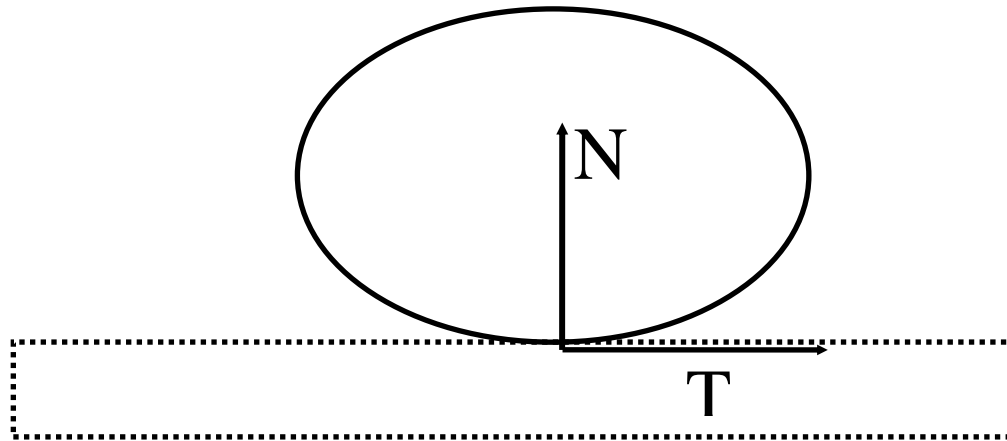


Contact frottement

Implémentation dans Cast3M

- Le problème physique
- Deux familles de méthodes : Comportement et Cinématique
- Eléments joints dans Cast3M
- Traitement des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes
- Traitement des conditions de contact unilatéral
- Calcul automatique de ces conditions 2D-3D
- Traitement du frottement

Le problème physique :



■ Condition de non-pénétration :

$$U_N \geq 0 \quad N \geq 0 \quad U_N N = 0$$

■ Condition de frottement

$$\mu = \mu(N, x, \dots)$$

$$(u_T > 0 \quad -\vec{T} = \mu \vec{D}) \text{ ou } (u_T = 0 \quad -\vec{T} < \mu \vec{D})$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{U}_T}{|\vec{U}_T|}$$

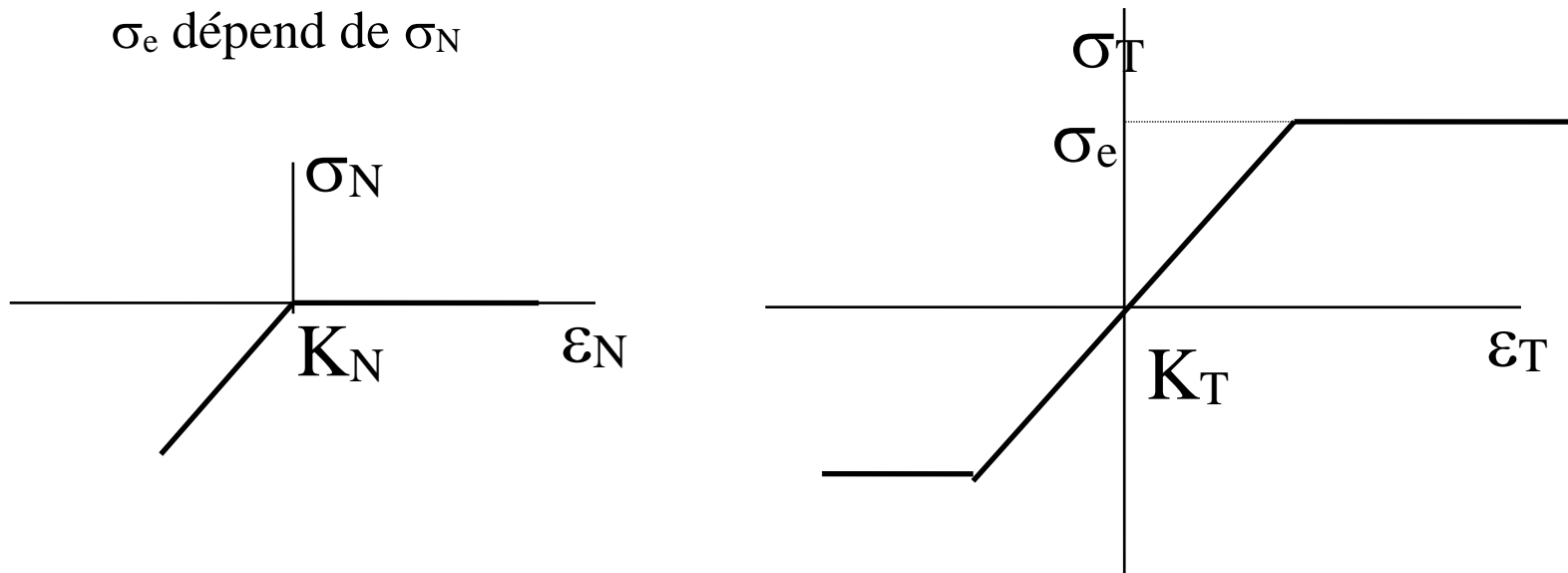
Deux familles de méthodes

- Méthode comportementale
Les conditions sont prises en charge par des éléments
Elles s'expriment en termes de contraintes et déformations
- Méthode cinématique
Les conditions sont décrites cinématiquement aux nœuds
Elles s'expriment en termes de déplacements et d'efforts

$$\sum \alpha_i q_i \leq \beta$$

Elément joint

- contact : comportement élastoplastique
loi de comportement normale unilatérale
raideur en compression = paramètre de pénalisation
- frottement : idem
 σ_e dépend de σ_N



Méthode intéressante si elle est associée à un matériau physique.

Sinon difficile de déterminer les raideurs K_N et K_T . La raideur tangente en compression du système peut beaucoup varier selon que la condition de contact est vérifiée ou non.

La convergence du calcul en dépend.

Nécessite des nœuds en vis à vis. Ne supporte pas de grandes déformations de la structure.

Dans Cast3M, c'est la famille d'éléments JOI*.

Traitement des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.

$$\sum \alpha_i q_i = \beta$$

On veut résoudre :

$$\min\{q \in V_r\} \left(\frac{1}{2} q^t K q - q^t F \right) \quad \text{Energie potentielle totale}$$

$$V_r = \{q : Aq = b\} \text{ sur } \mathcal{A}\Omega_1 \quad \text{Déplacements admissibles satisfaisant les conditions}$$

La condition de minimisation s'écrit :

$$dq^t K q - dq^t F = 0$$

On introduit les forces F_l telles que :

$$F + F_l = K q$$

La condition de minimisation devient :

$$dq^t F_l = 0$$

Or :

$$Adq = 0$$

F_l est donc de la forme :

$$F_l = A^t \lambda$$

On ajoute aux déplacements les forces de liaisons λ

On cherche maintenant l'extremum de :

$$\Omega' = \frac{1}{2} q^t K q - q^t F + \lambda^t (A q - b)$$
$$\frac{\partial \Omega'}{\partial q} = 0 \quad K q - F + A^t \lambda = 0 \quad \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda} = 0 \quad A q = b$$

3 familles de méthodes :

- pénalisation
 - on modifie la raideur K
- élimination
 - on élimine des inconnues dans le système
- dualisation
 - on adjoint au système les λ

Méthode de pénalisation

$$Kq - F + A^t \lambda = 0 \quad Aq = b$$

Soit C grand. Le système est équivalent à:

$$(K + CA^t A)q - F + A^t \lambda - CA^t b = 0$$

Sur les q soumis à condition, le système est équivalent (en ne gardant que les grands termes) à :

$$CA^t Aq - CA^t b = 0 \quad \text{c à d} \quad Aq = b$$

Sur les autres q , le système est équivalent à :

$$Kq - F = 0$$

On résout le système :

$$(K + CA^t A)q - F - CA^t b = 0$$

On en déduit q . On calcule le résidu R :

$$R = Kq - F = CA^t b - CA^t Aq = A^t AC(q_{ex} - q)$$

Il vérifie bien la condition : $R = A^t \lambda$

On en déduit λ :

$$\lambda = -(AA^t)^{-1} AR$$

Problème : choix de C

Méthode d'élimination :

$$Kq - F + A' \lambda = 0 \quad Aq = b$$

On exprime à l'aide des contraintes certaines inconnues en fonction des autres :

q : inconnues totales

Q : inconnues conservées

q_e : inconnues éliminées

A_r : A réduite sur les inconnues éliminées

$$A(Q + q_e) = b \rightarrow q_e = A_r^{-1}(b - AQ) \rightarrow q = (Q + q_e) = (I - A_r^{-1}A)Q + A_r^{-1}b$$

Autrement dit :

$$q = BQ + c$$

Résolvons le système :

$$B^t KBQ - B^t F + B^t Kc = 0$$

On en déduit q ($q = BQ + c$) qui vérifie automatiquement les conditions $Aq = b$.

Sur les inconnues totales le résidu R est :

$$R = Kq - F \quad \text{ou:} \quad R = KBQ + Kc - F$$

Donc R est dans le noyau de B^t , à savoir $(I - A_r^{-1} A)^t$

$$(I - A_r^{-1} A)^t R = 0 \quad \rightarrow \quad R = A^t A_r^{-1t} R$$

R vérifie $R = -A^t \lambda$ avec $\lambda = -(AA^t)^{-1} AR$ ou $\lambda = -A_r^{-1t} R$

Problème : compliqué en présence de relations

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

On résout le système matriciel total :

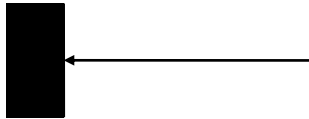
$$\begin{pmatrix} K & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ b \end{pmatrix}$$

La solution vérifie trivialement les conditions.

Problème :

- Coûteux car on augmente le nombre d'inconnues du système linéaire.
- Système non défini positif d'où des difficultés de factorisation
 - La décomposition $K=L^tDL$ n'est garantie que si K est défini positif

Soit le problème académique du point bloqué soumis à une force :



La raideur supplémentaire de blocage est :

$$\begin{matrix} F & b \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} q \\ \lambda \end{matrix} \end{matrix}$$

Le système admet une solution mais sa raideur n'est pas factorisable.

Elle n'est pas définie positive.

Ce problème apparaît quand la condition aux limites bloque un mode d'ensemble.

Deux solutions : Lagrangien augmenté ou double multiplicateur de Lagrange.

Lagrangien augmenté :

On rajoute un terme de pénalisation sur l'inconnue

$$F = b + \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix}$$

puis on modifie le second membre du système pour le neutraliser :

$$q = q_{\text{imposé}} \quad F = F_{\text{initiale}} + \alpha q_{\text{imposé}}$$

Il faut numéroté l'inconnue avant le multiplicateur de Lagrange

On calcule les réactions avec la matrice non augmentée.

Double multiplicateur de Lagrange :

On définit deux multiplicateurs de Lagrange liés par une relation d'égalité :

Fonctionnelle

Raideur

$$\frac{1}{2}q^t Kq - q^t F + (\lambda_1 + \lambda_2)^t (Aq - (b_1 + b_2)) - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

$$\begin{matrix} (b_1 & F & b_2) \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ q \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ce système est factorisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit de numéroté un multiplicateur de Lagrange avant l'inconnue et l'autre après.

Mise en œuvre dans Cast3M

On élimine les inconnues tant que ça ne conduit pas à des inversions de systèmes non triviaux, sinon on utilise les doubles multiplicateurs.

Définition de la condition :

- opérateur BLOQ ou RELA : construit la matrice A
- opérateur DEPI : construit le vecteur b

puis on utilise l'opérateur RESO :

$$(q, \lambda) = \text{RESO} (K+A) (F+b)$$

Si on veut les forces de réactions des liaisons, on utilise l'opérateur REAC

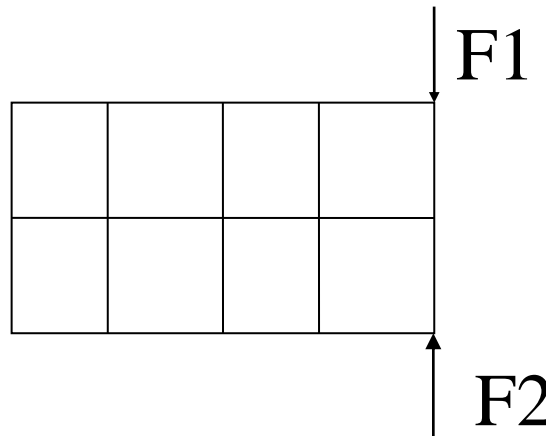
$$F_l = A^t \lambda$$

Résolution des systèmes non inversibles.

- Mode d'ensemble :

$$F_1 + F_2 = 0$$

Le système admet une
(au moins) solution



- Conditions redondantes (multiplicateur de Lagrange):

$$\underline{q_1 + q_2 = 0} \quad \underline{q_1 - q_2 = 0} \quad \underline{q_1 = 0}$$

Le système n'est pas inversible mais admet une solution.
Cas fréquent avec la génération automatique de conditions.

Méthode de résolution:

Factorisation de Crout: $K=L'DL$

Pour un système non inversible, il apparaît un terme diagonal nul dans D pendant la factorisation, et on ne peut pas continuer (division par ce terme).

Solution :

On remplace ce terme par 1 et on continue. On a alors résolu :

$$K'u=F \text{ avec } K'=K+I_{i,i}$$

$$\text{D'où : } Ku+I_{i,i}u_i = F$$

Si $u_i=0$, u est aussi solution de $Ku=F$

Sinon le système est impossible

Traitement du contact

La condition de Dirichlet non homogène devient une inégalité :

$$Aq - b \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda (Aq - b) = 0$$

Méthode itérative

- * On résout avec la condition $A_n q = b_n$
- * On vérifie le signe des λ
- * Si le signe est mauvais, on relâche la condition en ce point
- * nouvelle condition $A_{n+1} q = b_{n+1}$
- * On recommence avec cette nouvelle condition
 - * Si, en un point sans condition, on viole $Aq \geq b$, on réintroduit la condition pour l'itération suivante

On peut prouver la convergence du schéma si le système est défini positif (ce qui n'est pas nécessairement le cas)

Schéma de calcul dans Cast3M

- Nouvel opérateur : EXCI

En entrée :

- champ de déplacements q
- raideur de contacts initiale A
- champ de valeurs limites b (jeux)

En sortie :

- nouvelle raideur de contacts A_n

- Opérateurs modifiés : BLOQ et RELA

- Mots clés MINI et MAXI

pour bloquer le minimum ou le maximum de la grandeur.

- Le caractère unilatéral est stocké dans A .

Algorithme dans Cast3M

$$(q, \lambda) = \text{RESO} (K+A, F+b)$$

$$A_n = \text{EXCI} (q, \lambda, A)$$

REPETER jusqu'à convergence

$$(q, \lambda) = \text{RESO} (K+A_n, F+b)$$

$$A_{n+1} = \text{EXCI} (q, \lambda, A)$$

Intérêt : convergence en un nombre fini d'itérations ($\sim \leq 10$), les itérations se font sur des états discrets.

Dans Cast3M RESO est une procédure qui résout le problème de contact par cette méthode :

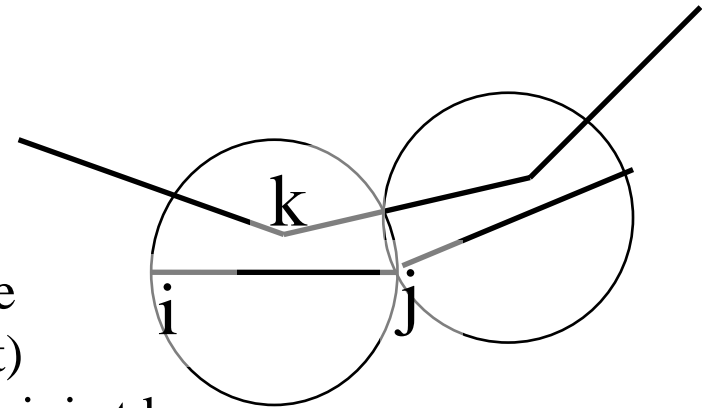
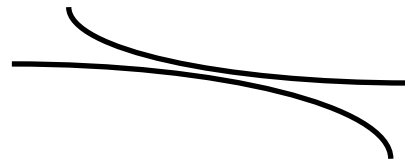
$$(q, \lambda) = \text{RESO}(K+A, F+b)$$

La raideur est d'abord condensée sur les inconnues soumises à condition.

Calcul automatique de conditions de contact

Problème (en 2D):

2 lignes maillées avec une condition de contact entre les deux lignes
calculer les matrices de contact A et les jeux b



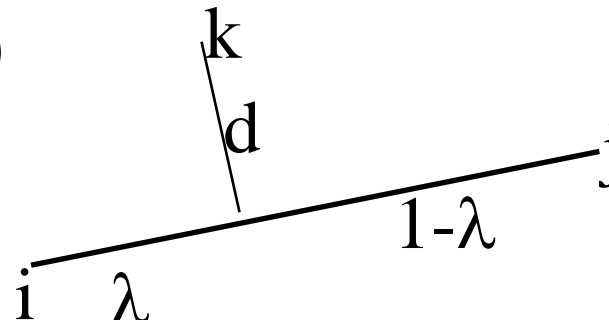
Méthode :

On définit pour chaque segment une zone d'influence

On considère un ensemble de couples (segment point)

On écrit la condition unilatérale portant sur les points i, j et k:

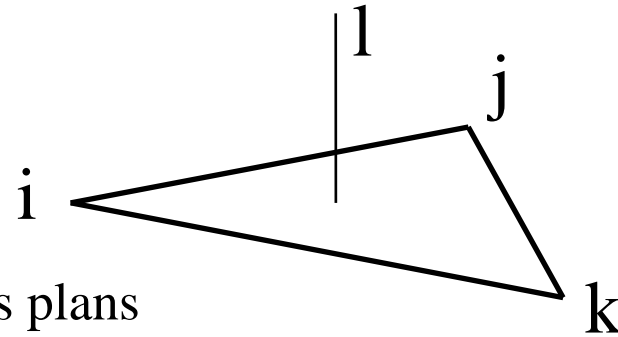
$$u_k^N - \lambda u_j^N - (1 - \lambda) u_i^N > d(k, ij)$$



Cas du 3D

Même principe. On écrit les conditions sur les ensembles de couples (triangle point)
Les conditions porteront sur 4 points :

$$u_l^N - u_i^n - \lambda(u_j^N - u_i^N) - \mu(u_k^n - u_i^n) > d(l,ijk)$$



La zone d'influence est dans ce cas limitée par des plans s'appuyant sur les cotés du triangle.

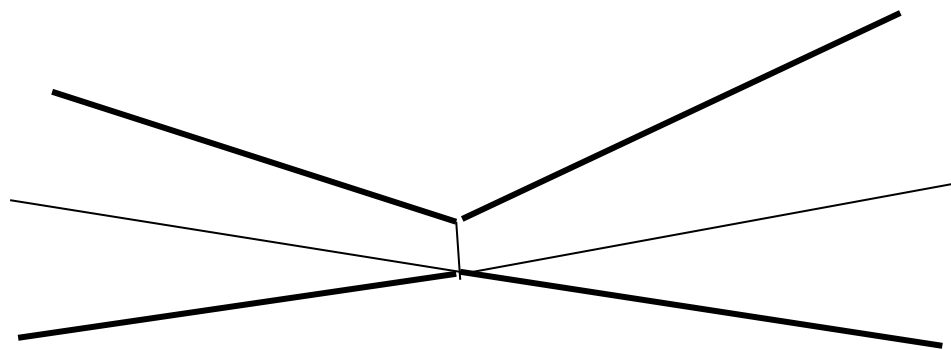
Remarques:

La condition est écrite sur la géométrie initiale

On peut définir les conditions en maître-esclave ou symétrique. Ca peut conduire à des conditions redondantes.

Quand les points sont en vis à vis (appartiennent à deux zones d'influence adjacentes), on écrit seulement une condition portant sur la direction moyenne.

Pour pouvoir passer un coin, il ne faut pas que la zone d'influence comprenne le prolongement des cotés.



Implémentation dans Cast3M

Nouvel opérateur IMPO

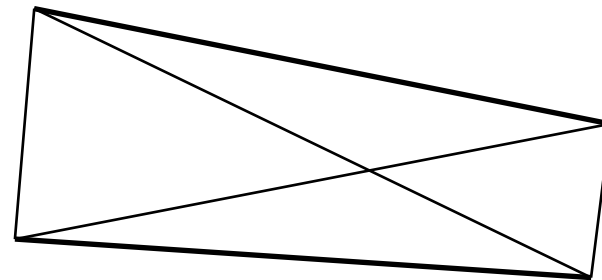
En entrée :

- maillage des 2 lignes (2D) ou des deux surfaces (3D)

En sortie :

- raideur de contact A
- jeu b

$(A, b) = \text{IMPO LIG1 LIG2}$



Traitement du frottement

Supposons connue la direction du glissement : \vec{D}

Supposons le contact résolu.

La pression de contact est le multiplicateur de Lagrange associé à la relation de contact
Par la loi de frottement on déduit le seuil de glissement μ

Soit : $(u_T > 0 \quad -\vec{T} = \mu\vec{D})$ Soit : $(u_T = 0 \quad -\vec{T} < \mu\vec{D})$

Effectuons le changement de variable : $\vec{T}' = \vec{T} + \mu\vec{D}$

Le problème devient :

Soit : $u_T > 0 \quad \vec{T}' = 0$ Soit : $u_T = 0 \quad \vec{T}' > 0$

On reconnaît un problème de contact.

Algorithme de frottement :

Rappelons que : $\mu D = A^t \lambda_T$ λ_T est la force limite de frottement.

REPETER jusqu'à convergence algorithme de contact :

$$\begin{aligned} (q, \lambda) &= \text{RESO} \quad (K + A_N, F + A'^T \lambda_T) \\ A' &= \text{EXCI} \quad (q, \lambda - \lambda_T, A) \end{aligned}$$

Remarque :

En 2D, il suffit d'une condition, en 3D il en faut deux orthogonales, λ_T est calculé d'après la direction du déplacement ou de la réaction.

$$\lambda_T = \text{EXCF} \quad (q, \lambda - \lambda_T, A)$$

Il y a une deuxième boucle itérative (boucle non linéaire générale) pour corriger λ_T en direction d'après les déplacements ou réactions et en amplitude d'après la réaction normale.

Dans Cast3M

Actualiser la géométrie	opérateur FORM
Chercher les conditions de contact	opérateur IMPO
Chercher les conditions de frottement	opérateur FRIG
REPETER	
Calculer la force de frottement	opérateur EXCF
Résoudre le problème de contact	opérateur RESO

Le critère général sur les résidus n'est pas suffisant, il faut vérifier le comportement du frottement, c à d que la réaction normale (décalée d'une itération) ainsi que la direction du déplacement ou des réactions sont bien compatible avec la force tangentielle.

En 3D, il y a trois conditions par nœud (une de contact et deux de frottement). Ça conduit facilement à des systèmes surcontraints, il faut savoir les gérer.

Il est intéressant d'éliminer des inconnues, l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange augmente considérablement la taille des problèmes.

Les itérations sur la résolution des contacts et celles sur la recherche de la direction et l'intensité du frottement sont de natures différentes : résolution d'un problème discret et résolution d'un problème continu. La première (état de contact glissement) converge bien si le problème physique est bien posé (défini positif). La deuxième (intensité direction) ne converge pas nécessairement. C'est la raison pour laquelle on utilise deux niveaux d'itérations.

Cas des éléments quadratiques

L'intégration d'un QUA8 soumis à une pression constante conduit à des forces ayant des signes opposés entre les nœuds milieux et les nœuds sommets. La condition cinématique de contact n'est pas correcte. Dans ce cas on impose de surcroît que les nœuds milieux soient sur les droites reliant les sommets.

