Implementing path-following techniques for structural non-linear analysis using Cast3M

Club Cast3M 2020, 27 novembre 2020

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Hugo Luiz OLIVEIRA, Giuseppe RASTIELLO, Alain MILLARD

Université Paris-Saclay, CEA, Service d'études mécaniques et thermiques, 91191, Gif-sur-Yvette, France

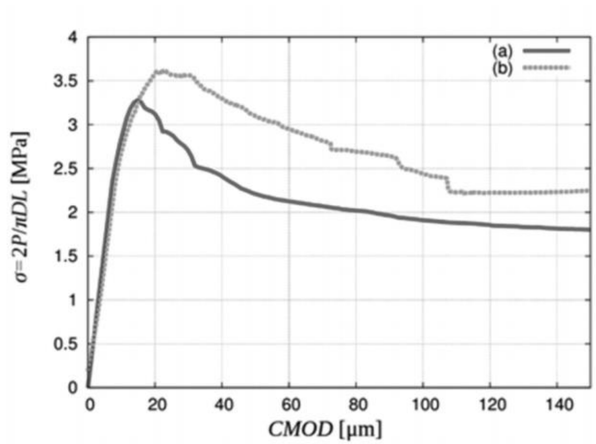
Ibrahim BITAR, Benjamin RICHARD

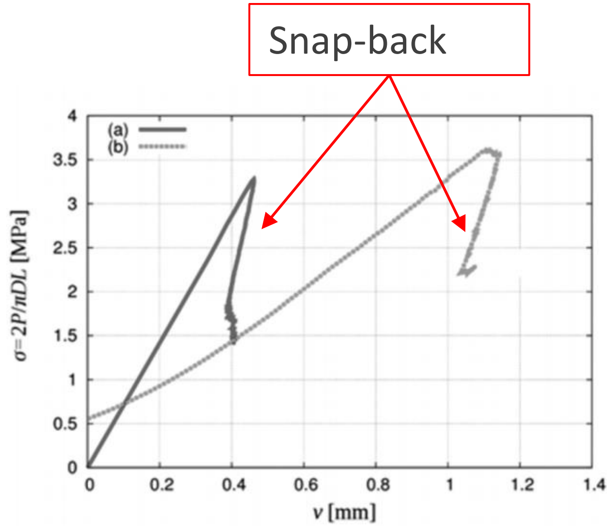
Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), PSN-EXP/SES/LMAPS, 92262 Fontenay-aux-Roses Cedex, France

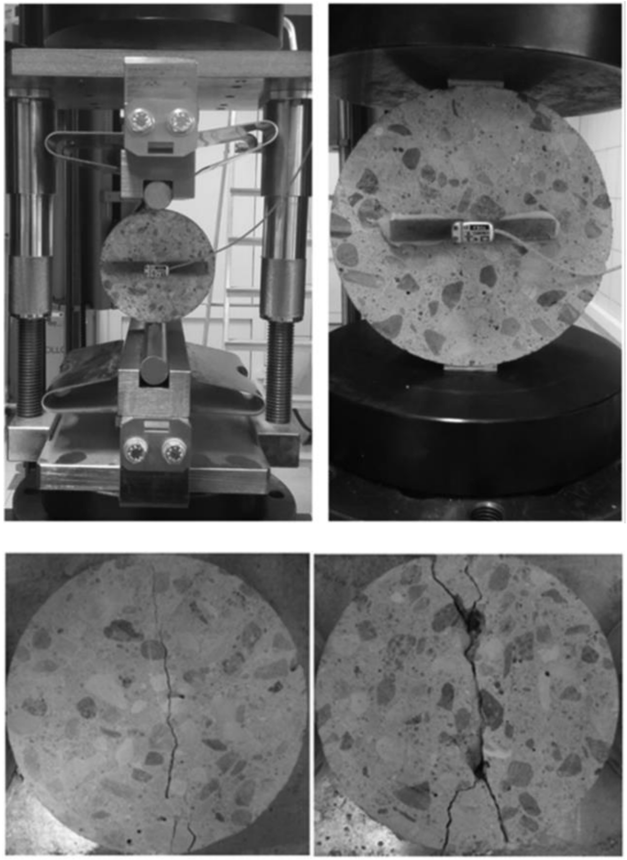
Introduction

Dans le domaine de l’ingénierie des structures, les ruptures « brusques » demeurent une préoccupation majeure.

Il est possible d’observer des comportements instables en laboratoire (ex., *essai de fendage)*



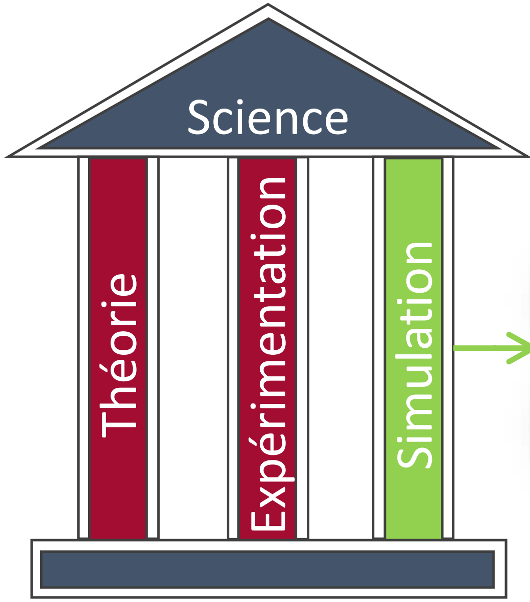


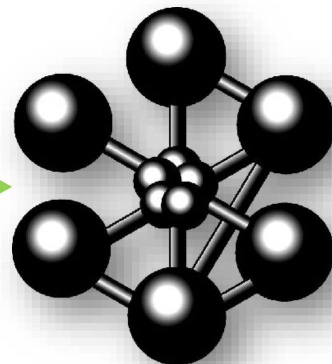


Suchorzewski, J., & Tejchman, J.. Size effect in concrete under splitting tension. In *Computational Modelling of Concrete Structures: Proceedings of EURO-C 2018, February 26-March 1, 2018, Bad Hofgastein, Austria* (p. 437). CRC Press

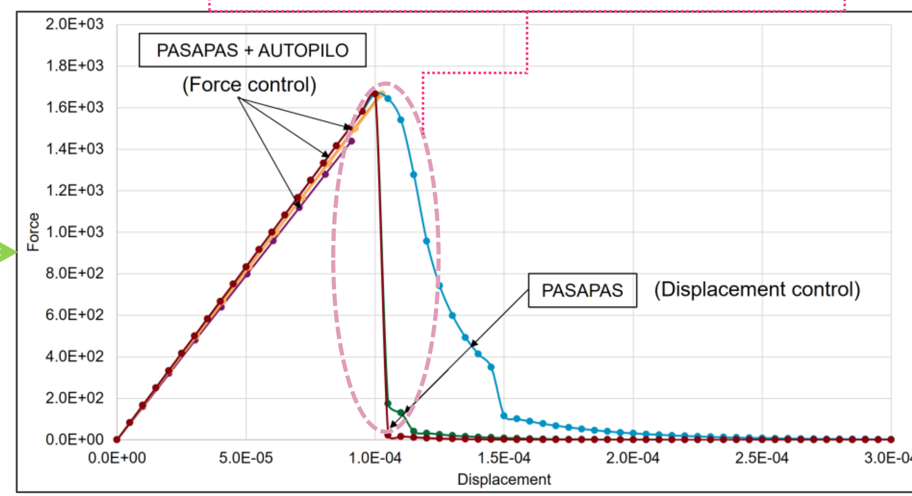
G. Rastiello, C. Boulay, S. Dal Pont, J.L. Tailhan, P. Rossi, Real-time water permeability evolution of a localized crack in concrete under loading, *Cement and Concrete Research*, 2014

Introduction





En pilotant directement le chargement, il y a une perte d'informations dans la région instable de la courbe d'équilibre



OBJECTIF

Proposer des mises à jour dans CAST3M permettant de piloter le chargement de manière indirecte. Ces mises à jour doivent être adaptée aux matériaux sensibles aux instabilités locales (lois de comportement du type adoucissement)

Plan de l'exposé

1. Formulation des éléments finis
2. Formulation EF avec contrainte cinématique
3. Stratégie de résolution
   - 3.1 Méthode CNDI (Control by Nodal Displacement Increment)
   - 3.2 Méthode CMSI (Control by Max Strain Increment)
   - 3.3 Méthode CMEP (Control by Max Elastic Predictor)
   - 3.4 Implémentation dans Cast3M
4. Applications en analyse non-linéaire de structures
5. Conclusions et perspectives

1. Formulation des éléments finis (EF)

Le chargement externe évolue pendant le calcul pour respecter un certain critère de pilotage (ex. : l'incrément de déplacement relatif entre deux points/nœuds est constant, la variation maximale d'une mesure de déformation dans le système est constante…)

- Problème standard

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}) = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \mathrm{d}v - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$$

- Formalisme de type « méthodes arc-length » (Riks, 1972; Ramm, 1980; Crisfield 1983…)

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}, \eta) = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \mathrm{d}v - \mathbf{f}_{\text{impo},0} - \eta\, \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$$

Paramètre de chargement

Direction du chargement (force)

$$P(\mathbf{d}, \eta; \tau) = 0$$

Equation de pilotage

- Une nouvelle inconnue, η, et une nouvelle équation, $P(\mathbf{d}, \eta; \tau) = 0$
- Problème linéarisé

$$\underbrace{\mathbf{f}_{\text{ext,impo}} + \eta^k\, \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{\text{int}}^k}_{:=-\mathbf{r}^k} + \delta\eta^{k+1}\, \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{K}^k\, \delta\mathbf{d}^{k+1}$$

E Riks. The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. *American Society of Mechanical Engineers*, 1972
E Ramm. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, pages 63–89. Springer, 1981
M. Crisfield. An arc-length method including line searches and accelerations. *International journal for numerical methods in engineering*, 19(9):1269–1289, 1983.

2. Formulation EF avec contrainte cinématique

- Formalisme « arc-length » avec doubles multiplicateurs de Lagrange :

Direction du chargement (force)

Equation de pilotage

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{f}_{\text{impo}} - \eta \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{d} + \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{d}_{\text{impo}} - \eta \hat{\mathbf{d}} = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{d} - \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{d}_{\text{impo}} - \eta \hat{\mathbf{d}} = 0 \\ P(\mathbf{d}, \eta; \tau) = 0 \end{cases}$$

Direction du chargement (déplacement)

Paramètre de chargement

- Problème linéarisé :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{impo}} + \eta^k \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{\text{int}}^k + \delta\eta^{k+1} \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{K}\,\delta\mathbf{d}^{k+1} + \mathbf{C}^\top \delta\boldsymbol{\lambda}_1^{k+1} + \mathbf{C}^\top \delta\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} \\ \mathbf{d}_{\text{impo}} + \eta^k \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^k + \delta\eta^{k+1} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}\,\delta\mathbf{d}^{k+1} + \mathbf{I}\,\delta\boldsymbol{\lambda}_1^{k+1} - \mathbf{I}\,\delta\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} \\ \mathbf{d}_{\text{impo}} + \eta^k \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^k + \delta\eta^{k+1} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}\,\delta\mathbf{d}^{k+1} - \mathbf{I}\,\delta\boldsymbol{\lambda}_1^{k+1} + \mathbf{I}\,\delta\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} \end{cases}$$

$$:= -\tilde{\mathbf{r}}^k \qquad := \tilde{\mathbf{f}} \qquad := \tilde{\mathbf{K}}^k \delta\mathbf{x}^{k+1}$$

- Une nouvelle inconnue, η, et une nouvelle équation :

$$P(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}, \eta; \tau) = 0$$

- Décomposition du vecteur solution (déplacements et multiplicateurs de Lagrange) :

$$\delta\mathbf{x}^{k+1} = \delta\eta^{k+1}\delta\mathbf{x}_{\text{I}}^{k+1} + \delta\mathbf{x}_{\text{II}}^{k+1}, \qquad \delta\mathbf{x}_{\text{I}}^{k+1} = (\tilde{\mathbf{K}}^k)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}, \qquad \delta\mathbf{x}_{\text{II}}^{k+1} = -(\tilde{\mathbf{K}}^k)^{-1}\tilde{\mathbf{r}}^k$$

3. Stratégie de résolution de l'équation de pilotage

- Décomposition du champs de déplacement

$$\delta \mathbf{d}^{k+1} = \delta\eta^{k+1}\delta \mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1} + \delta \mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}$$

- Si **P est différentiable** → calcul direct de l'incrément du facteur de charge (De Borst, 1987)

$$\delta\eta^{k+1} = -\frac{P^k + (\partial_{\mathbf{d}} P)^k \delta \mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}}{(\partial_{\mathbf{d}} P)^k \delta \mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1} + (\partial_\eta P)^k}$$

Incrément de la variable pilotée (ex., une mesure de déformation, la variable d'endommagement, une variable interne de la loi de comportement, …)

- Si **P n'est pas différentiable** $\quad P^{k+1} = \max_{\alpha \in \Omega^h} (\Delta z_\alpha^{k+1}) - \tau = 0$

  - Approche itérative de type « intervalles emboités » (Lorentz et Badel, 2004; Rastiello et al., 2019)
  - Résolution de l'équation de pilotage pour chaque entité

$$P_\alpha^{k+1} = \Delta z_\alpha^k + \delta z_\alpha^{k+1}(\delta\eta_\alpha^{k+1}) - \tau = 0 \qquad \alpha \in \Omega^h$$

$$\delta z_\alpha^{k+1}(\delta\eta_\alpha^{k+1}) = \delta z_\alpha^{k+1}(\delta\eta_\alpha^{k+1}; \delta \mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1}, \delta \mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1})$$

Quantités connues

  - Réduction progressive du domaine d'admissibilité du facteur de chargement
  - Choix du facteur de chargement

R. De Borst, Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures*, 25(2):211–224, 1987

E. Lorentz, & P. Badel, A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60: 499-526, 2004

G. Rastiello, F., Riccardi, & B. Richard. Discontinuity-scale path-following methods for the embedded discontinuity finite element modeling of failure in solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349, 431-457, 2019

3.1 Exemples d'équations de pilotage : CNDI

1 - Pilotage sur la combinaison linéaire d'un ensemble de DDLs – CNDI (De Borst, 1987…)

- ❑ Fonction de pilotage

Vecteur de sélection des DDLs

$$P^{k+1} = \boxed{\mathbf{p}^{\mathsf{T}}}\Delta\mathbf{d}^{k+1} - \Delta\tau = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}(\Delta\mathbf{d}^{k} + \delta\mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1}\delta\eta^{k+1} + \delta\mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}) - \tau = 0$$

- ❑ Résolution

$$\delta\eta^{k+1} = \frac{\tau - a_0}{a_1} \qquad a_0 = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}(\Delta\mathbf{d}^{k} + \delta\mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}) \qquad a_1 = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\delta\mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1}$$

- ❑ Points forts : méthode <u>très robuste</u>, reproduction des <u>méthodes expérimentales</u> de pilotage indirect du chargement, <u>calcul direct du facteur de chargement</u> (aucune procédure itérative n'est à prévoir), <u>pas de dépendance aux lois constitutives</u>

- ❑ Faiblesses : le choix des DDLs pilotés est « arbitraire » et nécessite la connaissance « à priori » du processus d'endommagement/fissuration, sélection de la solution dissipative non garantie

R. De Borst, Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures*, 25(2):211–224, 1987

3.2 Exemples d'équations de pilotage : CMSI

2 - Pilotage sur une mesure scalaire de l'incrément maximal de déformation dans le domaine – CMSI

- Fonction de pilotage

$$P^{k+1} = \max_{\alpha \in \Omega^h} (\mathbf{q}_\alpha^\mathsf{T} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^{k+1}) - \tau = 0 \qquad \mathbf{q}_\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,n} / \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,n}\|$$

- Résolution point de Gauss par point de Gauss

$$\delta\eta_\alpha^{k+1} = \frac{\tau - a_{\alpha,0}}{a_{\alpha,1}} \quad a_{\alpha,0} = \mathbf{q}_\alpha^\mathsf{T} \mathbf{B}_\alpha (\Delta \mathbf{d}^k + \delta \mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}) \qquad a_{\alpha,1} = \mathbf{q}_\alpha^\mathsf{T} \mathbf{B}_\alpha \delta \mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1}$$

- Points forts : méthode très robuste, aucun choix arbitraire n'est nécessaire, <u>pas de dépendance aux lois constitutives</u>

- Faiblesses : sélection de la solution dissipative non garantie

3 - Pilotage sur le prédicteur élastique du critère d'endommagement – CMEP (Lorenz et Badel, 2004)

- Fonction de pilotage

Prédicteur élastique - variables internes figées au pas de temps précèdent

$$P^{k+1} = \max_{\alpha \in \Omega^h} \left(f_\alpha^{\text{elas},k+1} \right) - \tau = 0, \qquad \tau > 0$$

$$f_\alpha^{\text{elas}}(0) = f(Y_\alpha(\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0), \kappa_{\alpha,n}), \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0), \kappa_{\alpha,n}) \quad \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0) = \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha,n} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^k + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha,\text{II}}^{k+1}$$

- Résolution point de Gauss par point de Gauss : <u>linéarisation du prédicteur élastique autour d'une solution de référence</u>

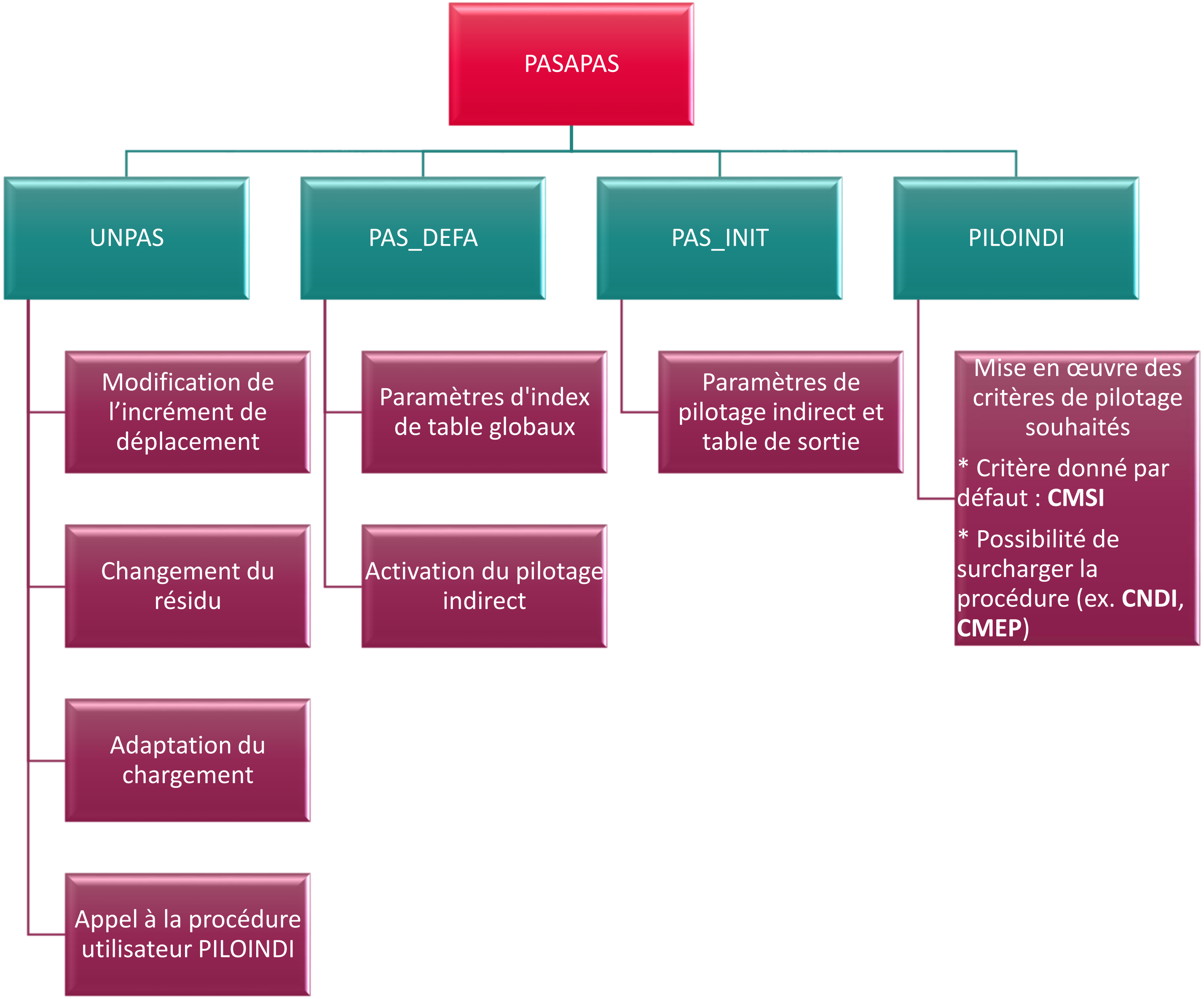
$$\delta\lambda_\alpha^{k+1} = \frac{\tau - a_{\alpha,0}}{a_{\alpha,1}} \quad a_{\alpha,0} = f_\alpha^{\text{elas}}(0) \qquad a_{\alpha,1} = \partial_{\delta\lambda} f_\alpha^{\text{elas}}(0)$$

$$f_\alpha^{\text{elas}}(0) = f(Y_\alpha(\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0), \kappa_{\alpha,n}), \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0), \kappa_{\alpha,n}) \quad \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{k+1}(0) = \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha,n} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^k + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha,\text{II}}^{k+1}$$

- Points forts : <u>sélection de la solution dissipative</u>
- Faiblesses : recherche itérative de l'incrément de chargement (<u>cout de calcul !</u>), implémentation numérique dépendante de la loi de comportement

E. Lorentz, E. and P. Badel, A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60: 499-526, 2004

3.4 Implémentation dans Cast3M



3.4 Implémentation dans Cast3M

Programme principal

```
*----- Pilotage en force ---
****************************************
TAB1 . 'PILOTAGE_INDIRECT'          = VRAI ;
TAB1 . 'FORCES_PILOTEES'            = Fchapeau ;
TAB1 . 'PARAMETRE_DE_PILOTAGE'      = evol1 ;
```

```
*----- Pilotage en déplacement ---
****************************************
TAB1 . 'PILOTAGE INDIRECT'          = VRAI ;
TAB1 . 'DEPLACEMENTS_PILOTES'       = Dchapeau ;
TAB1 . 'PARAMETRE_DE_PILOTAGE'      = evol1 ;
```

+

Procédure PILOINDI (appelée à chaque itération d'un pas)

```
*----- Procedure utilisateur ---
****************************************
'DEBPROC' PILOINDI
          TAB1   *'TABLE'
          DEPT   *'CHPOINT'
          DELTAU *'CHPOINT'
          DUI    *'CHPOINT'
          DUII   *'CHPOINT'
          DTAU   *'FLOTTANT';
****************************************
...
...
****************************************
'FINPROC' D ETA ;
```

- TAB1 : Cette table est la même que PRECED de UNPAS. Elle contient des informations générales concernant la structure, le matériau, le modèle...
- DEPT : Champ de déplacement accumulé depuis le début de l'analyse jusqu'au pas de temps actuel
- DELTAU : Variation de déplacement accumulée dans le pas de temps courant $\Delta\mathbf{d}^k$
- DUI : Incrément de déplacement $\delta\mathbf{d}_{\mathrm{I}}^{k+1}$
- DUII : Incrément de déplacement $\delta\mathbf{d}_{\mathrm{II}}^{k+1}$
- DTAU : Valeur de τ valide pour le pas de temps courant
- D ETA : Valeur de $\delta\eta$ (en fonction du critère de pilotage);

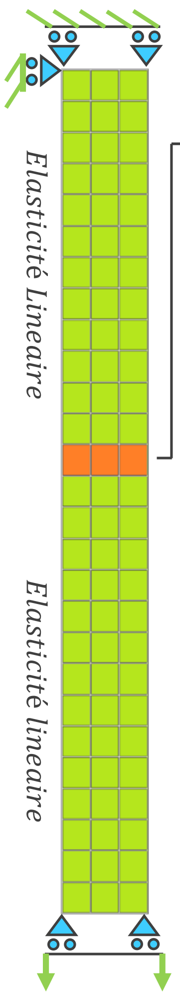
3.4 Implémentation dans Cast3M

Exemple **simple** de « surchargement » de la procédure PILOINDI

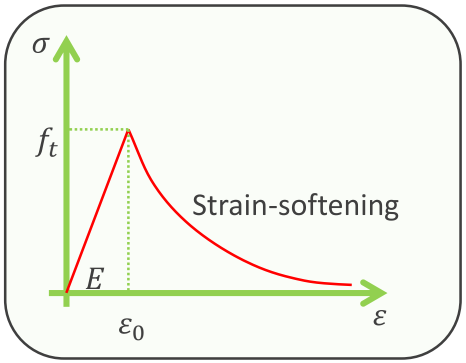
(Formulation CNDI)

```
'DEBP' PILOINDI   PRECED*'TABLE'  U*'CHPOINT'
                   DU*'CHPOINT' DUI*'CHPOINT’
                   DUII*'CHPOINT' DTAU*'FLOTTANT';

  WTAB = PRECED.'WTABLE‘ ;
  MODTOT = WTAB.'MO_TOT‘ ;

  * Équation de pilotage indirect
  UU3 = 'EXTR' DU 'UX' PIN.((NELX+3)/2) ;
  UU2 = 'EXTR' DU 'UX' PIN.((NELX+1)/2) ;
  Pk  = (UU3 - UU2) + (-1.0*DTAU) ;

  * Dérivée de l’équation de pilotage par rapport au
  déplacement
  HK =        'MANU' 'CHPO' PIN.((NELX+3)/2) 'UX' 1. ;
  HK = HK + ('MANU' 'CHPO' PIN.((NELX+1)/2) 'UX' -1.) ;

  COMP_PF = 'MOTS' 'UX' 'UY' ;

  * Calcul de D_eta
  AUX1 = 'XTY' HK duI  COMP_PF COMP_PF ;
  AUX2 = 'XTY' HK duII COMP_PF COMP_PF ;

  D_eta= (-1.0)*((Pk+AUX1)/AUX2) ;

'FINPROC' D_ETA ;
```

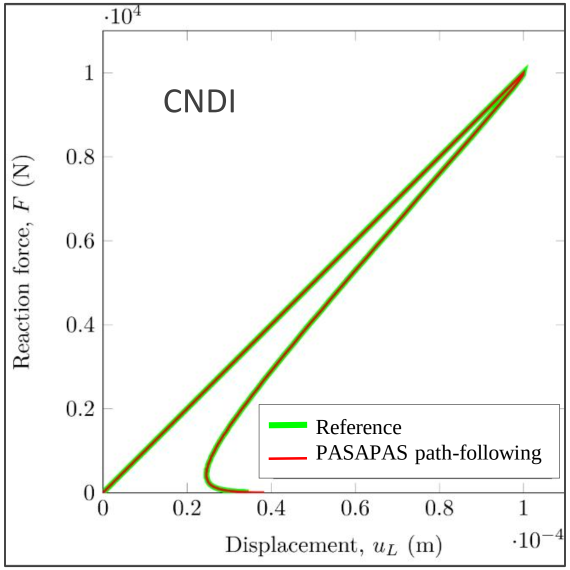
4.1 Barre affaiblie soumise à un chargement de traction (2D, dépl. piloté indirectement)

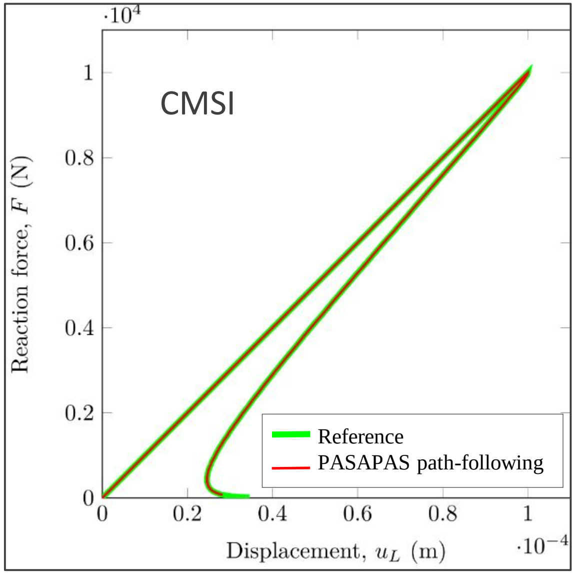


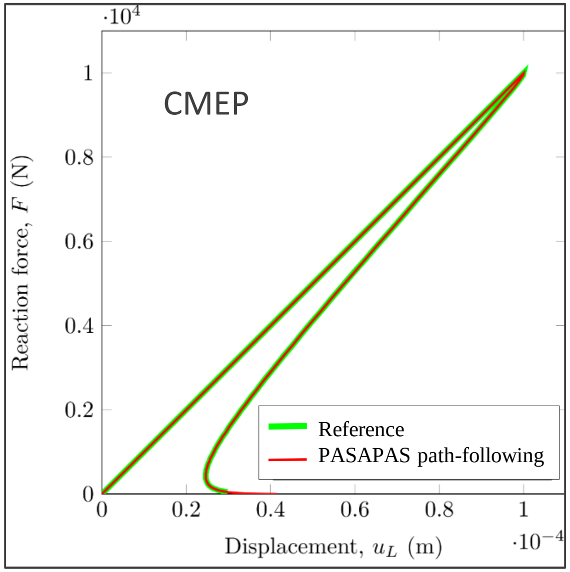
$$\boldsymbol{d_{imp}} = \eta \hat{\imath}$$



Relation de comportement
(loi d'endommagement de Mazars)

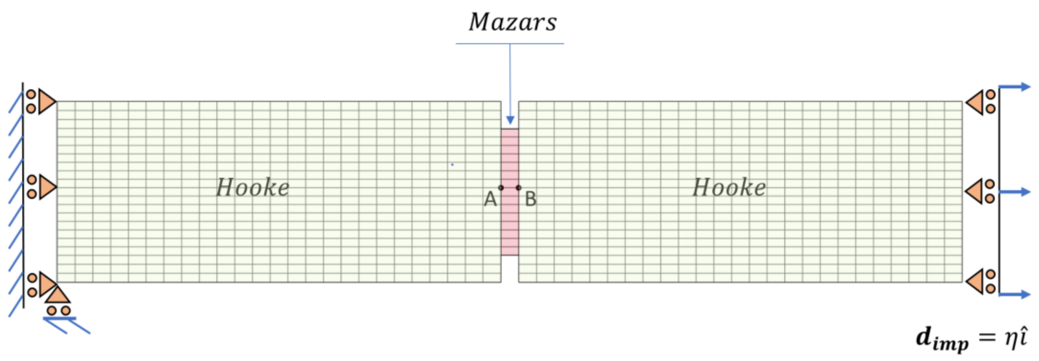


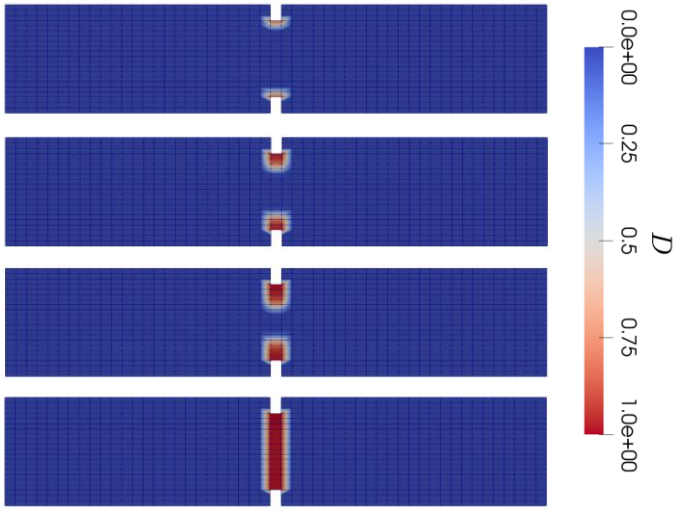


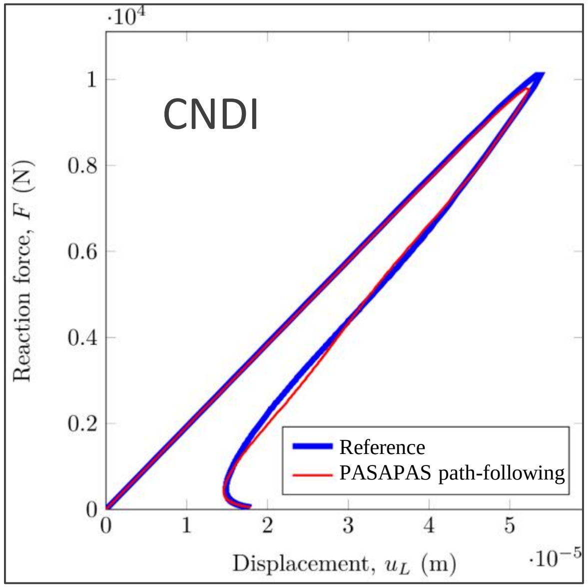


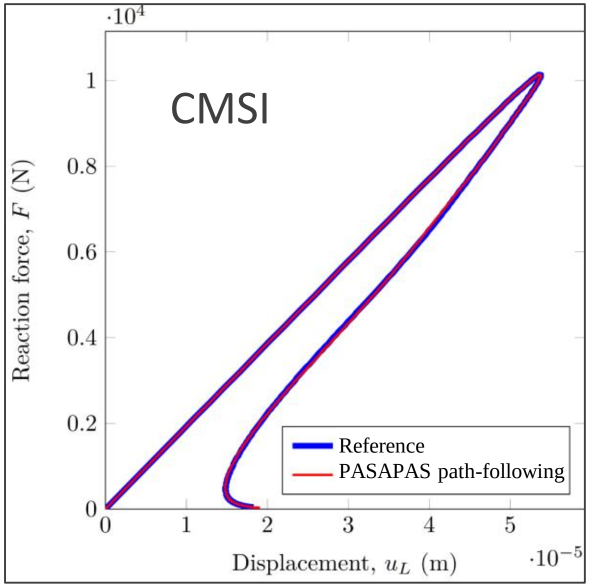
- Déplacement piloté indirectement
- Courbes d'équilibre pour trois différentes équations de pilotage du chargement
- Obtention de la courbe complète, y compris la phase de « snap-back »

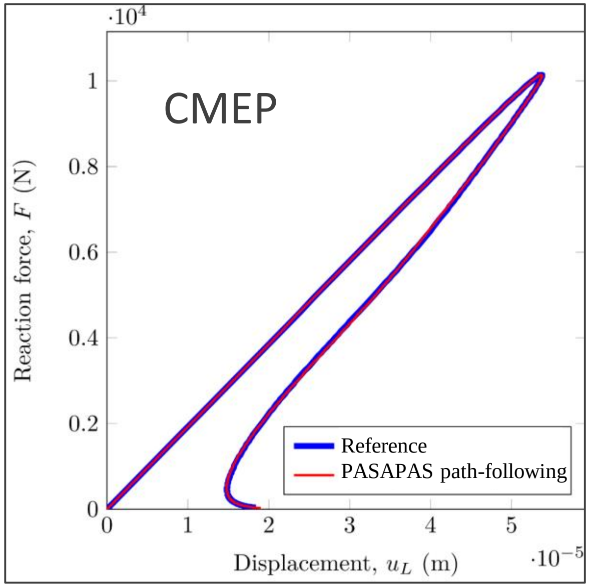
4.2 Barre avec encoches soumise à un chargement de traction (2D, dépl. piloté indirectement)





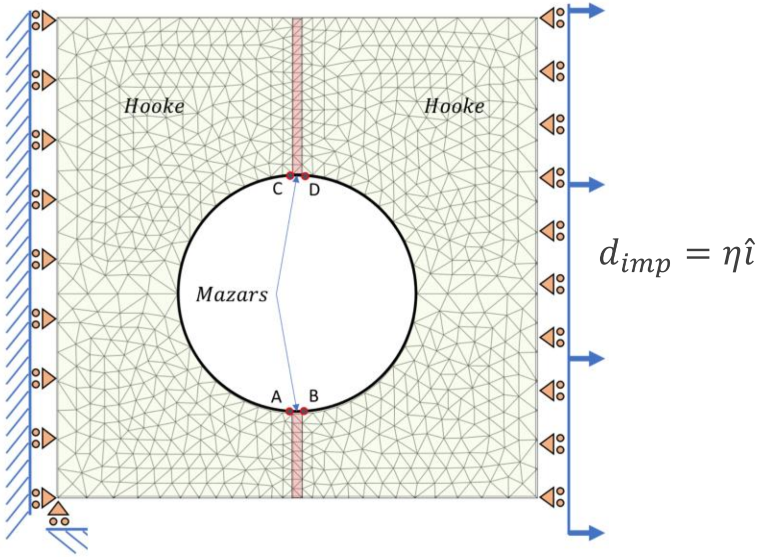


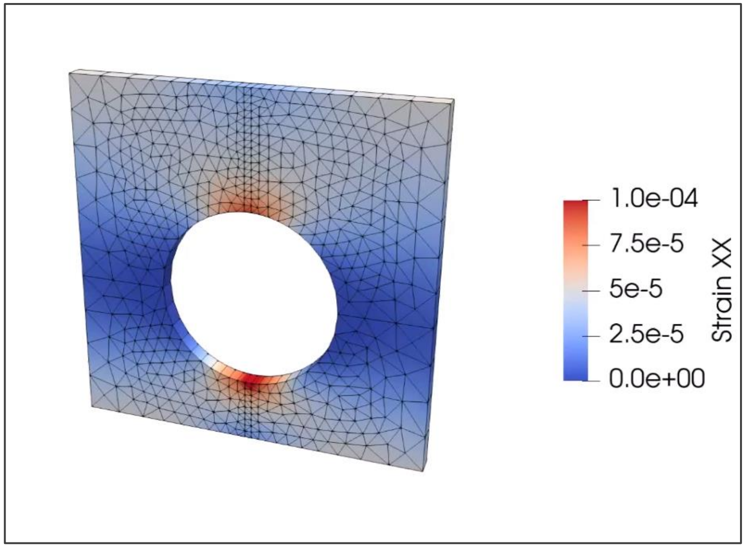


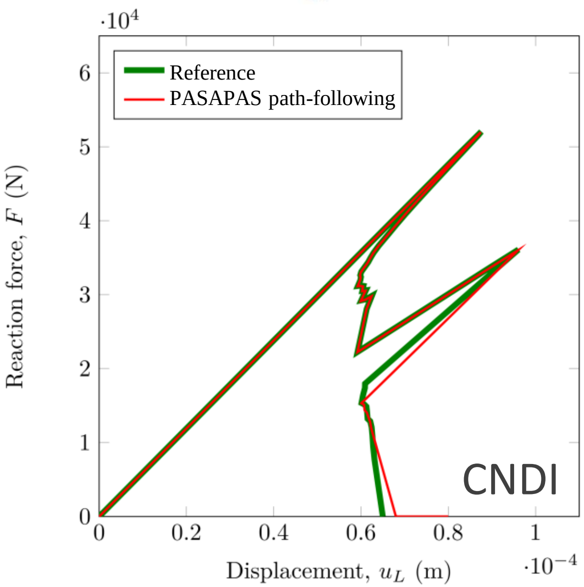


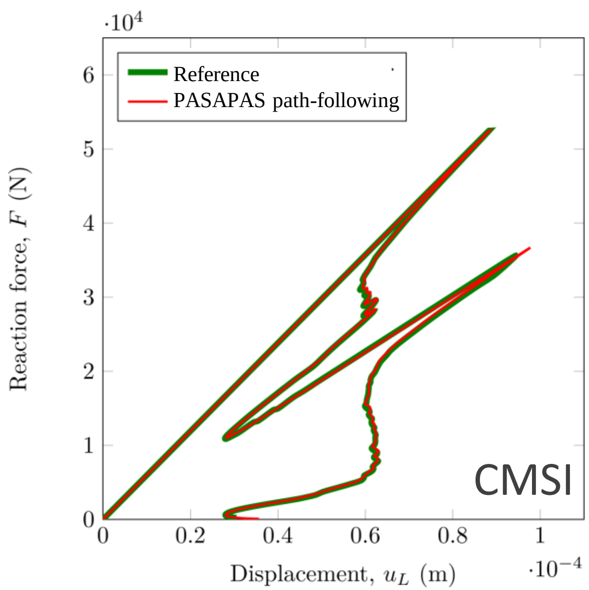
4. Applications en analyse non-linéaire de structures

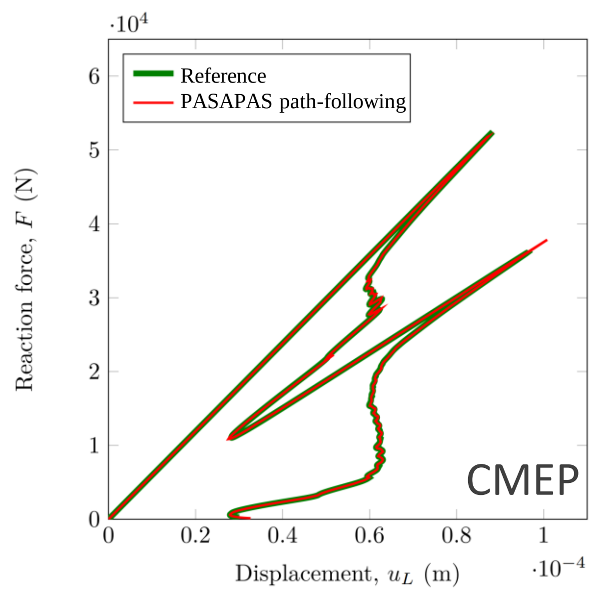
4.3 Plaque trouée (3D, dépl. piloté indirectement)











5. Conclusions et perspectives

Conclusions

- Bon fonctionnement des techniques de pilotage indirect de chargement dans l'environnement Cast3M
- Flexibilité pour mettre en œuvre différents types de critères (ex. : CNDI, CMSI, CMEP, autre selon besoin)
- Possibilité de capturer des courbes d'équilibre sujettes à des instabilités de type « *snap-back* » et « *snap-through* »
- Capacité à gérer simultanément des conditions limites (forces/déplacements) pilotées et non pilotées

Perspectives

- Mise à disposition des premiers développements dans la version Cast3M 2021
- Nouvelle procédure PILOINDI : implémentation standard et possibilité de surcharger la procédure pour définir des critères de pilotage définis par l'utilisateur
- Rédaction et mise à disposition de notices et de supports théoriques

Merci de votre attention !

Implementing path-following techniques for structural non-linear analysis using Cast3M

Club Cast3M 2020, 27 novembre 2020

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Hugo Luiz OLIVEIRA, Giuseppe RASTIELLO, Alain MILLARD

Université Paris-Saclay, CEA, Service d'études mécaniques et thermiques, 91191, Gif-sur-Yvette, France

Ibrahim BITAR, Benjamin RICHARD

Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), PSN-EXP/SES/LMAPS, 92262 Fontenay-aux-Roses Cedex, France