Utilisation du modèle $k - \varepsilon$ implicite pour la dérivation d'un modèle de turbulence macroscopique

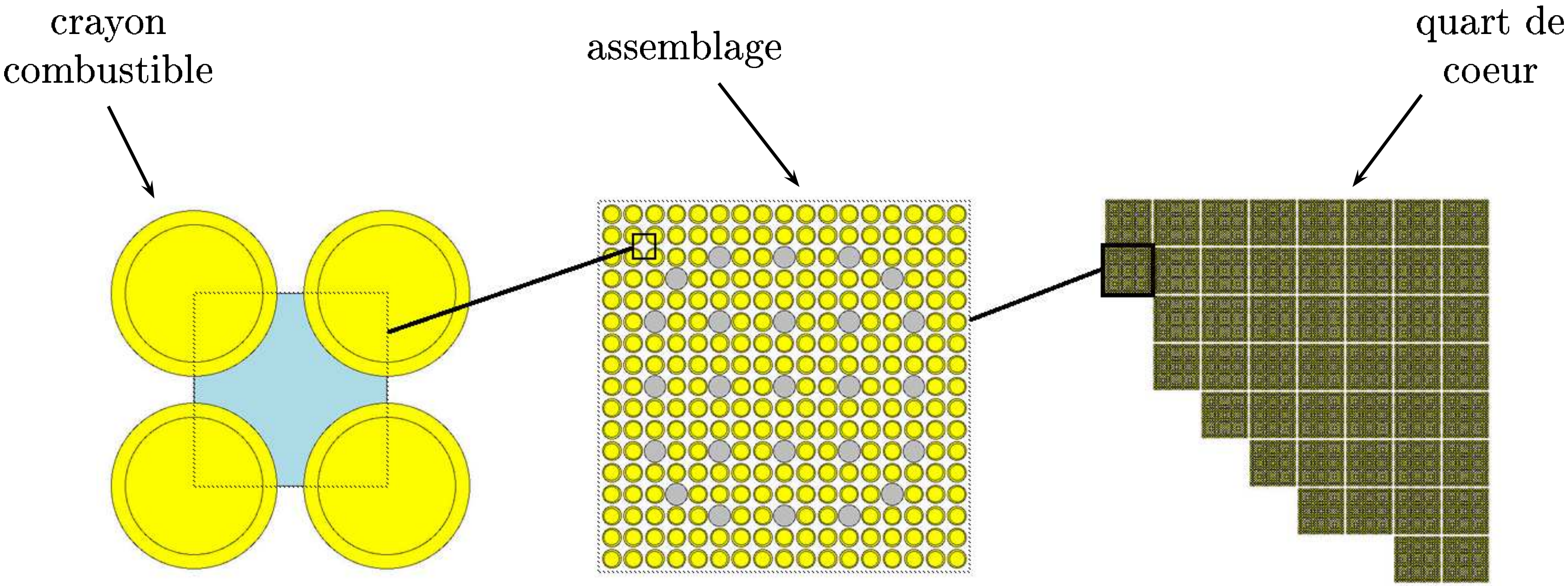
CEA Saclay

F. Pinson, J.-P. Magnaud

O. Grégoire, O. Simonin (IMFT)

26 novembre 2004

Problématique

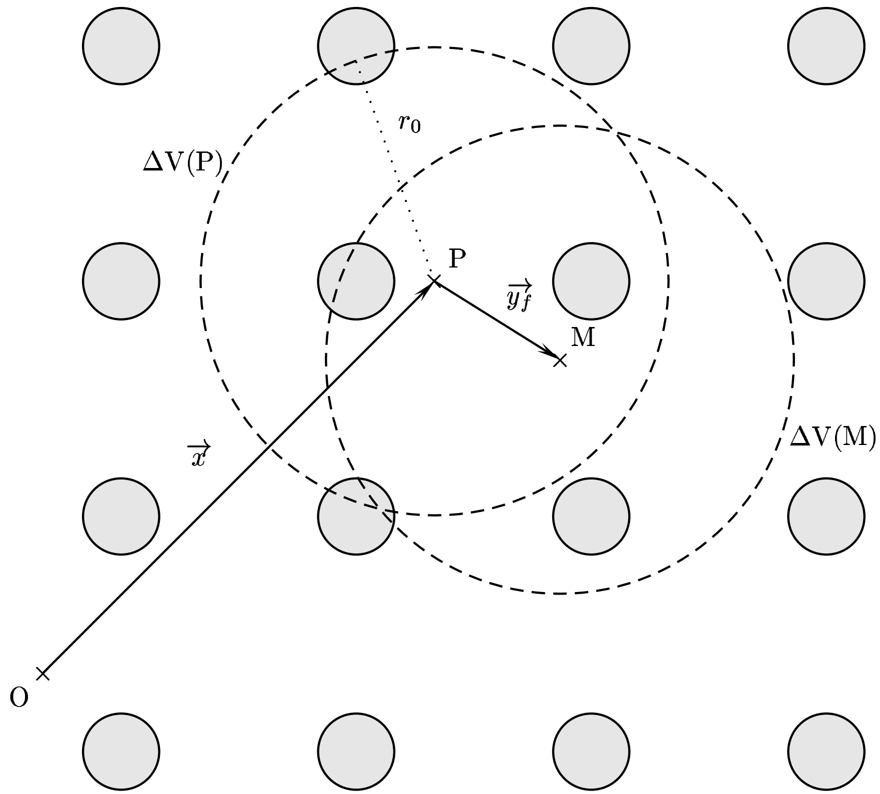


- Modélisation d'un coeur de réacteur par une approche de type milieu poreux.
- 2 échelles rencontrées : locale et macroscopique.
- Objectif : Modélisation à l'échelle macroscopique des effets locaux de la turbulence.

Définition de la moyenne spatiale

Moyenne spatiale classique :

$$\langle \zeta \rangle_f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V_f(\mathbf{x})} \int_{\Delta V_f(\mathbf{x})} \zeta(\mathbf{y}, t)\, dV_{\mathbf{y}} \ ,$$



- Taille du filtre r_0 liée aux caractéristiques géométriques du milieu solide. Pour un milieu poreux périodique, r_0 doit être supérieure ou égale à la taille des pores.
- Obtention d'une formulation homogénéisée des échanges fluide/solides (pertes de charge, échanges thermiques...).
- Décomposition suivant la moyenne et le déviation spatiales : $u_i = \langle u_i \rangle_f + \delta u_i$.
- Séparation des échelles $\Longrightarrow$ Idempotence ($\langle \delta u_i \rangle_f = 0$).

Choix de l'ordre d'application des moyennes

ζ — Equation locale microscopique $\xrightarrow{\text{moyenne statistique}}$ $\overline{\zeta} + \zeta'$ — Equation moyennée statistiquement (modèles RANS) $\xrightarrow{\text{filtre spatial}}$ $\langle\overline{\zeta}\rangle_f + \langle\zeta'\rangle_f + \delta\overline{\zeta} + \delta\zeta'$ — Equation doublement moyennée

Modèle $k - \varepsilon$ implicite de CAST3M $\dashrightarrow$ Modèle de turbulence macroscopique

- CAST3M permet de comprendre les phénomènes turbulents (moyennés statistiquement) à l'échelle locale ;
- Etape nécessaire dans l'élaboration d'un modèle de turbulence macroscopique ;

$\Longrightarrow$ Nécessité d'une validation du modèle $k - \varepsilon$ implicite.

Implicitation du modèle $k - \varepsilon$ dans CAST3M

Algorithme de splitting d'opérateur :

- Première étape non visqueuse :

  Changement d'inconnues $(k, \varepsilon) \longrightarrow (\theta, \nu_t)$ où $\theta = \frac{k}{\varepsilon}$ et $\nu_t = C_\nu k \theta$;

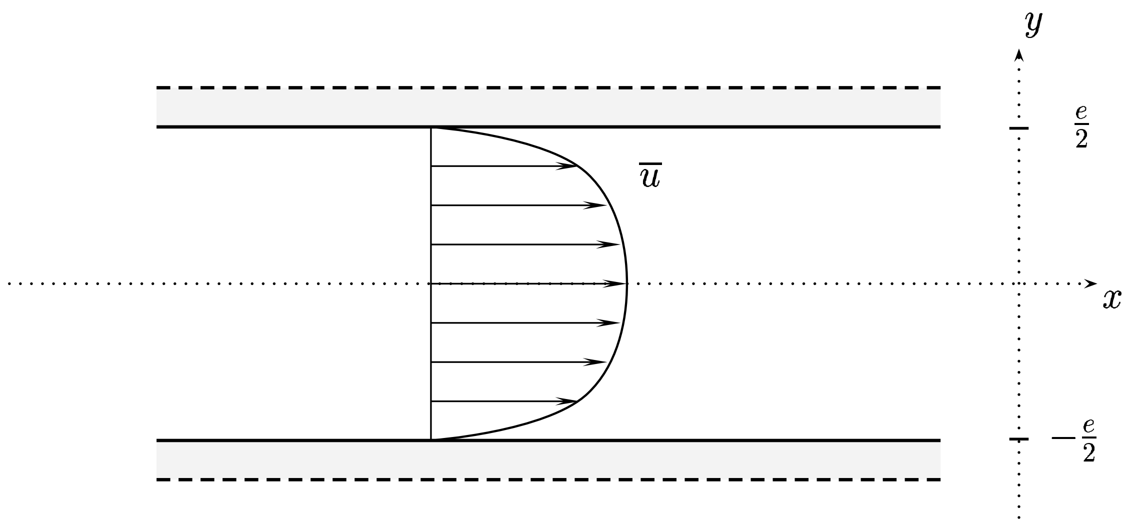
  Condition limites type Dirichlet sur $(k, \varepsilon) \longrightarrow (\theta, \nu_t)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + u \boldsymbol{\nabla} \theta + (C_{\varepsilon_1} - 1) C_\nu \theta^2 P = C_{\varepsilon_2} - 1 \\ \dfrac{\partial \nu_t}{\partial t} + u \boldsymbol{\nabla} \nu_t + \dfrac{1}{\theta}(2 - C_{\varepsilon_2}) \nu_t = C_\nu \theta P (2 - C_{\varepsilon_1}) \nu_t \end{array} \right.$$

- Deuxième étape : diffusion en repassant aux variables (k, ε)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial k}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} . \left[(\nu + \dfrac{\nu_t}{\sigma_k}) \boldsymbol{\nabla} k \right] \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} . \left[(\nu + \dfrac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}) \boldsymbol{\nabla} \varepsilon \right] \end{array} \right.$$

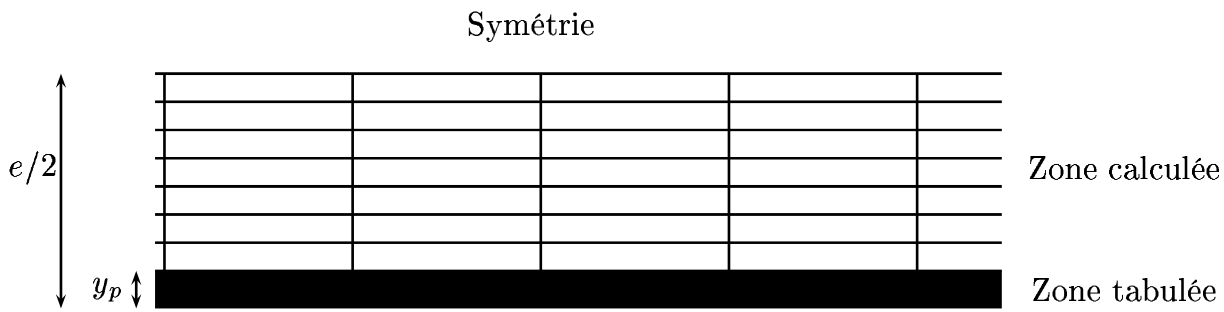
Validation du modèle pour un écoulement en canal plan



Expérience de Comte-Bellot,

profils établis dans la section $x/e = 69$.

$$Re = \frac{\langle \overline{u} \rangle_f \, e}{2\,\nu} = 12\,10^4.$$



Calcul CAST3M,

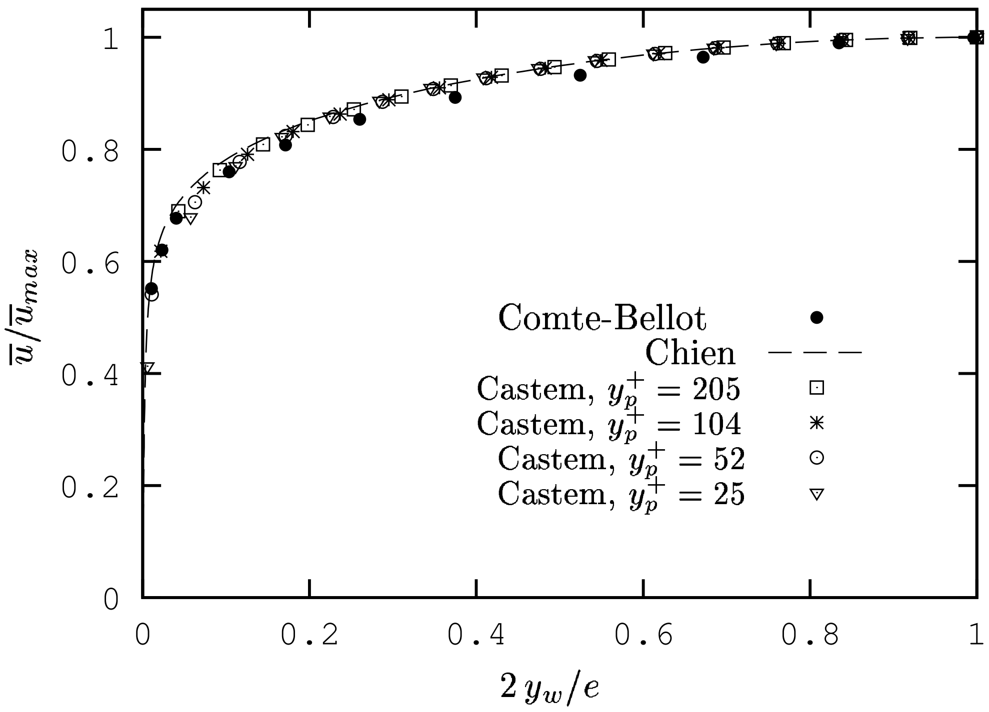
profils établis dans la section $x/e = 200$.

Paramètres influants :

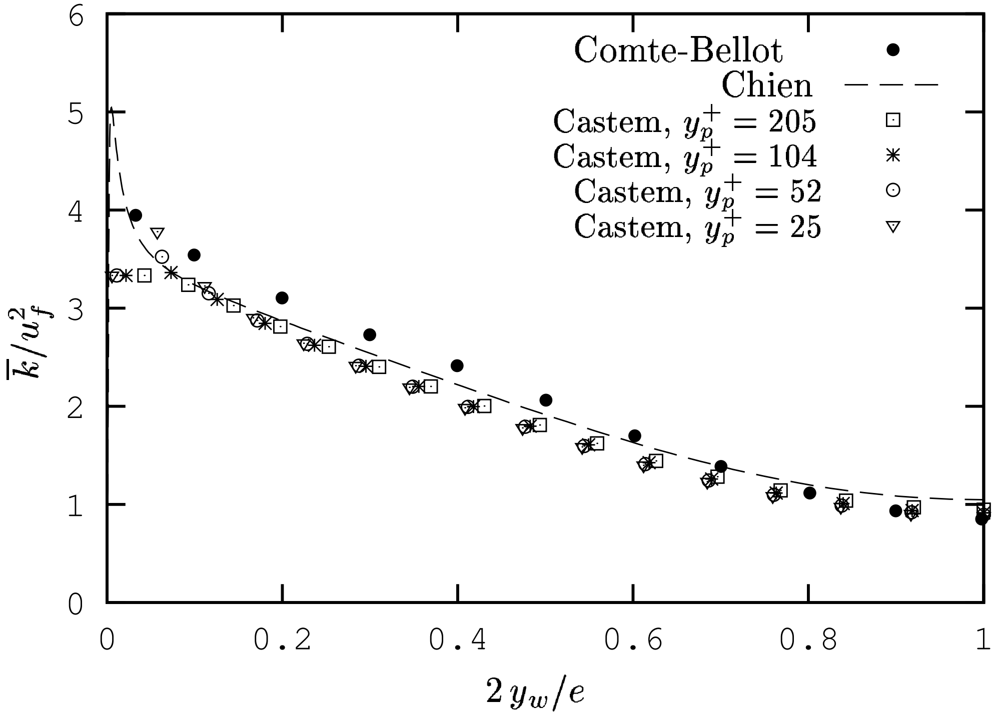
- épaisseur de la zone tabulée y_p,
- nombre de courant CFL,
- nombre de mailles N_h.

Sensibilité au choix du yp^{+}

Profil adimensionné de vitesse



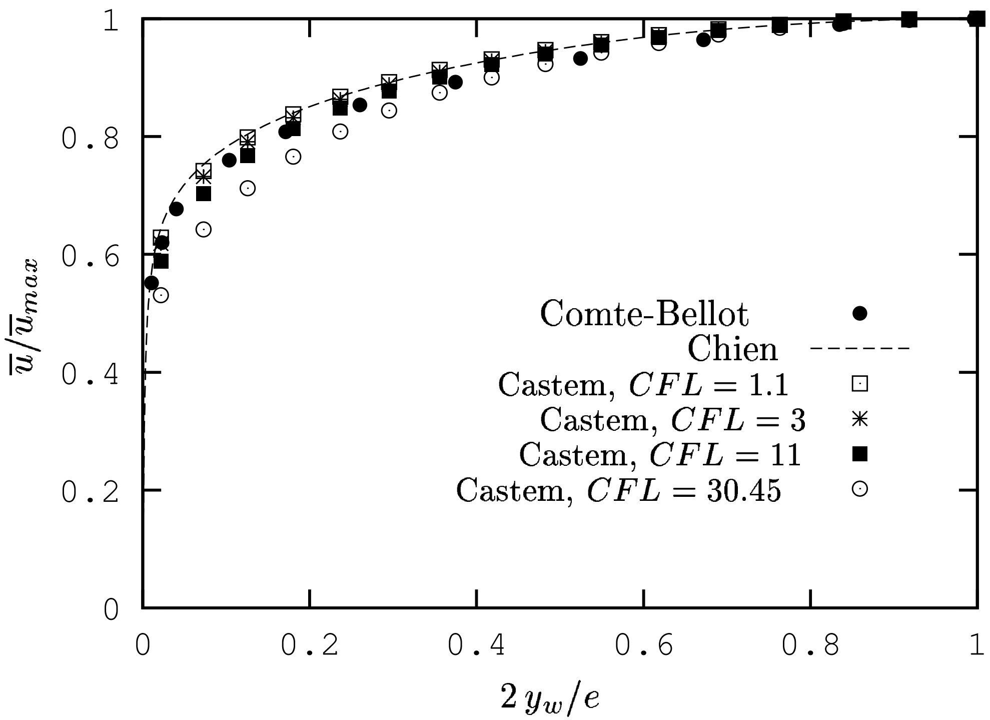
Profil adimensionné de TKE



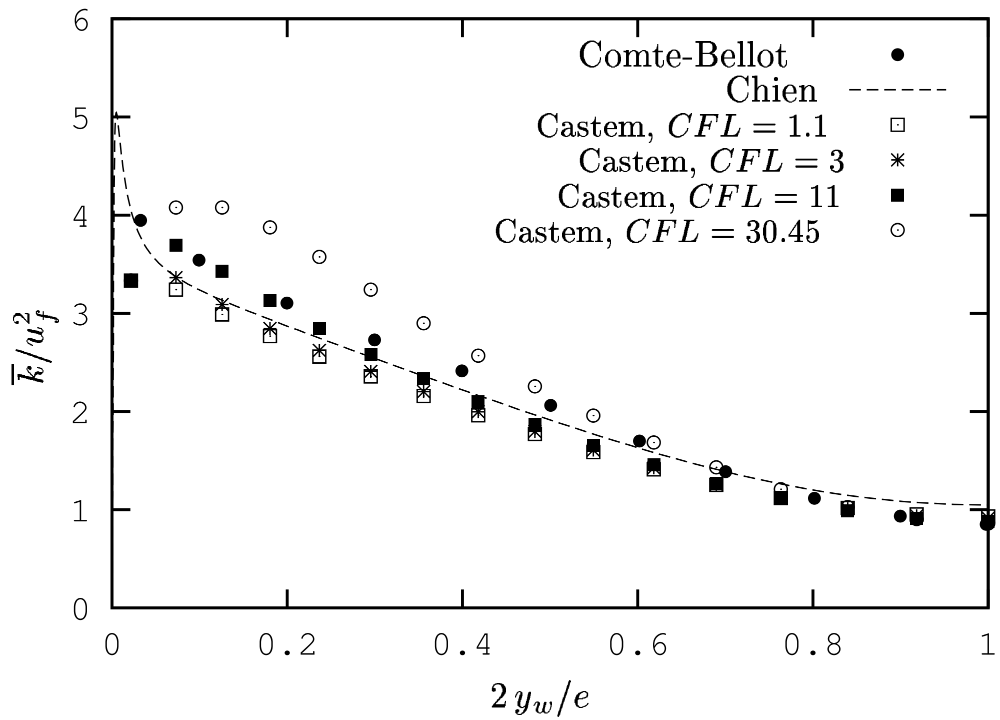
$\Longrightarrow$ Profils peu sensibles au choix du y_p^+, mais les résulats sont meilleurs sur la TKE si $y_p^+ \simeq 100$.

Sensibilité au nombre de courant CFL

Profil adimensionné de vitesse

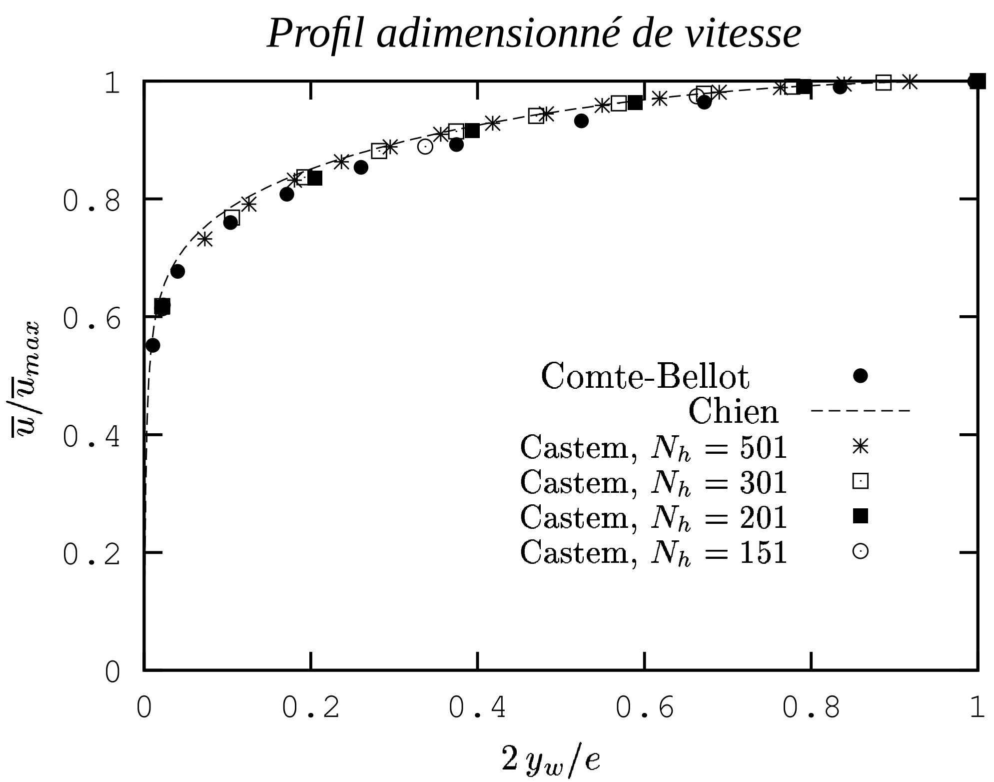


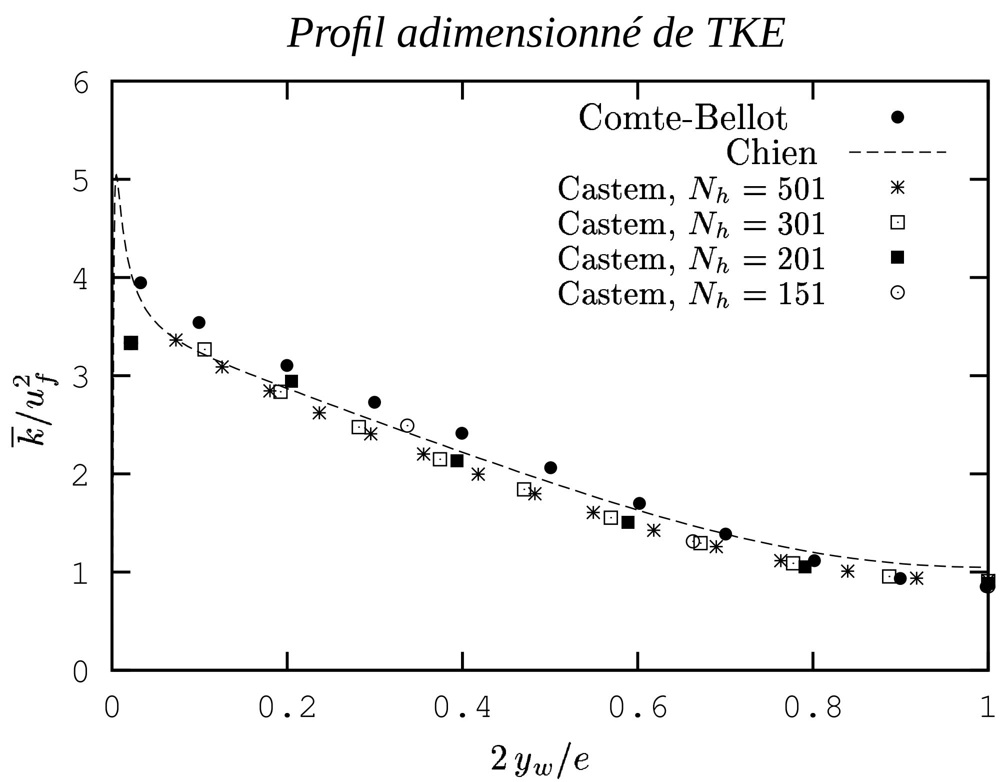
Profil adimensionné de TKE



$\Longrightarrow$ Profils très nettement détériorés pour des nombres de courant supérieurs à 10.

Sensibilité au nombre de mailles N_h





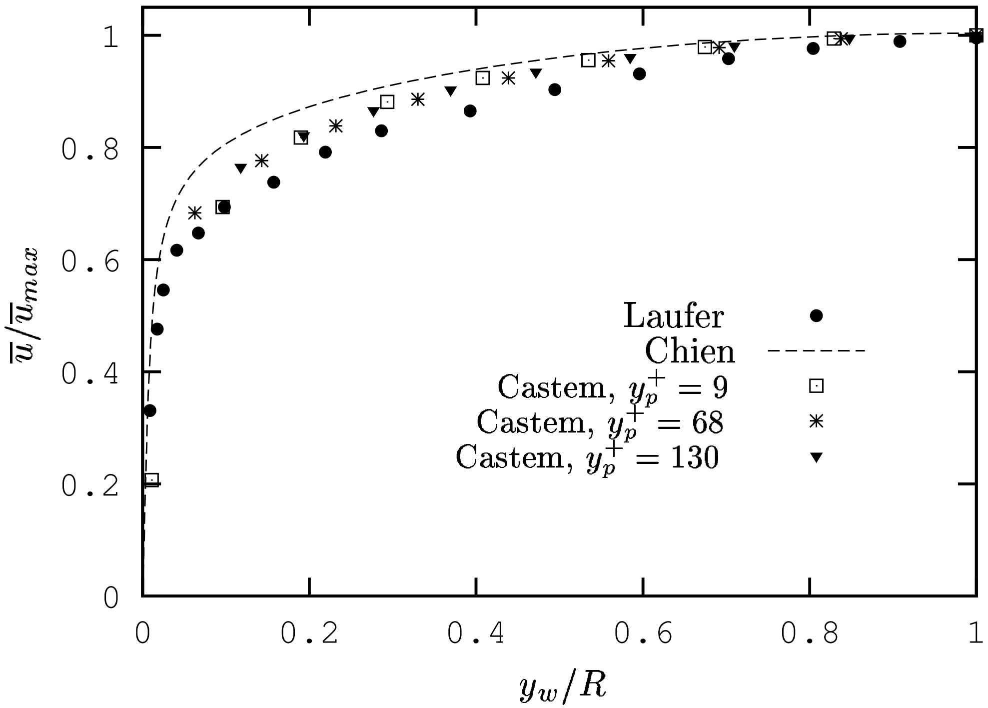
$\Longrightarrow$ Les profils semblent peu détériorés par la diminution du nombre de mailles.

Apparition d'oscillations numériques sur les grandeurs moyennées spatialement si N_h est trop faible.

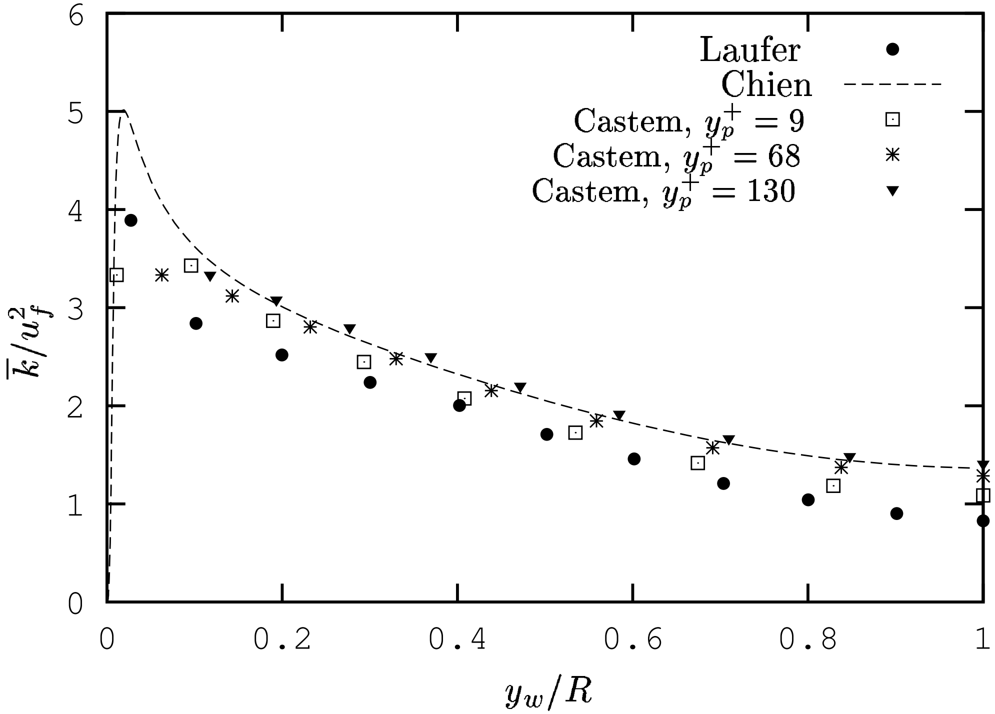
(26/11/2004)

Validation du modèle pour un écoulement en tube

Profil adimensionné de vitesse



Profil adimensionné de TKE



Comparaison avec les résultats expérimentaux de Laufer, $Re_L = 5\,10^4$

$\Longrightarrow$ Conclusions identiques sur la sensibilité au y_p^+, CFL et N_h.

Récapitulatif et conseils d'utilisation

- La distance à la paroi doit être choisie telle que $y_p^+ \simeq 100$;
- Précision dégradé pour un nombre de courant supérieur à 100 (voir résultats pour la décroissance de turbulence de grille) ;
- Le maillage doit être étudié suivant le cas considéré ;
- Critères plus restrictifs lors de l'utilisation de la formulation axisymétrique.

$\Longrightarrow$ Se reporter au rapport « Amélioration et tests du modèle $k - \varepsilon$ implicite dans CAST3M ».

Double moyenne appliquée à l'équation de quantité de mouvement

Equation locale de $\overline{u}_i$:

$$\rho\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i}\;\overline{u_j}\right]=-\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\rho\nu\frac{\partial^2\overline{u_i}}{\partial x_j\partial x_j}-\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'\;u_j'}$$

Equation doublement moyennée :

$$\rho\phi\left[\frac{\partial\langle\overline{u_i}\rangle_f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\overline{u_i}\rangle_f\;\langle\overline{u_j}\rangle_f\right]=-\,\phi\frac{\partial\langle\overline{P}\rangle_f}{\partial x_i}+\rho\nu\phi\frac{\partial^2\langle\overline{u_i}\rangle_f}{\partial x_j\partial x_j}-\rho\phi\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\overline{u_i'\;u_j'}\rangle_f$$
$$-\,\rho\phi\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\delta\overline{u_i}\;\delta\overline{u_j}\rangle_f+\phi\langle\left(-\overline{P}\delta_{ij}+\rho\nu\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)n_j\;\delta_w\rangle_f\,.$$

Trois termes sont à modéliser :

- les contraintes de Reynolds spatialement filtrées $\langle\overline{u_i'\;u_j'}\rangle_f$,
- la dispersion de la quantité de mouvement $\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\delta\overline{u_i}\;\delta\overline{u_j}\rangle_f$,
- les pertes de charge $\langle\left(-\overline{P}\delta_{ij}+\rho\nu\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)n_j\;\delta_w\rangle_f$.

Modélisation macroscopique de la turbulence

- Fermeture au premier gradient pour les contraintes de Reynolds filtrées spatialement :

$$\langle \overline{u_i' \, u_j'} \rangle_f = \nu_{t_\phi} \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle_f}{\partial x_j}$$

- L'échelle de longeur caractéristique de la turbulence L est elle constante ?

$\Longrightarrow$ si oui,

$$\nu_{t_\phi} = C_D \sqrt{\langle \overline{k} \rangle_f} L$$

$\Longrightarrow$ si non, modélisation de type $k - \varepsilon$

$$\nu_{t_\phi} = C_\mu \frac{\langle \overline{k} \rangle_f^2}{\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f}$$

Dans cette définition, $\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ ne correspond pas à la dissipation turbulente filtrée spatialement, mais permet de construire l'échelle de temps $\langle \overline{k} \rangle_f / \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ (idem que pour un modèle $\overline{k} - \overline{\varepsilon}$).

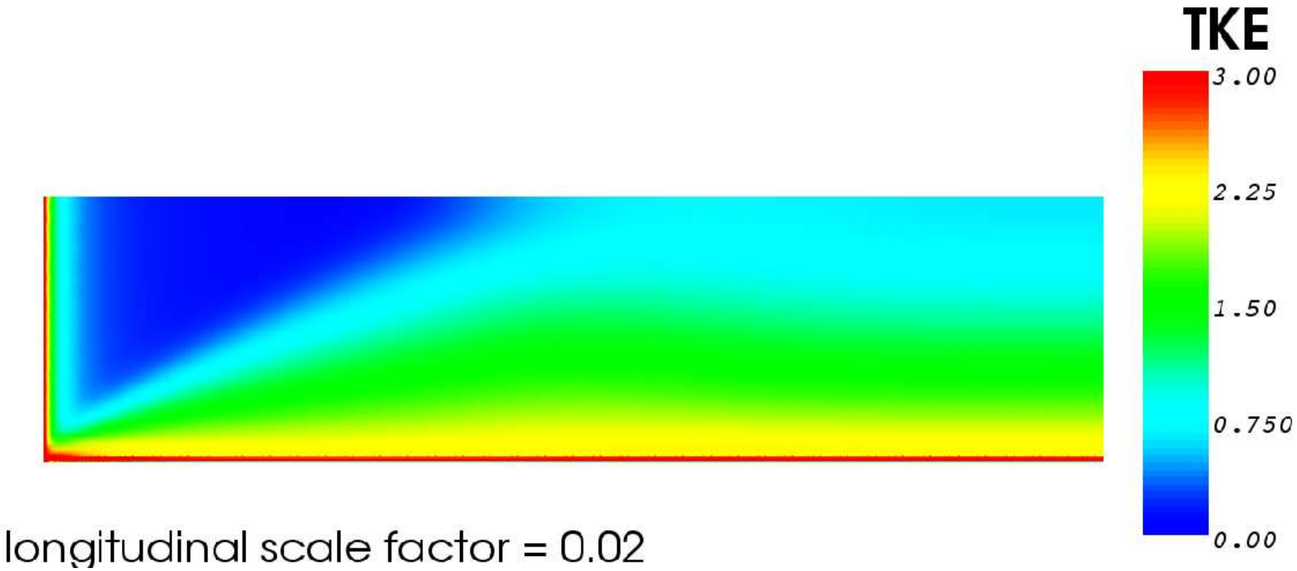
Pour plus de généralité, la modélisation $\langle \overline{k} \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ est retenue.

(26/11/2004)

Equation de $\langle \overline{k}_f \rangle_f$ pour un canal plan

L'équation bilan de $\langle \overline{k} \rangle_f$ se réduit à :

$$\frac{D\langle \overline{k} \rangle_f}{Dt} = \langle \delta \overline{R}_{xy} \frac{\partial\, \delta \overline{u}}{\partial y} \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \overline{k}^m \rangle_f}{\partial x} \right]$$



Production de sous-filtre :

$$\langle \delta \overline{R}_{xy} \frac{\partial\, \delta \overline{u}}{\partial y} \rangle_f$$

Seulement liée au frottement en paroi ?

Expression de la "production microscopique" (sub-filter production)

Hypothèse : écoulement filtrée quasiment homogène : dans l'équation bilan de $\langle \overline{E}^m \rangle_f$, les variations des quantités filtrées spatialement sont négligeables devant les termes de production/dissipation.

La production microscopique s'écrit alors :

$$-\langle \delta \overline{R}_{il} \frac{\partial \, \delta \overline{u_i}}{\partial x_l} \rangle_f \simeq \underbrace{\overline{F_{\phi_i}} \langle \overline{u_i} \rangle_f}_{\text{Travail de la trainée moyenne dans le mouvement macroscopique moyen}} - \underbrace{\langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \overline{u_i}}{\partial x_j} \rangle_f}_{\text{Dissipation de sillage : } \langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f}$$

$\Longrightarrow$ Cette dissipation supplémentaire avait déjà été identifiée [*Wilson, 1988 ; Liu et al., 1995*] dans certains articles, mais uniquement de façon empirique. Son expression analytique est ici explicitée.

Présentation du modèle pour un canal plan : équation de $\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f$

Equation modèle construite à partir de l'équation de $\langle\overline{k}\rangle_f$ et de temps caractéristiques :

$$\frac{D\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon_p}}{\tau_p}\overline{F_\phi}\langle\overline{u}\rangle_f - \frac{C_{\varepsilon_2}}{\tau_t}\langle\overline{\varepsilon}^m\rangle_f - \frac{C_{\varepsilon_w}}{\tau_w}\langle\overline{\varepsilon}_w\rangle_f + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f}{\partial x}\right]$$

- L'état d'équilibre du système est défini par $\left(\langle\overline{k}_\infty\rangle_f,\ \langle\overline{\varepsilon}_\infty\rangle_f,\ \overline{F_{\phi_\infty}}\right) = g(Re)$, et g est une fonction supposée connue.
- Le jeu de constantes doit respecter cet état d'équilibre.
- Le temps caractéristique de la dissipation visqueuse est classiquement défini par :

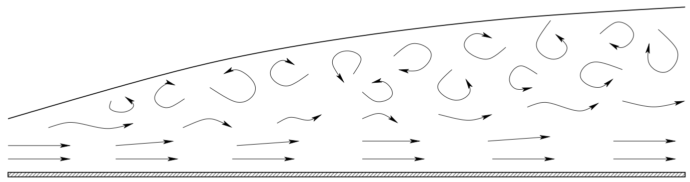
$$\tau_t = \frac{\langle\overline{k}\rangle_f}{\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f},$$

et la constante C_{ε_2} est choisie égale à 1.9 pour que le modèle soit aussi pertinent en écoulement libre.

Travail de la force de trainée

- Force de trainée, expression en fonction de la vitesse de frottement :

$$\overline{F_\phi} = \frac{f_p}{2D_H} ||\langle\overline{u}\rangle_f|| \langle\overline{u}\rangle_f$$



boundary layer expansion

- Travail de la force de trainée :

$$\overline{F_\phi}\langle\overline{u_i}\rangle_f = \frac{f_p}{2D_H} ||\langle\overline{u}\rangle_f||^3$$

- Phénomène lié à l'épaisseur de la sous souche visqueuse :

$$e_\nu^+ = \frac{e_\nu u_f}{\nu} \simeq 5 \iff e_\nu \simeq \frac{5\nu}{u_f}$$

- Vitesse de propagation de l'information : $u_f \sim \sqrt{f_p}\, ||\langle\overline{u}\rangle_f||$.

$\Longrightarrow$ Temps caractéristique lié au travail de la force trainée : $\tau_p \;\alpha\; \dfrac{\nu}{f_p ||\langle\overline{u}\rangle_f||^2}$

Dissipation de sillage

- Dissipation de sillage caractérisée par les gradients en proche paroi :

$$\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f = \langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}}{\partial y} \frac{\partial \delta \overline{u}}{\partial y} \rangle_f$$

- *Hypothèse* : la couche limite est proche de l'équilibre. Utilisation d'une fonction de paroi $F_u(y^+)$ (loi de Reichards, ou autre...) :

$$\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f = C'_w \frac{u_f^3}{D_H} = C_w \frac{f_p^{3/2}}{D_H} ||\langle \overline{u} \rangle_f||^3 \, .$$

- Temps caractéristique lié à $\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f$:

$$\tau_w \propto \frac{\nu}{\sqrt{f_p}\, ||\langle \overline{u} \rangle_f||\, \sqrt{\langle \overline{k}^m \rangle_f}} \, .$$

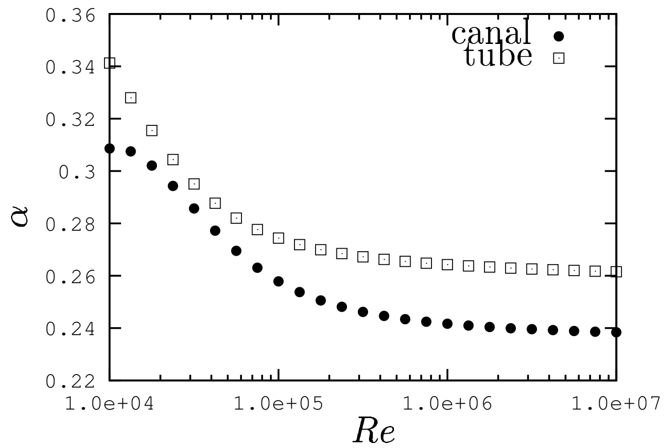
Modélisation de l'état d'équilibre

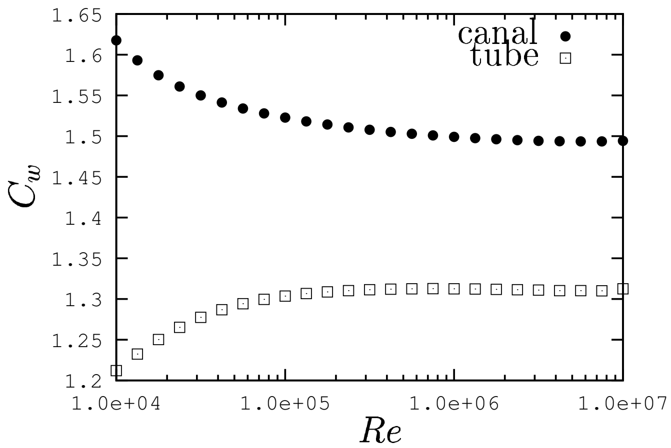
- Recherche d'un modèle indépendant de la géométrie...
- Pour l'énergie cinétique turbulente filtrée spatialement, nous proposons :

$$\langle \overline{k}_{\infty} \rangle_f = \alpha f_{p_\infty} ||\langle \overline{u} \rangle_f||^2$$

- La dissipation turbulente filtrée spatialement est lié au travail de la force de trainée et et à la dissipation de sillage :

$$\langle \overline{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f = \frac{f_{p_\infty}}{2\, D_H} ||\langle \overline{u} \rangle_f||^3 - C_w \frac{f_{p_\infty}^{3/2} ||\langle \overline{u} \rangle_f||^3}{D_H}$$





Obtention de l'équilibre : choix des constantes

- La définition de C_w permet d'obtenir directement :

$$\frac{D\langle\overline{k}\rangle_f}{Dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\overline{k}\rangle_f = \langle\overline{k}_\infty\rangle_f$$

- Equation de $\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f$:

$$\frac{D\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f}{Dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{C_{\varepsilon_p}}{\tau_{p_\infty}}\overline{F_{\phi_\infty}}\langle\overline{u}\rangle_f - \frac{C_{\varepsilon_2}}{\tau_{t_\infty}}\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f - \frac{C_{\varepsilon_w}}{\tau_{w_\infty}}\overline{\varepsilon}_{w_\infty} = 0$$

$$\Longleftarrow \quad C_{\varepsilon_p} = C_{\varepsilon_2}\frac{\tau_{p_\infty}}{\tau_{t_\infty}} \;, \quad C_{\varepsilon_w} = C_{\varepsilon_2}\frac{\tau_{w_\infty}}{\tau_{t_\infty}} \;.$$

$\boxed{C_{\varepsilon_p} \text{ et } C_{\varepsilon_w} \text{ déterminées en fonction de } C_{\varepsilon_2}}$

Modélisation du coefficient de frottement

Article Fukagata *et al.*, *Phys. of Fluids 2002* :

$$f_p = f_{p_{lam}} + f_{p_{turb}} + f_{p_{conv}}$$

Pour un canal :

- contribution laminaire définie analytiquement :

$$f_{p_{lam}} = \frac{96}{Re} ,$$

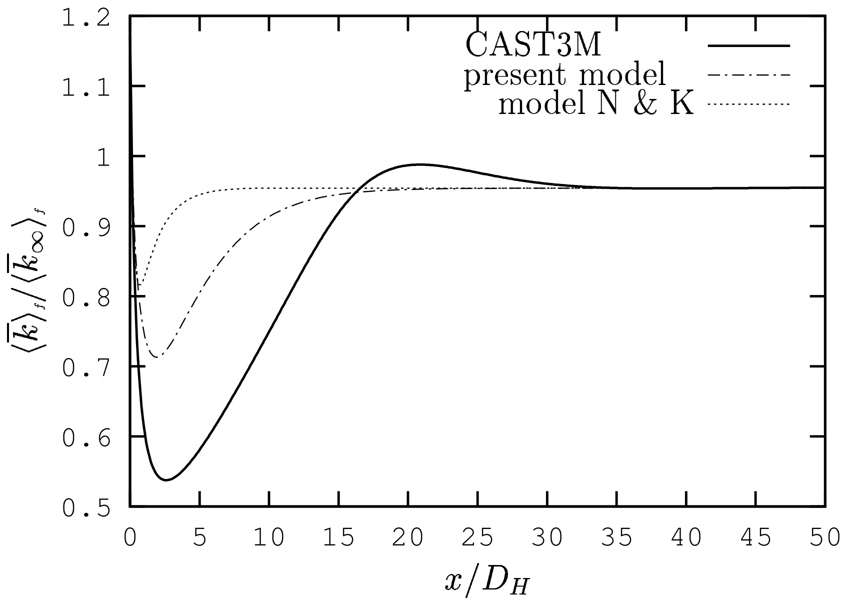
- contribution turbulente modélisée par :

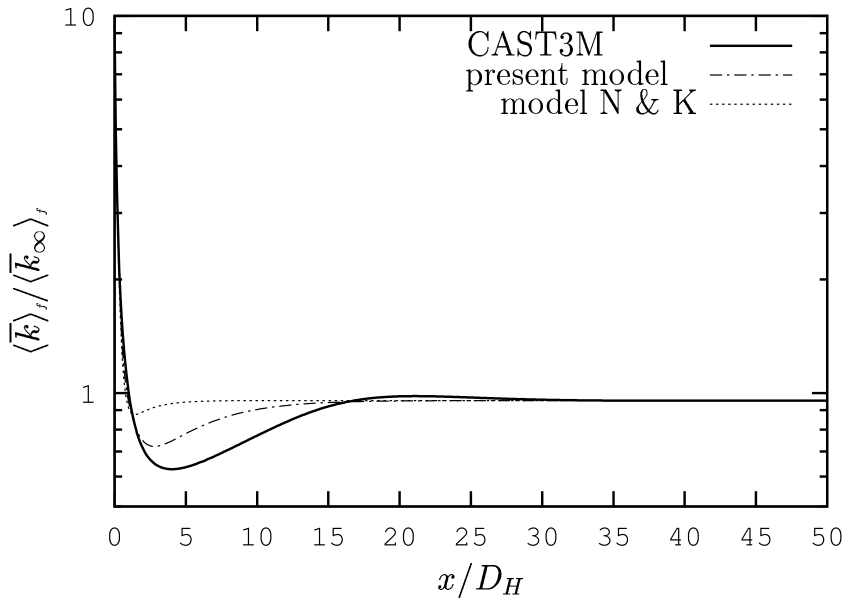
$$f_{p_{turb}} \propto \frac{\langle \overline{k} \rangle_f / \langle \overline{k}_\infty \rangle_f}{\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f / \langle \overline{\varepsilon}_\infty \rangle_f} = \frac{\tau_t}{\tau_{t_\infty}}$$

- la contribution convective prend essentiellement en compte les effets d'entrée (elle dépend notamment des conditions à l'entrée du canal) :

$$f_{p_{conv}} \propto \exp\left(-\mathcal{C} \frac{x\,\nu}{\langle \overline{u} \rangle_f \, D_H^2} \right)$$

Résultats préliminaires du modèle pour un canal plan ($Re_{D_H} = 10^5$)





Conditions initiales : $\langle\overline{k}\rangle_f = \langle\overline{k}_\infty\rangle_f$,
$\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f = 2\langle\overline{\varepsilon}_\infty\rangle_f$

Conditions initiales : $\langle\overline{k}\rangle_f = 10\langle\overline{k}_\infty\rangle_f$,
$\langle\overline{\varepsilon}\rangle_f = 100\langle\overline{\varepsilon}_\infty\rangle_f$

- Dynamique et amplitude d'oscillation partiellement retrouvée,
- résultats dépendant essentiellement des choix de modélisation de $\langle\overline{\varepsilon}_w\rangle_f$ et de f_p.

Conclusion

- L'utilisation d'un filtre spatial permet une vision homogénéisée d'un écoulement turbulent dans un milieu poreux (on gomme notamment les singularités...).
- La production supplémentaire (présente dans l'équation de $\langle \overline{k} \rangle_f$) est explicitée en fonction du travail de la force de trainée dans le mouvement macroscopique moyen et de la dissipation de sillage.
- Un modèle $k - \varepsilon$ est construit pour un écoulement macroscopique 1D en identifiant les temps caractéristiques de chaque phénomène de production/dissipation.
- L'obtention de l'état d'équilibre passe par une contrainte sur les constantes du modèle.
- Communications :

  Rapport CEA : « Amélioration et tests du modèle $k - \varepsilon$ implicite dans CAST3M » ;

  Conférence ERCOFTAC 2005 : « $k - \varepsilon$ turbulence model in porous media based on a two scale analysis».