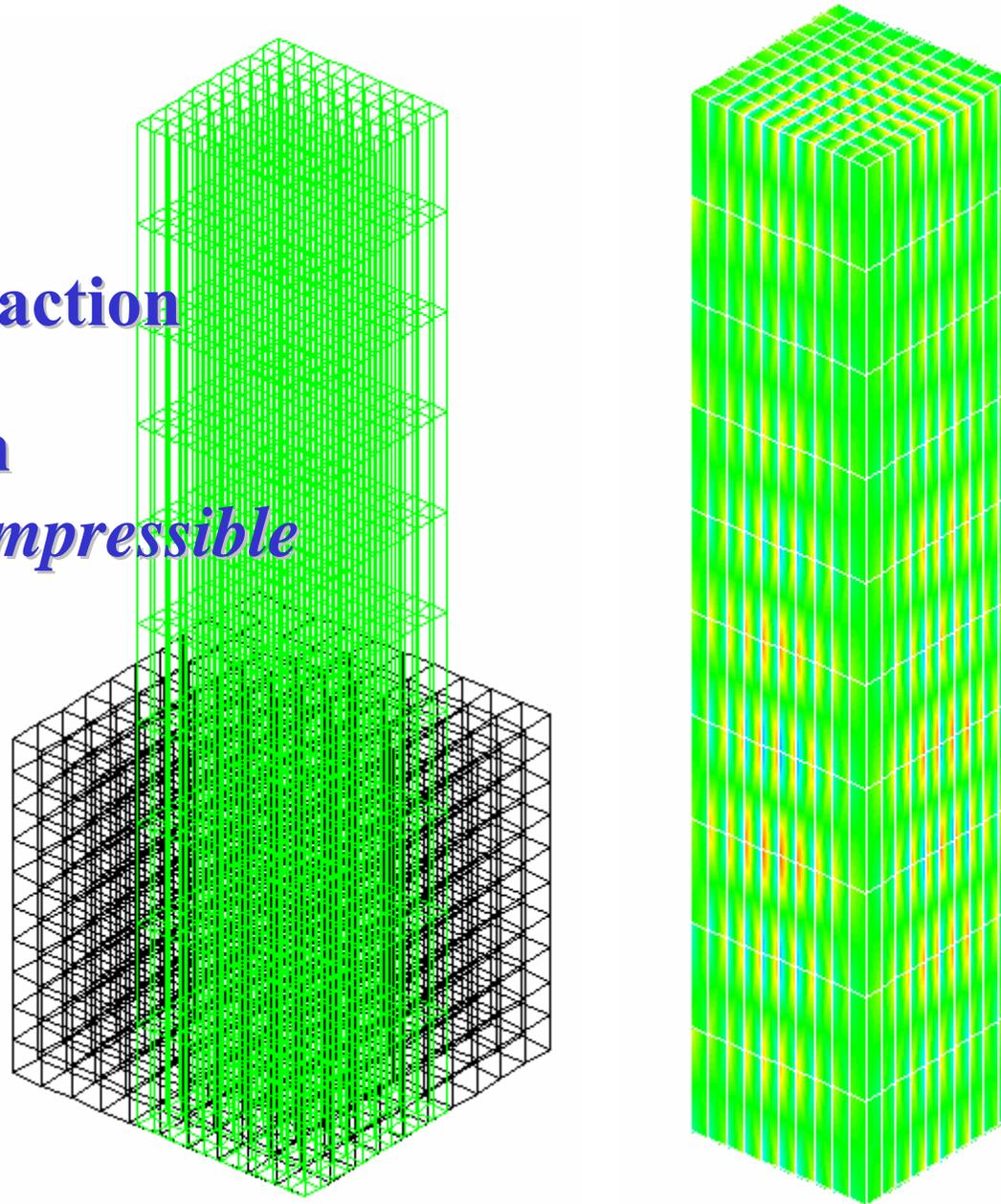
1.0

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2$$

Essai de Traction

Néohookien
Quasi incompressible

CUB8

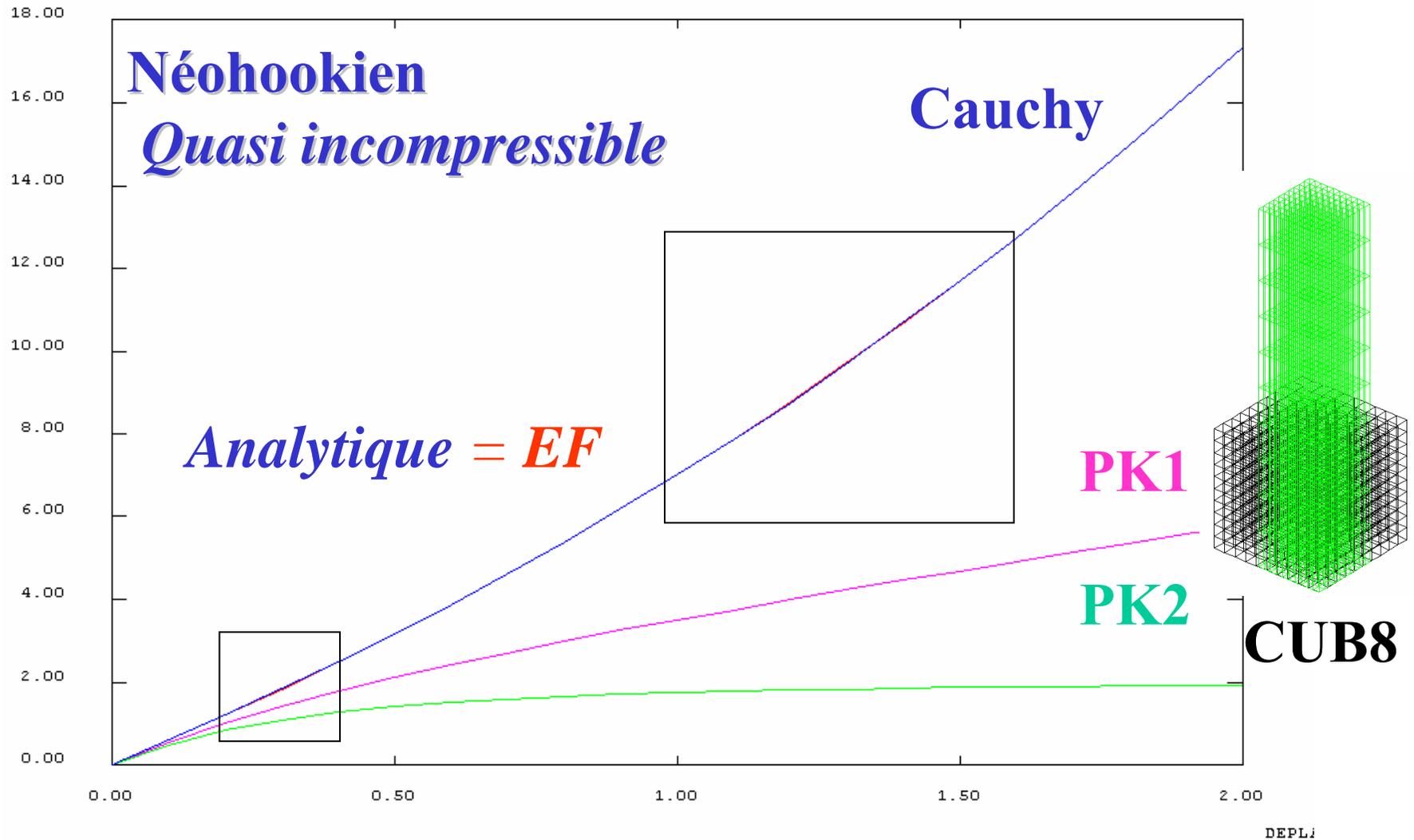


SMZZ
v 1.73E+01
A 1.73E+01

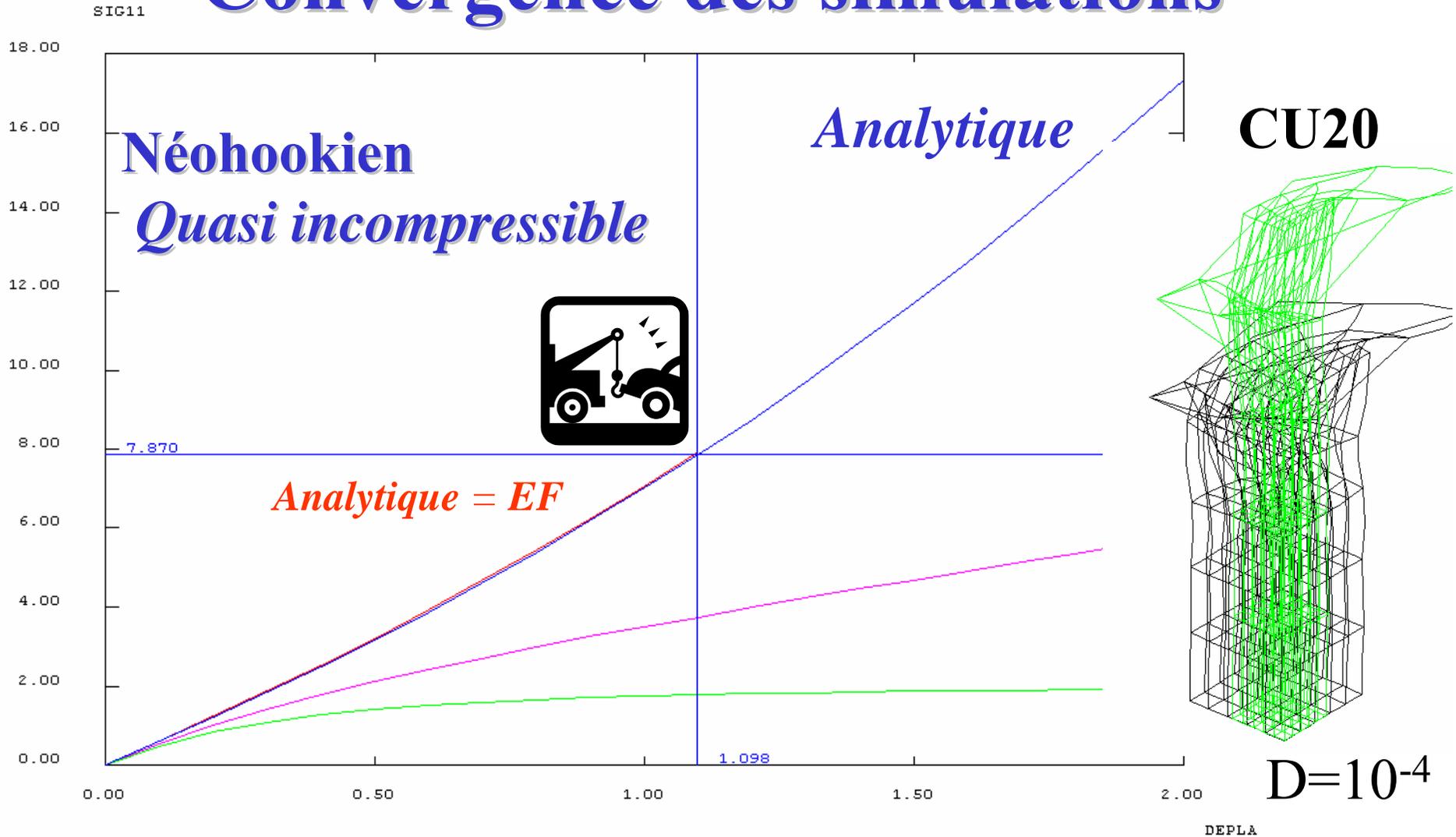


AMPLITUDE
DEFORMEE

1.0



Convergence des simulations



Plan

- **Contexte**
- **Généralités sur les hyperélastiques**
 - Néo-hookien, Mooney-Rivlin...
- **Développement UMAT**
 - De la théorie à la programmation
- **Exemples de validation**
 - 2D, 3D, **Effet Mullins**
- **Conclusion**

Modèle avec effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

Thèse G. Chagnon 2003, JMPS 2004

Densité d'énergie hyperélastique : W_0

avec accommodation : $(1-D)W_0$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + (1-D)2\mathbf{B} \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{B}}$$

Critère prenant en compte toutes les directions de l'espace

Mesures $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ $\alpha = \sqrt{I_1/3} - 1$ $I_1 = \text{tr}(\mathbf{B})$

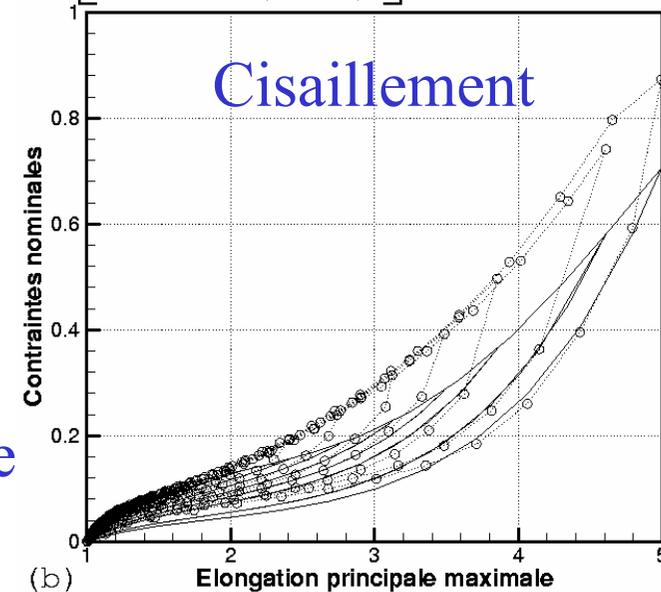
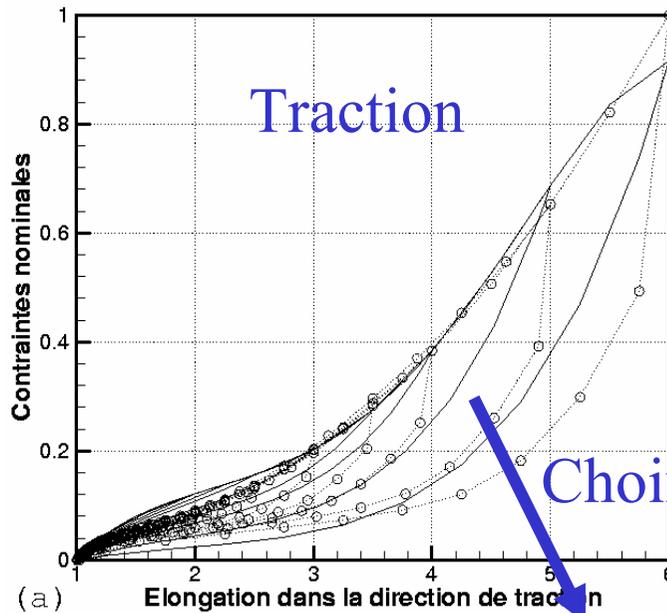
Forme de l'endommagement $D = D(\bar{\alpha}) = D(I_1^{\max})$

Simulation avec effet Mullins

Mécanique de l'endommagement

Forme de la loi choisie

$$D = D_{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}}{\eta}\right) \right]$$



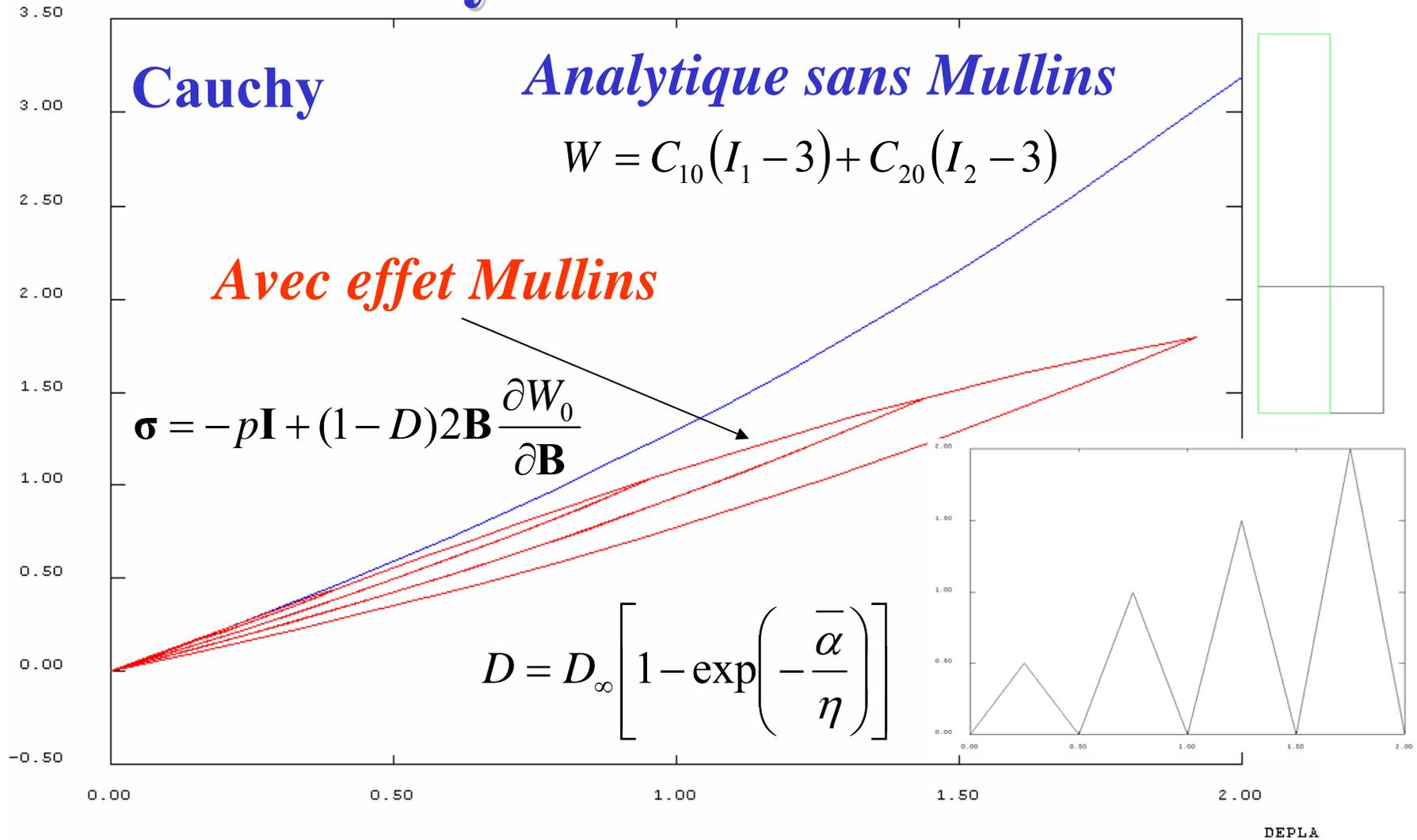
Choix d'une forme

$$W_0 = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$$

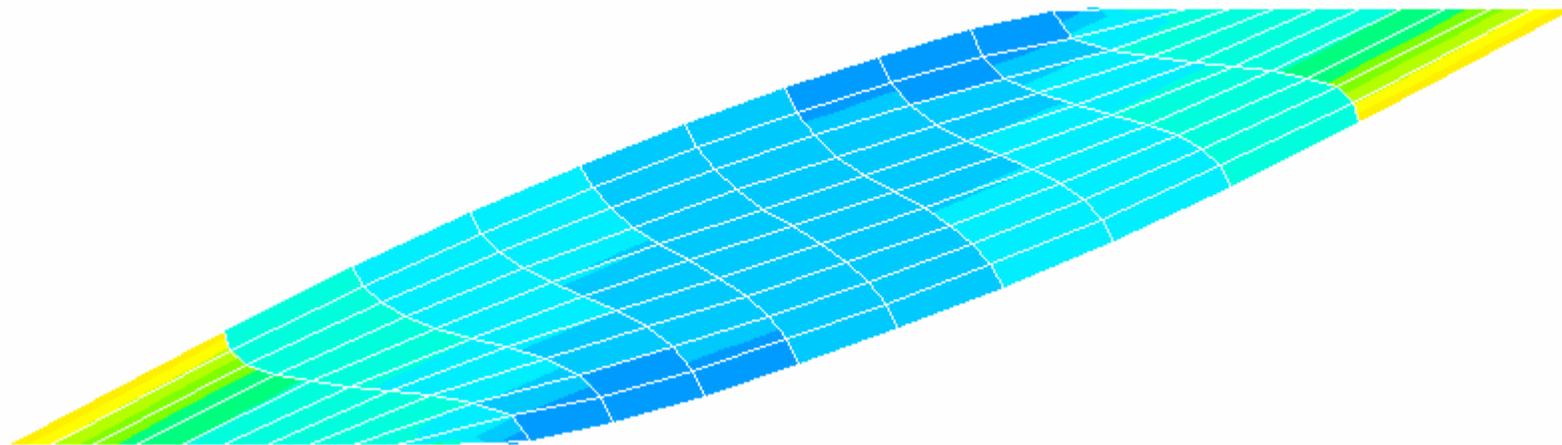
Modèle hyperélastique - Yeoh



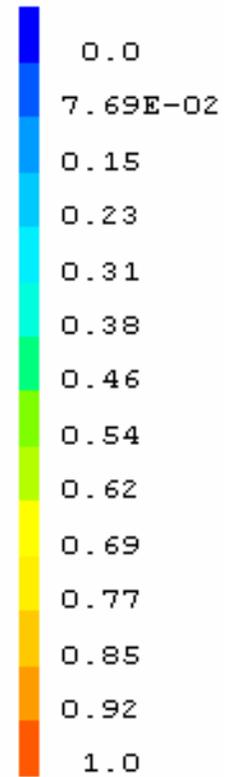
Mooney Rivlin et Mullins



Effet Mullins



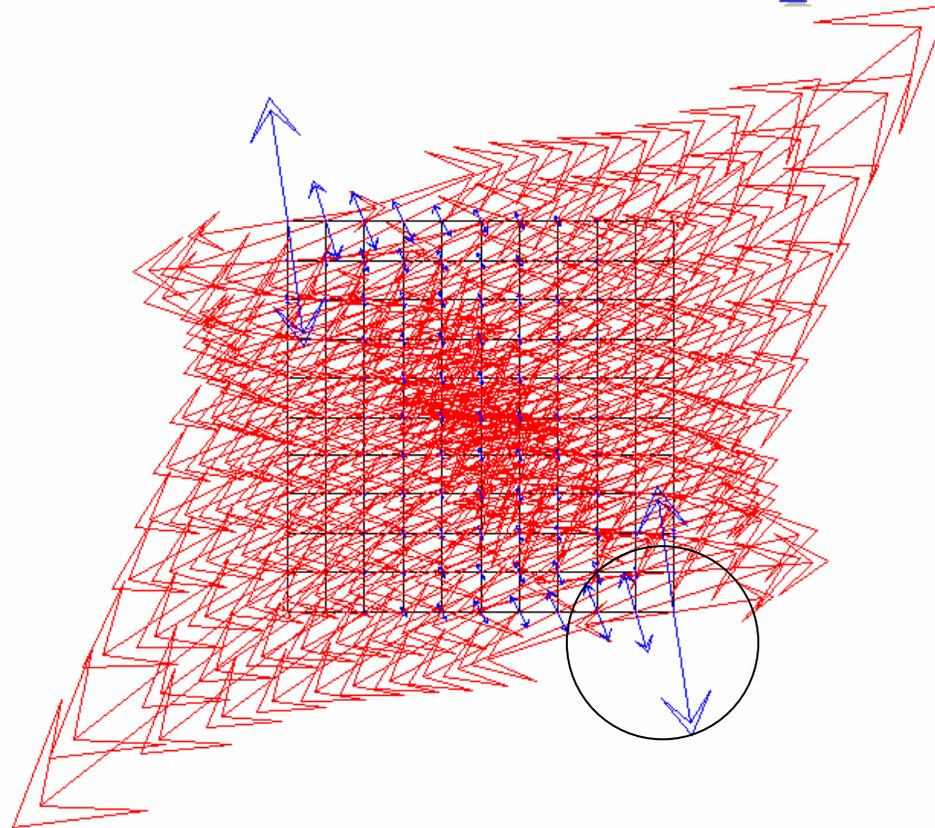
D
> 1.07E-01
< 7.93E-01



AMPLITUDE
DEFORMEE

1.0

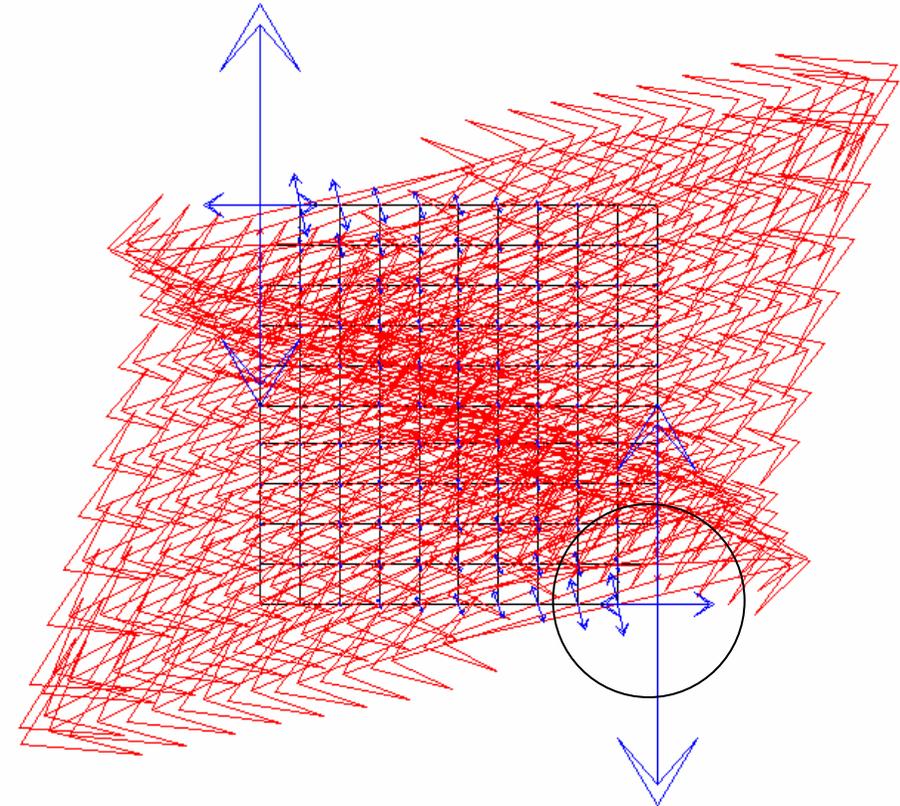
Comparaisons



Traction

Compression

Mullins



Conclusion

- Simulations des essais
 - Traction, Cisaillement, Biaxiale...
- Tridimensionnel, Quasi incompressible
- Convergence c'est pas simple !
- Quand :
 - Opérateur tangent dans UMAT
 - Les USER ELEMENTS
- Merci : **Olivier Fandeur (CEA)**