



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

G- θ : UNE MÉTHODE POUR LES « CRACKS » !

« Synthèse sur la méthode G- θ et son implémentation dans Cast3M »

Benoit Prabel, Rapport DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/2019-65797/A, CEA, 2019

Club Cast3M, 2019-11-29



Quelques références (liste non exhaustive)

- [1] Alan Arnold Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582-593) :163–198, 1921.
- [2] Harold M Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Trans AIME, J. Appl. Mech.*, 6 :49–53, 1939.
- [3] George R Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 24 :361–364, 1957.
- [4] James R Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968.
- [5] Ph Destuynder, M Djaoua, and S Lescure. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2(1) :113–135, 1983.
- [6] CF Shih, B Moran, and T Nakamura. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of fracture*, 30(2) :79–102, 1986.
- [7] XZ Suo. Application de la méthode THETA pour calculer le taux de restitution d'énergie en rupture élastique au moyen du programme Castem 2000. Rapport DMT 87-554, CEA, 1987.
- [8] X.Z. Suo and A. Combescure. Une nouvelle méthode pour la stabilité de propagation de fissures en mécanique de la rupture élastique : Méthode II- θ . Rapport DMT 88-479, CEA, 1988.
- [9] XZ Suo and A Combescure. Sur une formulation mathématique de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en théorie de la rupture fragile. Rapport DMT 89-135, CEA, 1989.
- [10] A. Combescure. La méthode G TETA : Rapport de synthèse. Rapport DMT 90-206, CEA, 1990.

Quelques références (liste non exhaustive)

- [11] A Combescure and XZ Suo. Energy release rate and J integral for cracks propagating in non-homogeneous media. Part I : Problem formulation. Rapport DMT 91-316, CEA, 1991.
- [12] XZ Suo and J Brochard. Introduction dans Castem2000 de la méthode G-THETA pour les éléments de coques minces. Rapport DMT 91-279, CEA, 1991.
- [13] XZ Suo and A Combescure. Energy release rate and J integral for cracks propagating in non-homogeneous media. Part II : Finite element applications. Rapport DMT 91-446, CEA, 1991.
- [14] Xiao-Zheng Suo and Alain Combescure. On the application of G (Θ) method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nuclear Engineering and Design*, 135(2) :207–224, 1992.
- [15] J Brochard and A Toquet. Analyses relatives au calcul des valeurs locales de G aux noeuds d'un front de fissure tridimensionnel. Rapport DMT 93-152, CEA, 1993.
- [16] J Brochard and XZ Suo. Le taux de restitution d'énergie G en mécanique de la rupture non-linéaire. Formulation de la méthode G- θ et description de la programmation dans Castem2000. Rapport DMT 94-640, CEA, 1994.
- [17] XZ Suo and J Brochard. Calcul élasto-plastique d'une éprouvette CT bimétallique avec une fissure proche de l'interface. Rapport DMT 94-132, CEA, 1994.
- [18] MP Valeta and J Brochard. Description des procédures pour le calcul de G en 3D avec Castem2000. Rapport DMT 94-109, CEA, 1994.
- [19] MP Valeta and J Brochard. Tests de validation des méthodes de calcul de J pour des problèmes thermo-mécaniques plans. Rapport DMT 94-507, CEA, 1994.
- [20] M Attigui, C Petit, and MP Valeta. Identification des paramètres de fissuration en élasto-dynamique par la méthode G-THETA. Rapport DMT 95-675, CEA, 1995.
- [21] XZ Suo and J Brochard. Découplage des modes de rupture mixte par une méthode énergétique. Rapport DMT 95-068, CEA, 1995.

Quelques références (liste non exhaustive)

- [22] MP Valeta. Calcul de J dans 4 configurations bidimensionnelles sous chargement thermo-mécanique. Rapport DMT 96-179, CEA, 1996.
- [23] MP Valeta and JM Brieu. Rappel de la démonstration de l'expression "classique" du taux de restitution de l'énergie - méthode G-THETA. Rapport DMT 96-618, CEA, 1996.
- [24] A Brisset and M Lecoutre. Validité de l'intégrale J en élastoplasticité en cas de déchargement non monotone. Implantation de critères de décharge dans le code de calcul Castem2000. Rapport DMT 97-537, CEA, 1997.
- [25] XZ Suo and MP Valeta. Introduction dans Castem2000 de l'intégrale $C^*(h)$ conditionnant la rupture par le fluage primaire. Rapport DMT 97-002, CEA, 1997.
- [26] XZ Suo and MP Valeta. Taux de restitution de l'énergie et l'intégrale J en grands déplacements. Rapport DMT 97-157, CEA, 1997.
- [27] A Brisset. Validité de l'intégrale J en élastoplasticité. Nouveaux critères de décharge dans le code de calcul Castem2000. Rapport DMT SEMT/LAMS/RT/98-038/A, CEA, 1998.
- [28] M Gosz, J Dolbow, and B Moran. Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15) :1763–1783, 1998.
- [29] XZ Suo. Virtual crack extension in geometries under large displacements/rotations. Rapport DMT 98-031, CEA, 1998.
- [30] M Gosz and B Moran. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3) :299–319, 2002.
- [31] Benoit Prabel. *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2007.

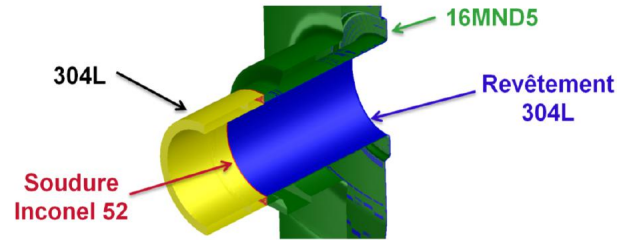
Quelques références (liste non exhaustive)

- [32] Vicente F González-Albuixech, Eugenio Giner, José E Tarancón, F Javier Fuenmayor, and Anthony Gravouil. Domain integral formulation for 3-d curved and non-planar cracks with the extended finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 264 :129–144, 2013.
- [33] Clément Roux-Langlois. *Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes : En vue de l'identification de lois de propagation de fatigue*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2014.
- [34] Benoit Trollé. *Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [35] Sylvie Pommier. Basics elements on linear elastic fracture mechanics and crack growth modeling. Doctoral course, 2017.
- [36] Matthieu Le Cren. *Propagation robuste de défauts en 3D*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2018.
- [37] G Gibert. *Propagation de fissures en fatigue par une approche X-FEM avec raffinement automatique de maillage*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2019.
- [38] Huy Duong Bui. *Fracture mechanics : inverse problems and solutions*, volume 139. Springer, 2006.
- [39] Gérard A Maugin. *Configurational forces : thermomechanics, physics, mathematics, and numerics*. Chapman and Hall/CRC, 2010.

etc.

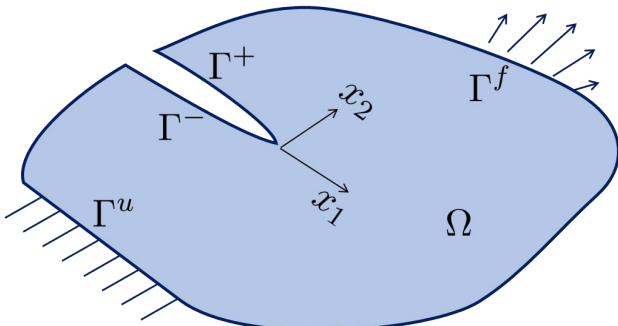
Introduction

- Problématique :
Intégrité des structures dans des configurations variées et complexes

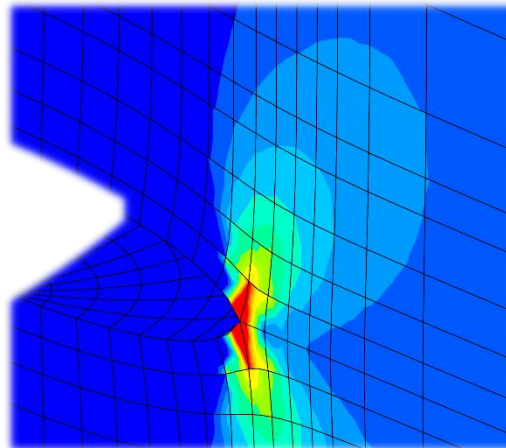


- Ingrédients scientifiques nécessaires :

Théorie :
mécanique de la rupture



Numérique :
méthodes des éléments finis

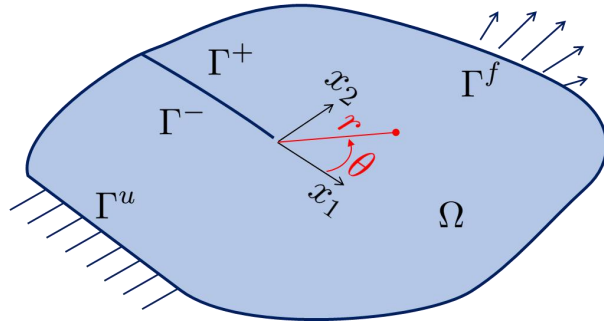


Expériences :
essais



Rappels de mécanique de la rupture

- Problème d'élasticité linéaire



$$\int_{\Omega} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{u}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad \forall \underline{u}^* \text{ C.A.0}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{D} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$$

- Solution asymptotique de Westergaard, 1939

$$\sigma_{11}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^{II}(\theta) + T + O(\sqrt{r})$$

$$\sigma_{22}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^{II}(\theta) + O(\sqrt{r})$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^{II}(\theta) + O(\sqrt{r})$$

$$\sigma_{13}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{13}^{III}(\theta) + O(\sqrt{r})$$

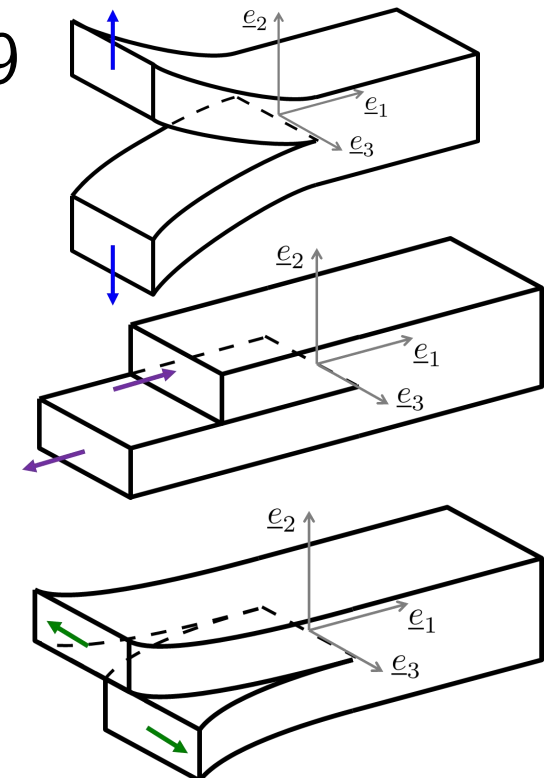
$$\sigma_{23}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{23}^{III}(\theta) + O(\sqrt{r})$$

$$\sigma_{33}(r, \theta) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + T_3 + O(\sqrt{r})$$

Mode I

Mode II

Mode III



Rappels de mécanique de la rupture

- Théorie de Griffith, 1920 :

Propagation si $G \geq 2\gamma$

Taux de restitution d'énergie

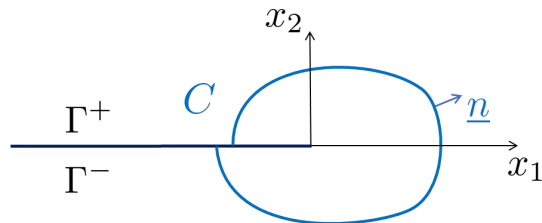
$$G = -\frac{dW}{dA}$$

Énergie de décohésion surfacique

- Irwin, 1957 montre que :

$$G = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2$$

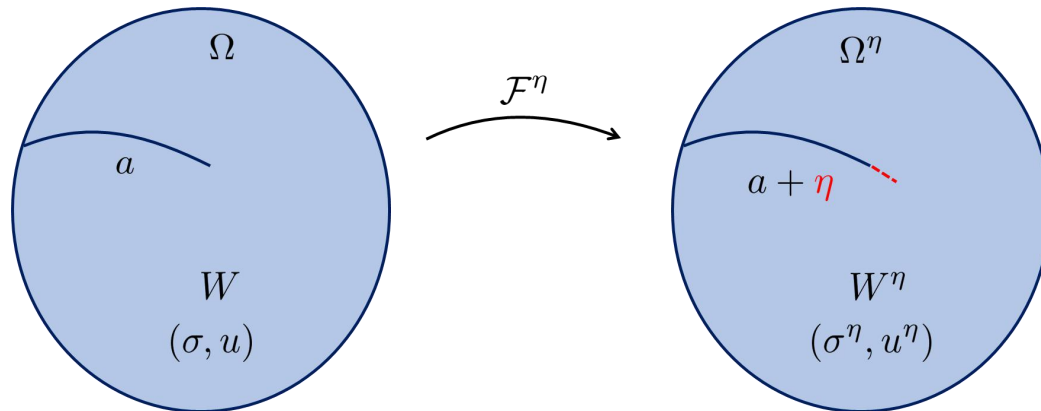
- Rice, 1968 introduit l'intégrale de contour J :



$$J = \int_C \left(w^{def} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma = G$$

La méthode G- θ

- Destuynder, 1983 propose la perturbation :



$$\Omega \longrightarrow \Omega^\eta = \Omega$$

$$\underline{M} \longmapsto \underline{M}^\eta = \mathcal{F}^\eta(\underline{M}) = \underline{M} + \eta \underline{\theta}$$

- (i) $\underline{\theta}$ est parallèle au plan de fissure,
- (ii) $\underline{\theta}$ est constant et unitaire ($\text{div} \underline{\theta} = 1$) dans un voisinage du front de fissure,
- (iii) $\underline{\theta}$ est nul à partir d'un voisinage plus large.

pour évaluer $G = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W^\eta - W}{\eta}$ avec $\begin{cases} W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) d\Omega \\ W^\eta = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\eta} \text{tr}(\sigma^\eta \text{grad} u^\eta) d\Omega^\eta \end{cases}$

- Développement en série : $\begin{cases} \sigma^\eta = \sigma + \eta \sigma^1 + O(\eta^2) \\ u^\eta = u + \eta u^1 + O(\eta^2) \end{cases}$
- On élimine σ^1 et u^1 en utilisant notamment :

- ▷ les problèmes d'élasticité sur Ω et Ω^η
- ▷ la réciprocité

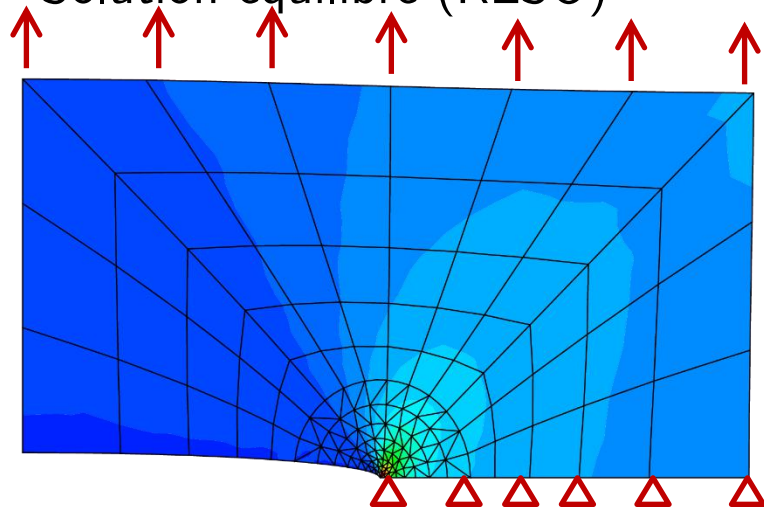
La méthode G- θ

- Après calculs et passage à la limite, on a l'expression finale :

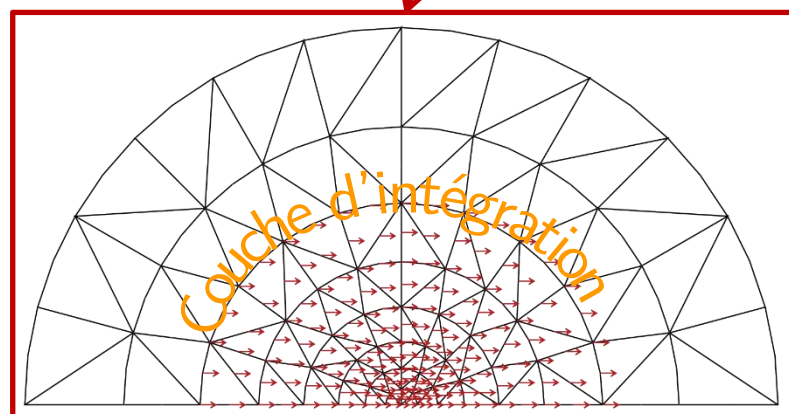
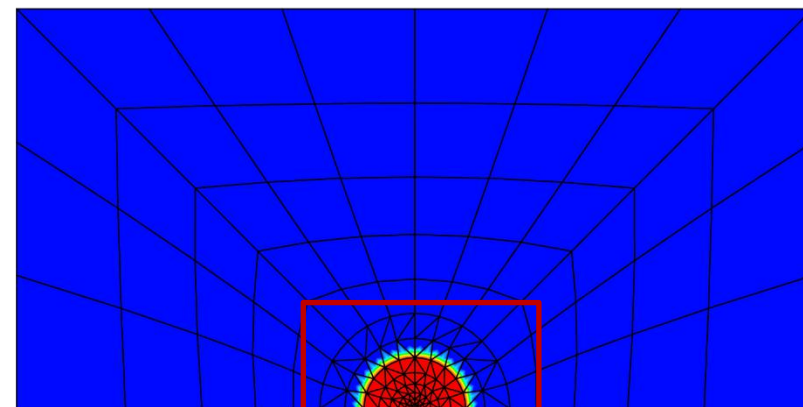
$$G = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) \text{div} \theta d\Omega$$

- Exemple de calcul :

1. Solution équilibre (RESO)



2. Calcul de G (G_THETA) : définition de θ



La méthode G- θ

● Termes complémentaires

▷ Forces extérieures

on ajoute aux équations d'équilibre : $\int_{\Omega^\eta} f^\eta \cdot u^* d\Omega^\eta = \int_{\Omega} (f + \eta \nabla f \theta) \cdot u^* (1 + \eta \operatorname{div} \theta) d\Omega$

et, in fine à G : $\int_{\Omega} f u \operatorname{div} \theta d\Omega + \int_{\Omega} \nabla f u \theta d\Omega = \int_{\partial\Omega} f u \theta d\Gamma - \int_{\Omega} f \nabla u \theta d\Omega$

Rem : attention, en général, $-\int_{\Gamma} f \nabla u \theta d\Gamma \neq -\int_{\Gamma} f d\Gamma \cdot \int_{\Gamma} \nabla u \theta d\Gamma$

▷ Thermo-élasticité

on retient au 1^{er} ordre $\begin{cases} T^\eta = T + \eta \theta \nabla T \\ \alpha^\eta = \alpha + \eta \theta \nabla \alpha \end{cases}$

on calcule ...

et, in fine,

$$G = \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} w^{\text{def}} \operatorname{div} \theta d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma) (\alpha \nabla T \theta + \theta \nabla \alpha T) d\Omega$$

- ▷ Idem pour les matériaux non-homogènes, bi-matériaux, élasto-plastique, en grands déplacements, en dynamique, sous chargement en déformations imposées, avec frottement sur les lèvres de fissure

La méthode G- θ

- Formulation finale actuellement dans Cast3M :

$$\begin{aligned}
 G = & \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : (\nabla \underline{u} \nabla \underline{\theta}) d\Omega}_{S20} - \underbrace{\int_{\Omega} w^{def} \operatorname{div} \underline{\theta} d\Omega}_{S10} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underline{f} \nabla \underline{u} \underline{\theta} d\Gamma}_{S50} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \alpha \nabla T \underline{\theta} d\Omega}_{S40} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \alpha T \underline{\theta} d\Omega}_{S70} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} \nabla D \underline{\underline{\epsilon}}^{el} : \underline{\underline{\epsilon}}^{el} \underline{\theta} d\Omega}_{S60} - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\delta w^{pl}}{\delta T} \nabla T \underline{\theta} d\Omega}_{S120} \\
 & + \underbrace{\int_{\Gamma_{1-2}} (w_1 - w_2) \underline{\theta} n d\Gamma}_{S100} - \underbrace{\int_{\Gamma_{1-2}} \underline{\underline{\sigma}} n (\nabla \underline{u}_1 - \nabla \underline{u}_2) \underline{\theta} d\Gamma}_{S110} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}^2 \operatorname{div} \underline{\theta} d\Omega}_{S130} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{u}} \nabla \underline{u} \underline{\theta} d\Gamma}_{S140} - \underbrace{\int_{\Omega} \rho \dot{\underline{u}} \nabla \dot{\underline{u}} \underline{\theta} d\Gamma}_{S141} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u} \nabla \underline{\theta} d\Omega}_{S150} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{\underline{\epsilon}}^{imp} \underline{\theta} d\Omega}_{S160}
 \end{aligned}$$

La méthode G- θ

● Remarque :

- ▷ Plutôt que l'approche par perturbation de Destuynder, on peut aussi utiliser l'intégrale de Eshelby-Cherepanov-Rice :

$$J = \int_C \left(w^{def} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma = G$$

et la réécrire sous la forme d'une intégrale de volume

- ▷ Il s'agit d'une loi de conservation (invariance par translation)
- ▷ On peut aussi introduire les intégrales L et M pour des invariances par rotation et expansion :

$$J = \oint_{\Gamma} \left\{ W \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \right\} d\Gamma,$$

$$M = \oint_{\Gamma} \left\{ W \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \right\} d\Gamma,$$

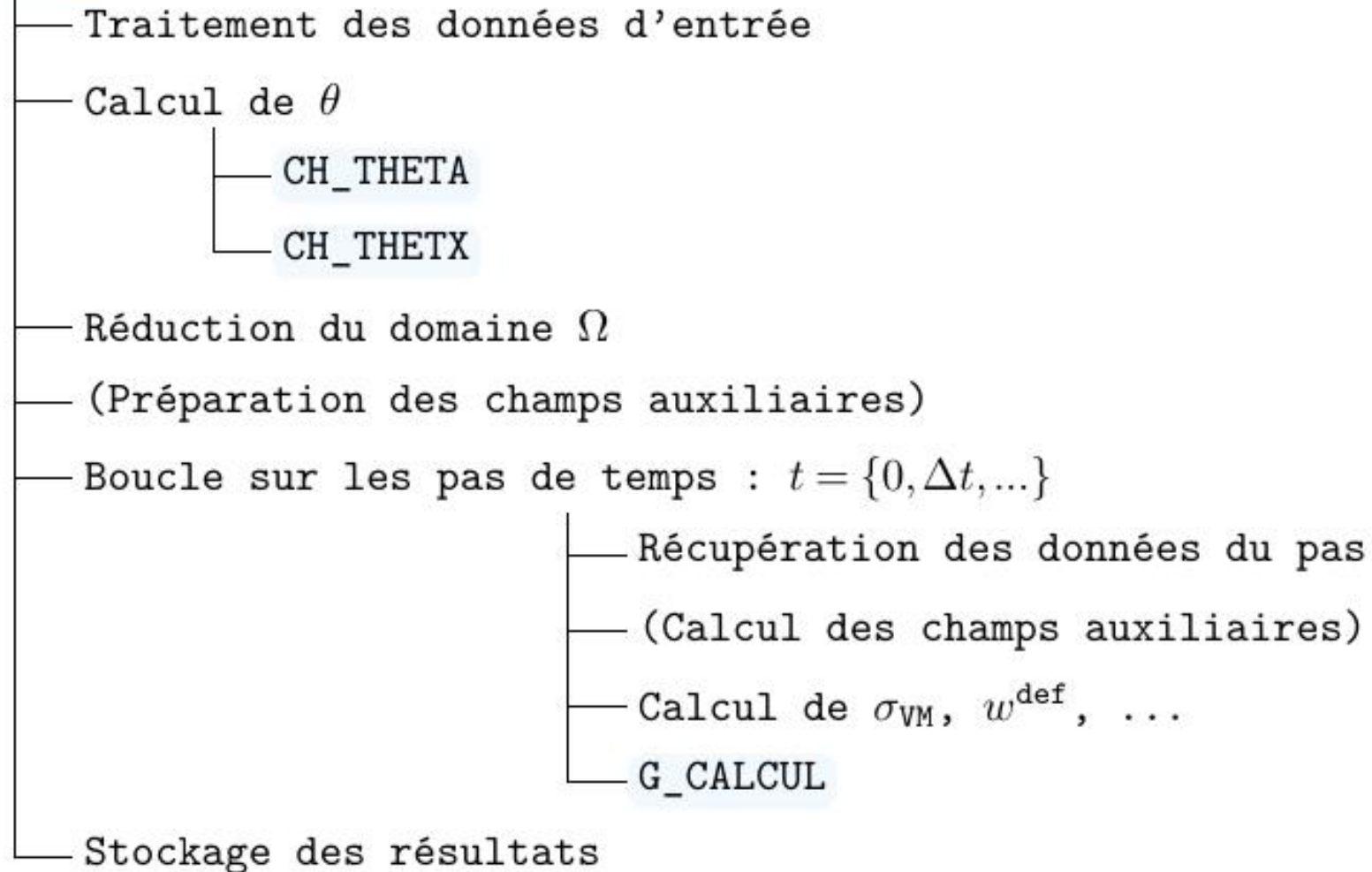
$$L = -\oint_{\Gamma} \left\{ W \mathbf{n} \times \mathbf{x} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \times \mathbf{x} + \mathbf{u} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right\} d\Gamma,$$

Exemple de mise en données

```
tg = TABL ;
tg . 'OBJECTIF' = MOT 'J' ;
tg . 'COUCHE' = 3 ;
tg . 'FRONT_FISSURE' = fron1 ;
tg . 'LEVRE_SUPERIEURE' = lev1s ;
tg . 'LEVRE_INFERIEURE' = lev1i ;
tg . 'SOLUTION_RESO' = u1 ;
tg . 'MODELE' = mod1 ;
tg . 'CARACTERISTIQUES' = mat1 ;
tg . 'CHARGEMENTS_MECANIQUES' = f1 ;
tg . 'BLOCAGES_MECANIQUES' = blo1 ;
G_THETA tg ;
G1 = tg . 'RESULTATS' . 'GLOBAL' ;
```

Structuration de la procédure

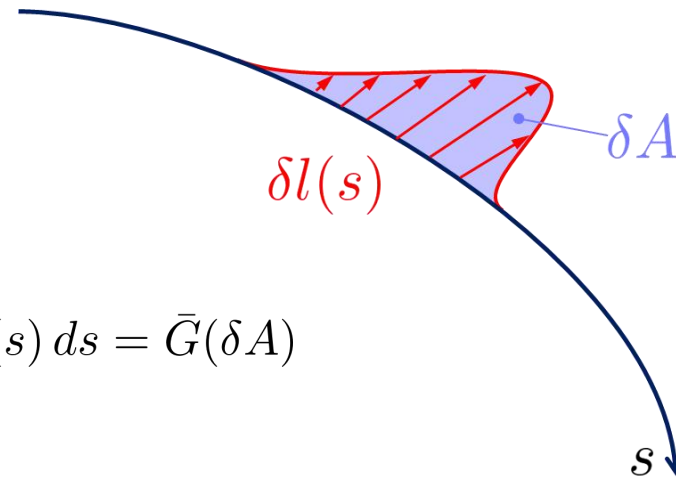
G_THETA



Cas 3D

- Principe

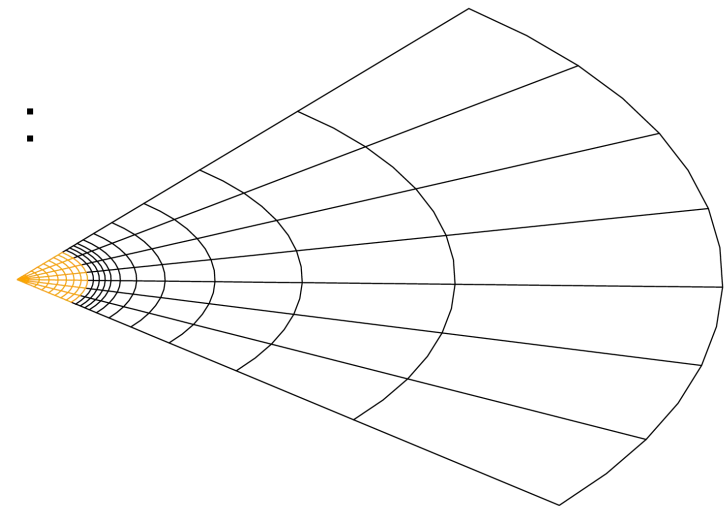
$$-\delta W = \int_0^L -\frac{\partial W}{\partial A} \delta l ds = \int_0^L G(s) \delta l(s) ds = \bar{G}(\delta A)$$



- Choix d'approximer l'avancée $\delta l(s_i) = N_i(s)$ et $G(s)$ constant par support d'intégration

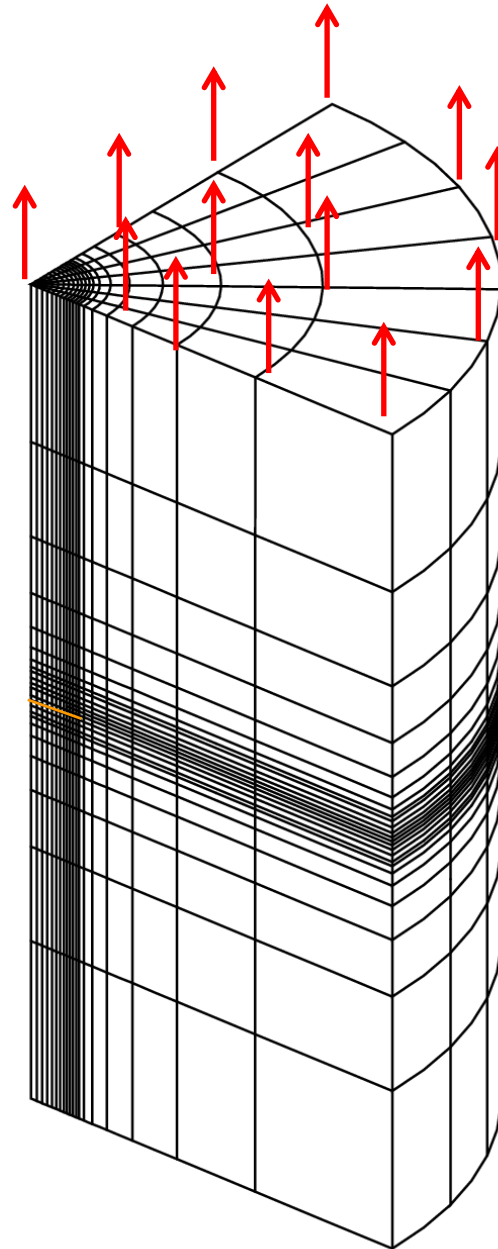
- Recommandation pour le maillage :

- ▷ Plans orthogonaux au front



Cas 3D

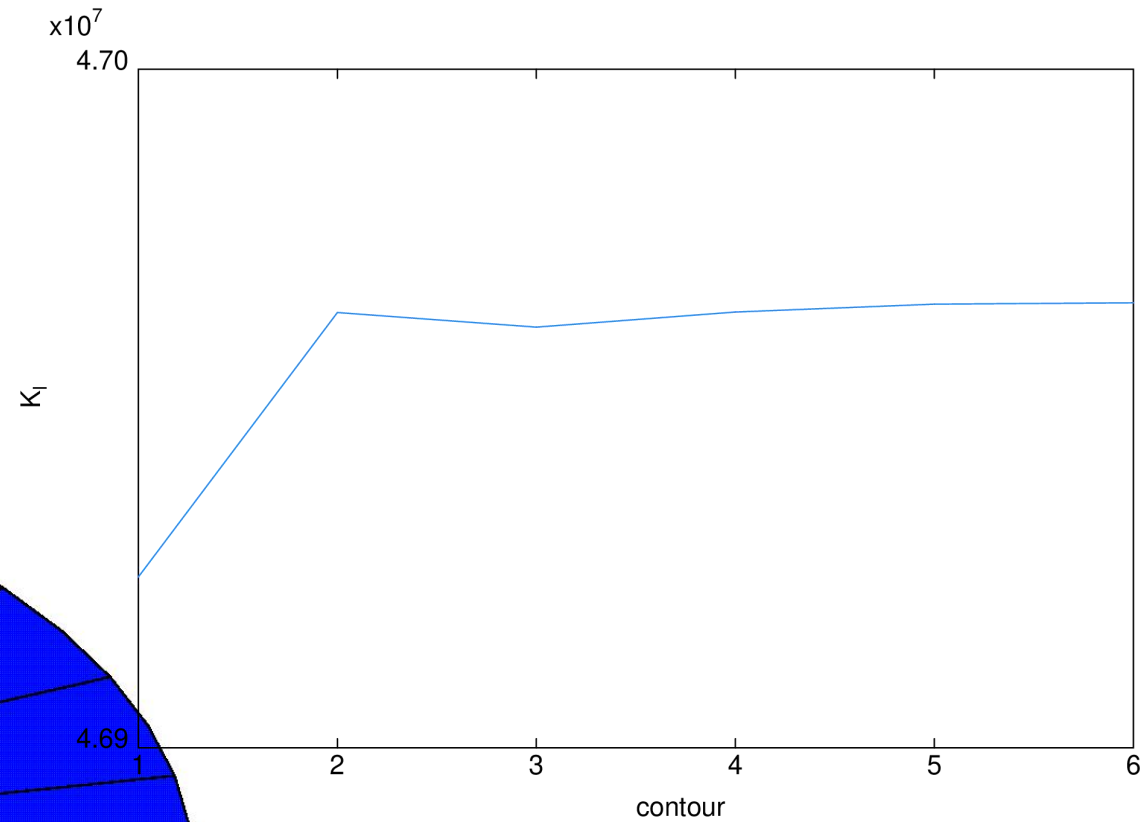
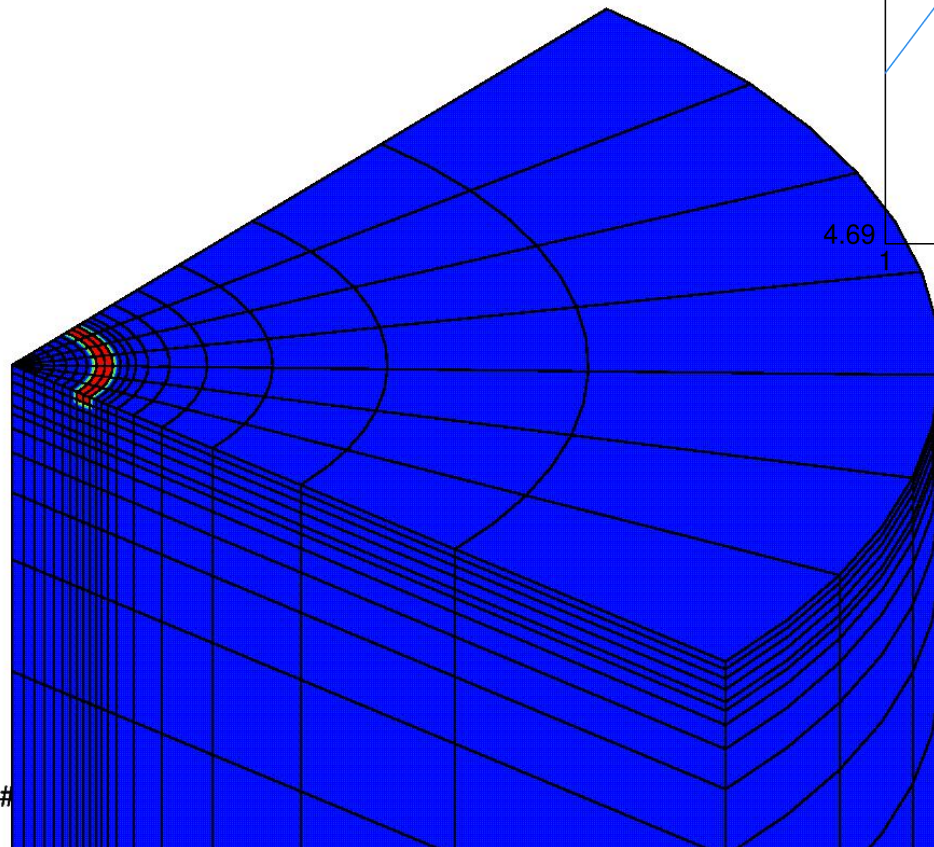
- Exemple de résultats



Cas 3D

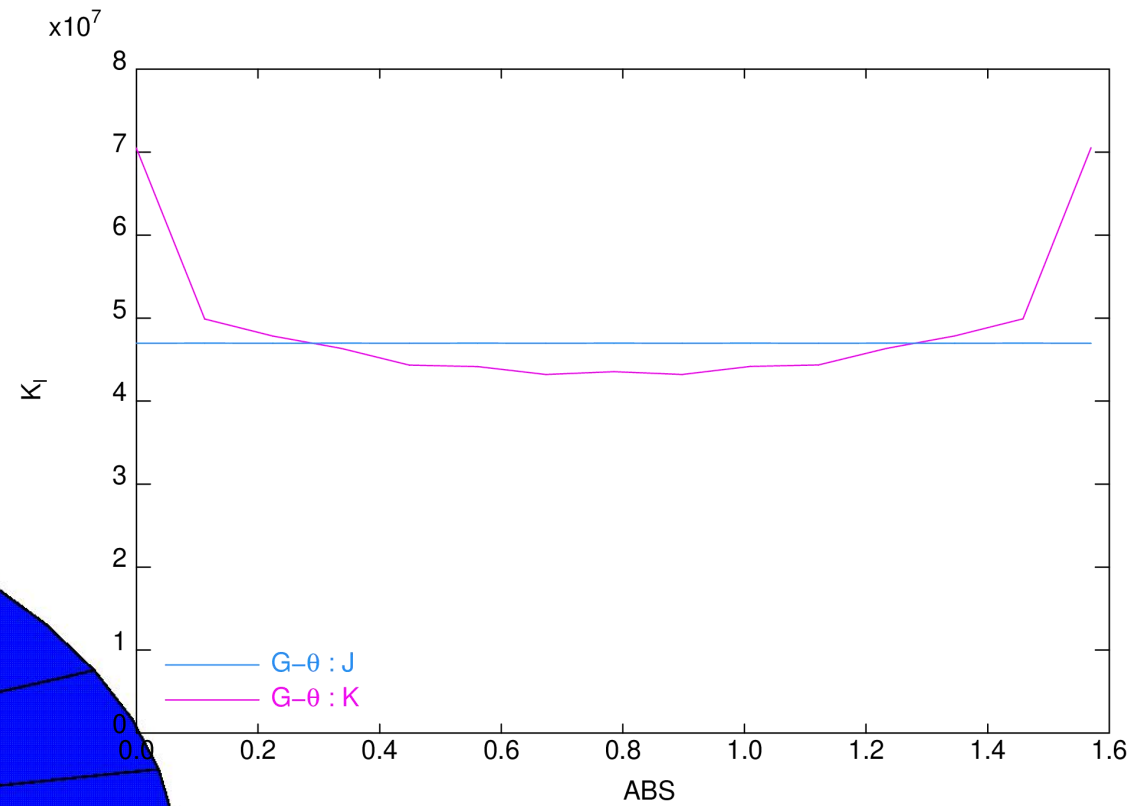
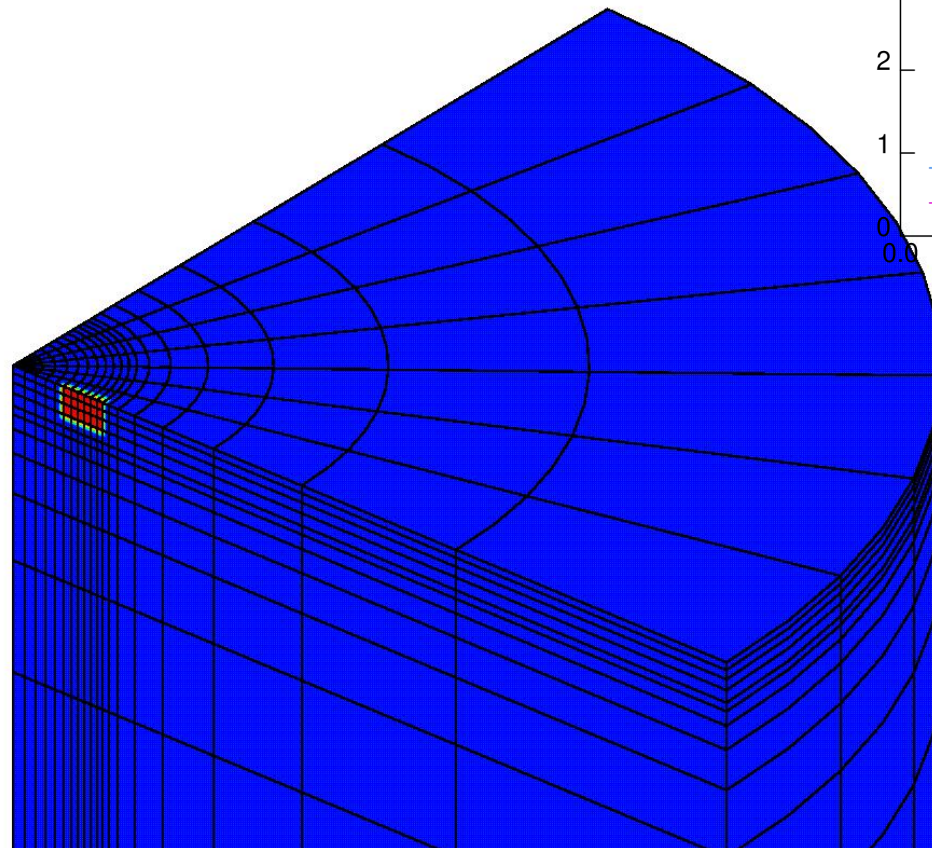
- Exemple de résultats

$$G = \frac{K_I^2}{E^*}$$



Cas 3D

- Exemple de résultats



Découplage des Facteurs d'Intensité des Contraintes

- On considère l'état actuel et un état auxiliaire

- ▷ Par superposition, on a :

$$J(u + u^{\text{aux}}) = J(u) + J(u^{\text{aux}}) + I(u, u^{\text{aux}})$$

avec :

$$I = \int_{\Omega} (w(u, u^{\text{aux}})n_1 - \sigma u_{,1}^{\text{aux}} - \sigma^{\text{aux}}u_{,1}) \theta_{,1} d\Omega$$

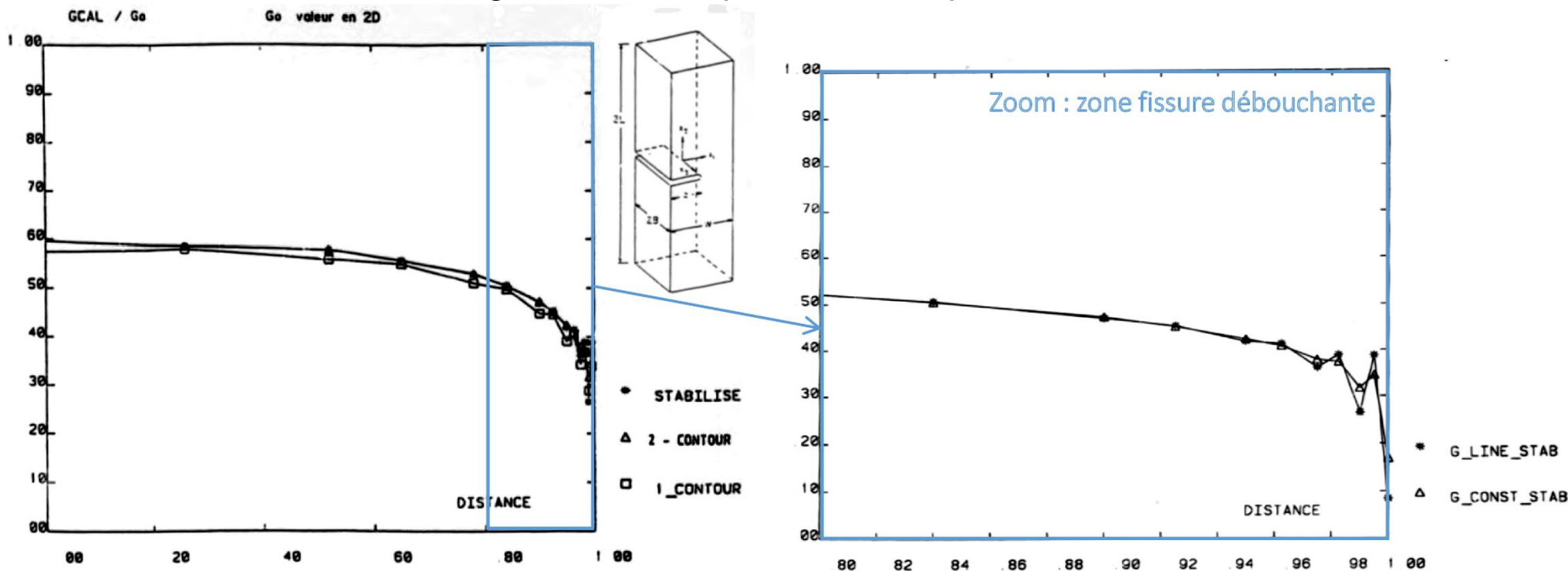
On montre que : $I(u, u^{\text{aux}}) = \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{\text{aux}} + K_{II} K_{II}^{\text{aux}}) + \frac{1}{\mu} K_{III} K_{III}^{\text{aux}}$

- ▷ Il « suffit » donc de bien choisir les champs auxiliaires pour en déduire les K !
- ▷ Problème : solution de Westergaard est 2D def plane
 - invalide si courbure du front, non-planéité de la fissure, front débouchant, dynamique, inélastique, non-homogène, etc.
 - On privilégie J lorsque cela est possible

Domaine de validité de J

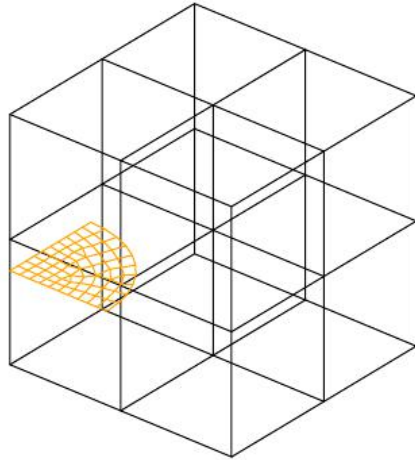
● Quelques précautions à prendre :

- ▷ Le maillage doit être suffisamment fin et orthogonal au front
- ▷ En plasticité, le chargement doit être monotone croissant et radial
- ▷ Si le matériau n'est pas homogène (liaisons bi-métalliques par ex.), il faut vérifier les éventuelles décharges
- ▷ Les résultats ne sont généralement pas valides à proximité d'un front débouchant :

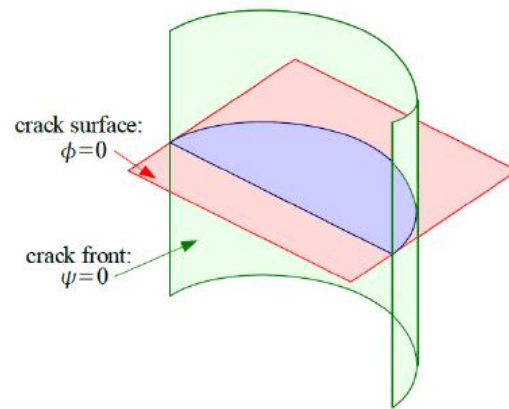


Cas d'une modélisation XFEM

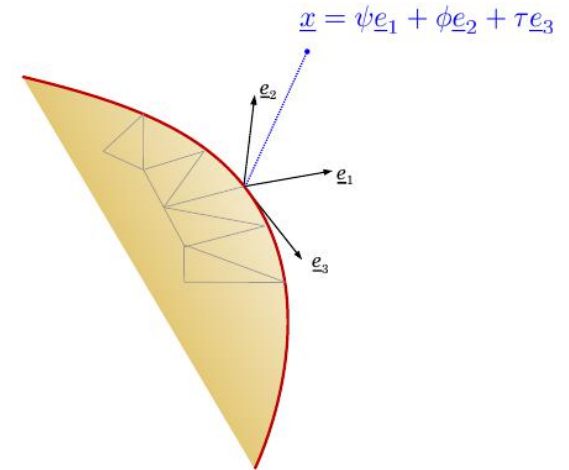
- Description explicite/implicite de la fissure



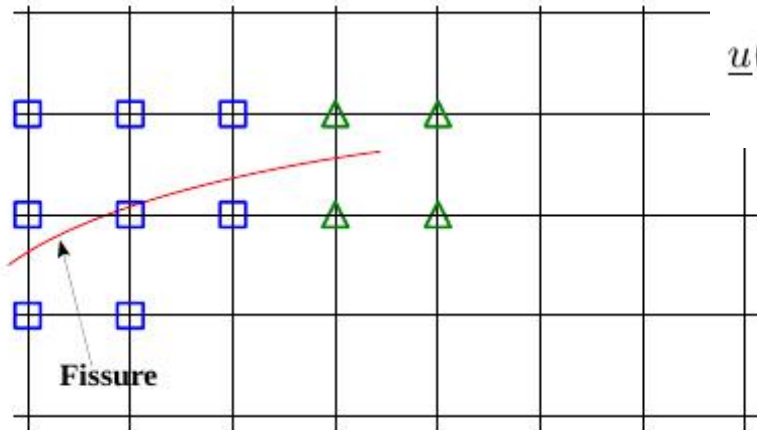
(a) Description explicite via un maillage



(b) Description implicite via des fonctions de niveau



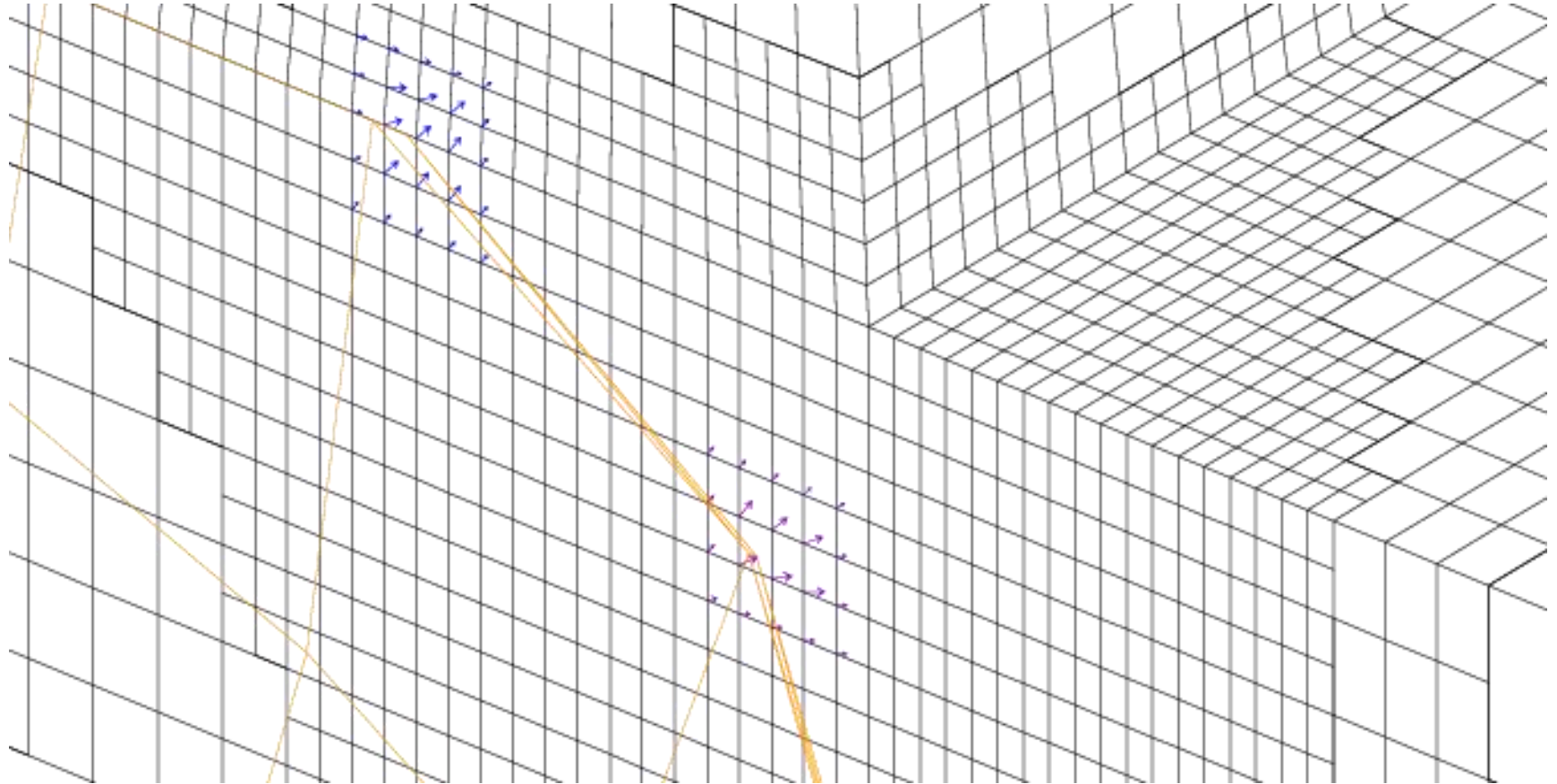
- Enrichissement de la cinématique



$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_i N_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in \square} N_i(\underline{x}) H_i(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in \Delta} \sum_{j=1..4} N_i(\underline{x}) F_{ij}(\underline{x}) \underline{b}_{ij}$$

Cas d'une modélisation XFEM

- Pas de problème en 2D
- Difficultés en 3D pour discrétiser selon s



→ travaux en cours (stage Adrien Jaccon)