

Club **Cast3M** - Edition 2016

UNE NOUVELLE APPROCHE A CINEMATIQUE ENRICHIE DISPONIBLE DANS  
**CAST3M**

Principe et Applications

Benjamin RICHARD

25 Novembre 2016

Club **Cast3M** - Edition 2016

**UNE NOUVELLE APPROCHE A CINEMATIQUE ENRICHIE DISPONIBLE DANS**  
**CAST3M**

**Principe et Applications**

**Ejona KISHTA, Francesco RICCARDI, Mikel BALMASEDA**

**Benjamin RICHARD**

**25 Novembre 2016**

## I. Méthode des éléments enrichis intégré - E-FEM

**1. Méthode des éléments enrichis intégré - E-FEM**

**2. Loi de comportement discrète et applications**

- 1. Méthode des éléments enrichis intégré - E-FEM**
- 2. Loi de comportement discrète et applications**
- 3. Continuité géométrique du trajet de fissuration**

- 1. Méthode des éléments enrichis intégré - E-FEM**
- 2. Loi de comportement discrète et applications**
- 3. Continuité géométrique du trajet de fissuration**
- 4. Bilan**

# PRINCIPE

- Pourquoi enrichir la cinématique ?
  - Quantification de la fissuration
  - Plus de flexibilité
  - Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]



- Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

## eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}}^n N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}}^n N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

## Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

- Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

## eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Enrichissement

## Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Enrichissement

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

1. Nombre de degré de liberté
2. Continuité du chemin de fissuration
3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure
4. Implantation

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM



eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Enrichissement

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

1. Nombre de degré de liberté
2. Continuité du chemin de fissuration
3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure
4. Implantation

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM



1. Nombre de degré de liberté

2. Continuité du chemin de fissuration

3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure

4. Implantation

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Enrichissement

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM



1. Nombre de degré de liberté

2. Continuité du chemin de fissuration

3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure

4. Implantation

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Enrichissement

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM



1. Nombre de degré de liberté

2. Continuité du chemin de fissuration

3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure

4. Implantation

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

Enrichissement

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

X-FEM

E-FEM



1. Nombre de degré de liberté

2. Continuité du chemin de fissuration

3. Description de l'état de contrainte en pointe de fissure

4. Implantation

eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

Enrichissement

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]



- Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

## eXtended Finite Element Method (X-FEM)

[Moes et al, 1999]

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\underline{x}) \mathcal{H}(f(\underline{x})) \underline{b}_j(t) + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\underline{x}) \left( \sum_{l \in \mathcal{L}} \underline{c}_k^l(t) F_l(\underline{x}) \right)$$

Régulier

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_i(t)$$

## Embedded Finite Element Method (E-FEM)

[Oliver, 1999]



E-FEM

Enrichissement

- Pourquoi enrichir la cinématique ?
  - Quantification de la fissuration
  - Plus de flexibilité
  - Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}}^n N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

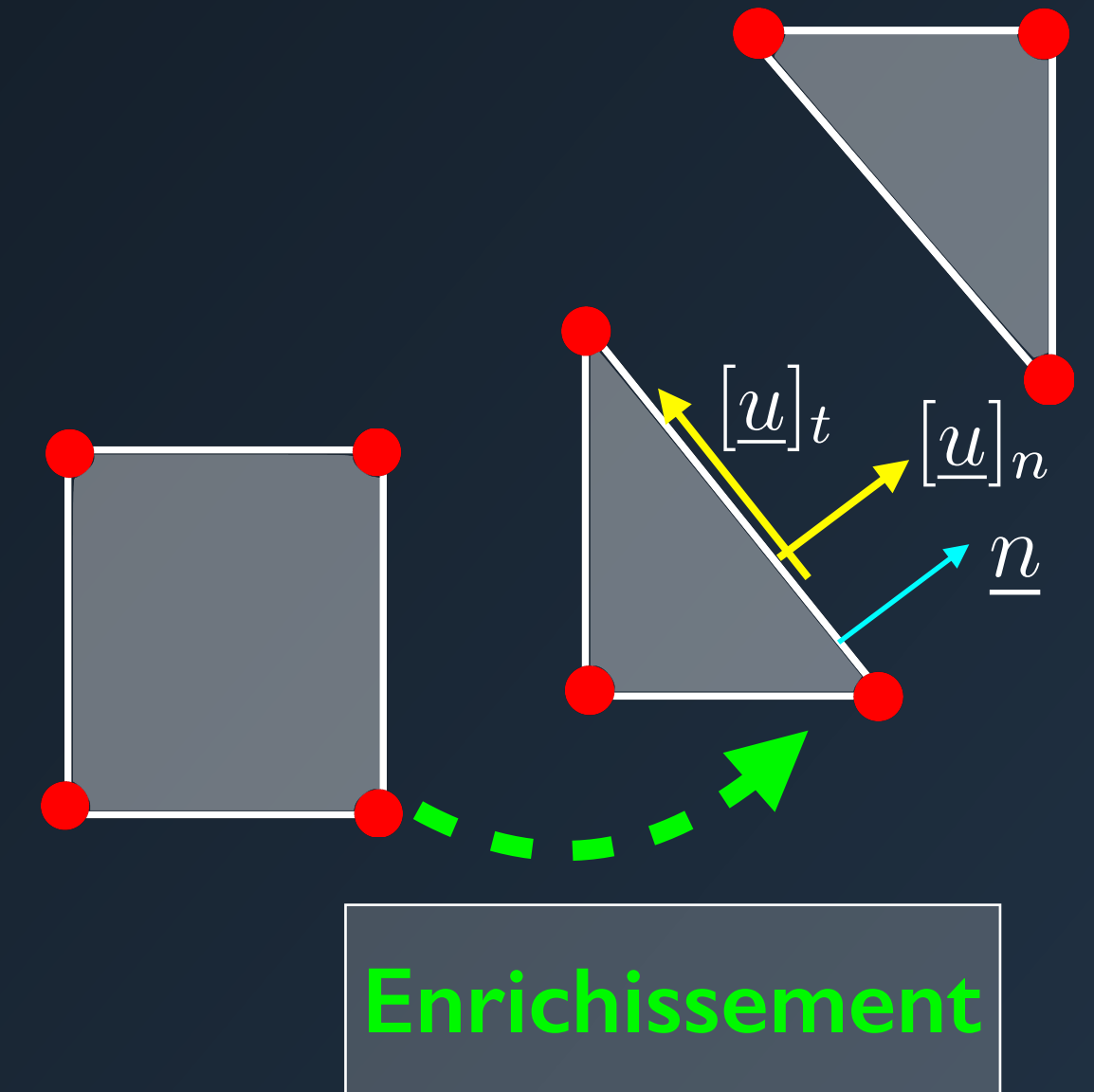
- Pourquoi enrichir la cinématique ?
  - Quantification de la fissuration
  - Plus de flexibilité
  - Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

$$\underline{\sigma} = \mathcal{L}(\underline{\varepsilon} [\underline{\bar{u}} + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) [\underline{u}]])$$



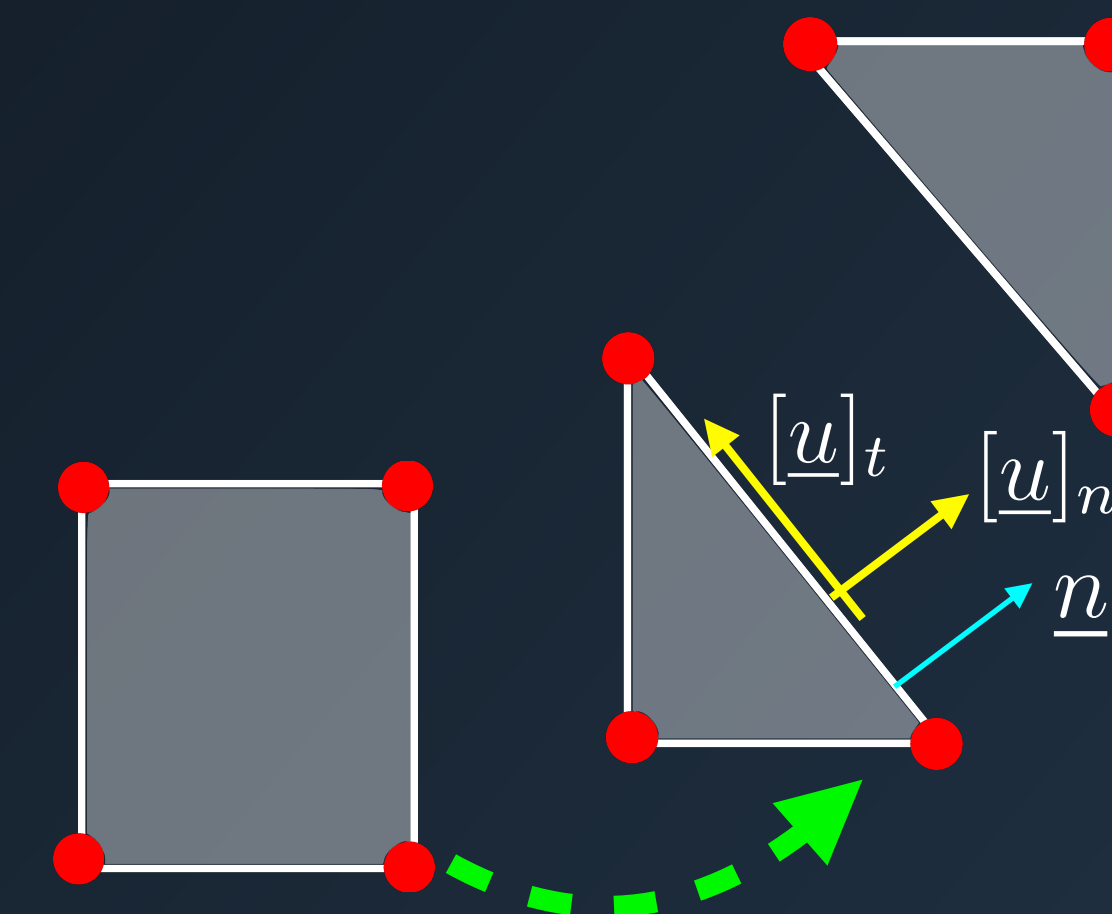
## • Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

## Embedded Finite Element Method (E-FEM)



Enrichissement

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\bar{u}} + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) [\underline{u}]])$$

$$\delta_\Gamma \approx \frac{1}{k} \gamma(\underline{x} \in \Gamma)$$

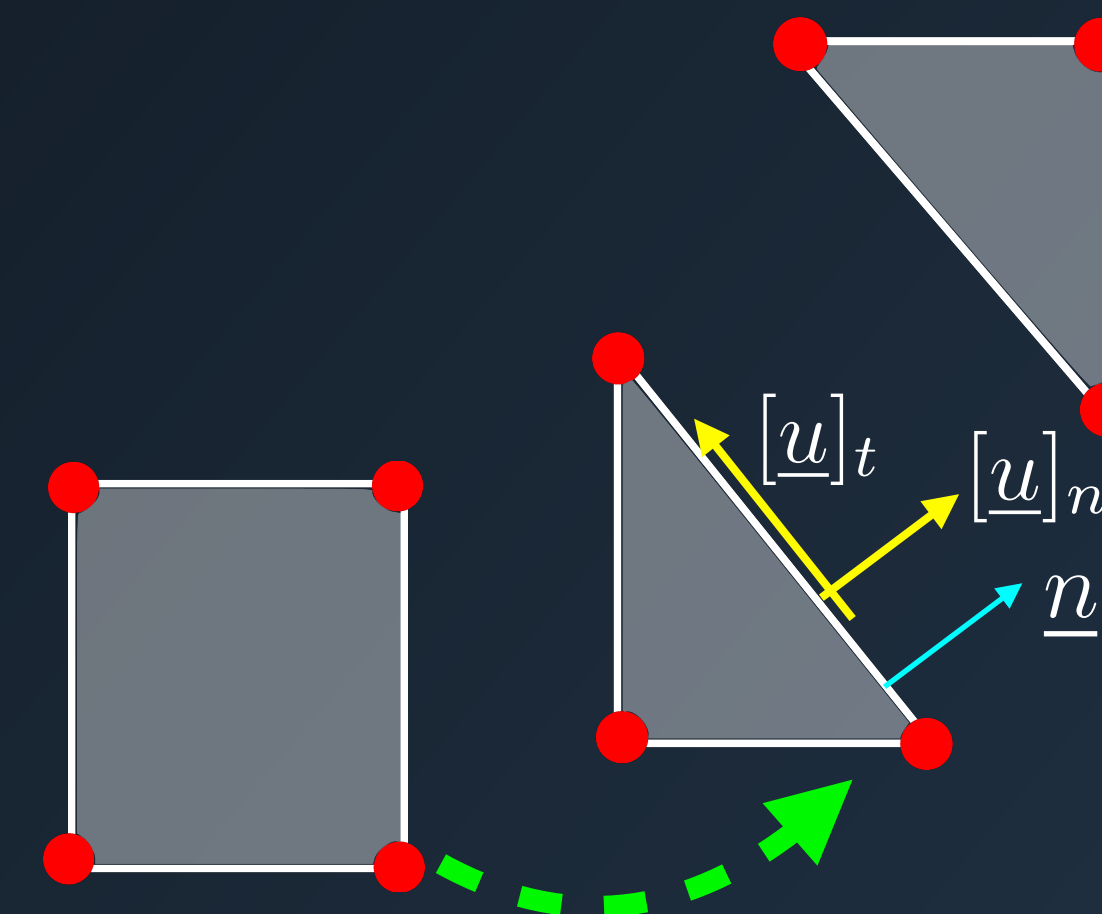
## • Pourquoi enrichir la cinématique ?

- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

## Embedded Finite Element Method (E-FEM)



Enrichissement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{u}} + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) [\underline{u}]])$$

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{t} = \mathcal{F}([\underline{u}])$$

$$\delta_\Gamma \approx \frac{1}{k} \gamma(\underline{x} \in \Gamma)$$

• Pourquoi enrichir la cinématique ?

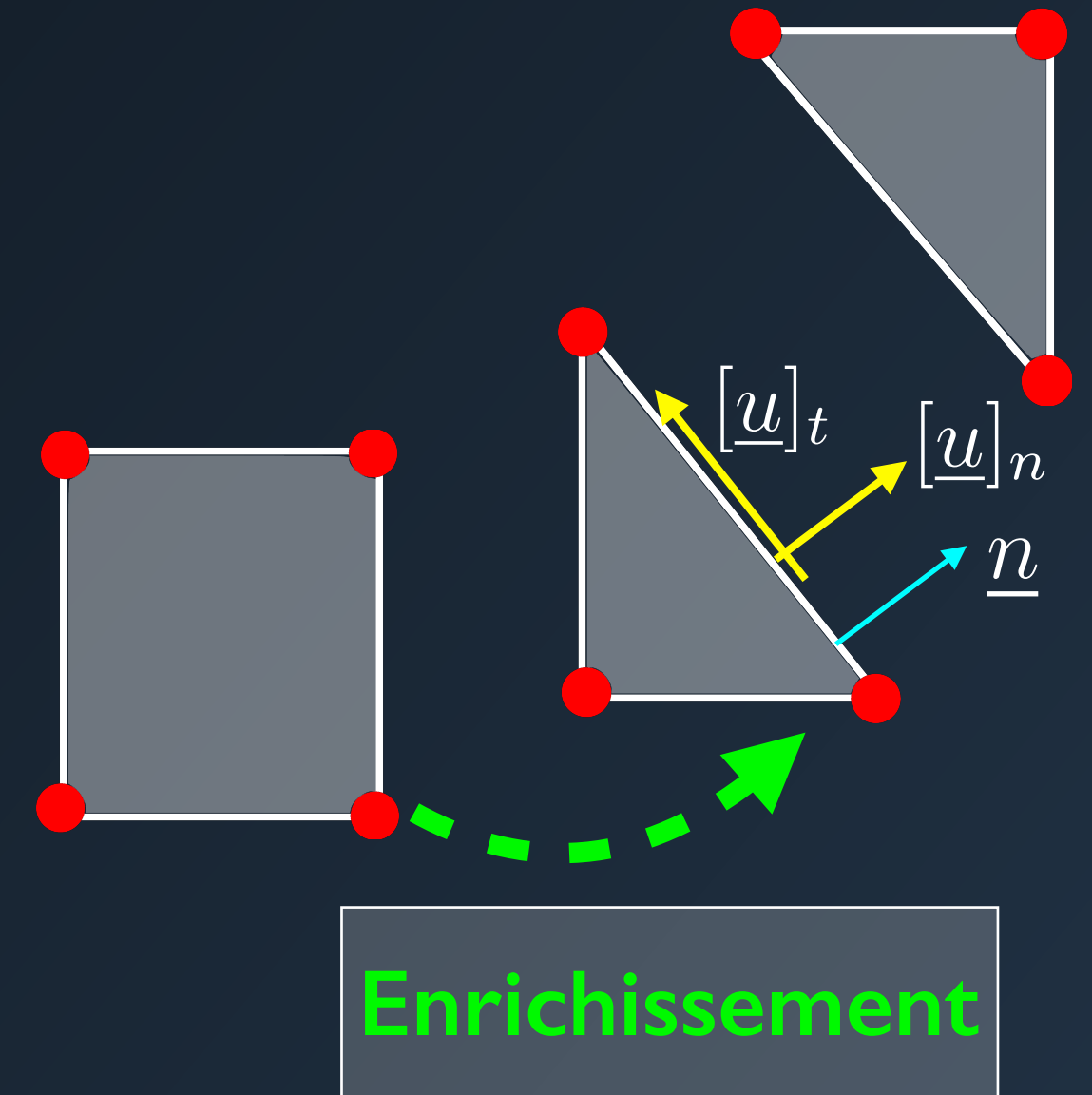
- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

Unique cadre thermodynamique pour décrire les non-linéarités



Enrichissement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{u}} + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) [\underline{u}]])$$

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{t} = \mathcal{F}([\underline{u}])$$

$$\delta_\Gamma \approx \frac{1}{k} \gamma(\underline{x} \in \Gamma)$$

[Oliver, 2002]

## • Pourquoi enrichir la cinématique ?

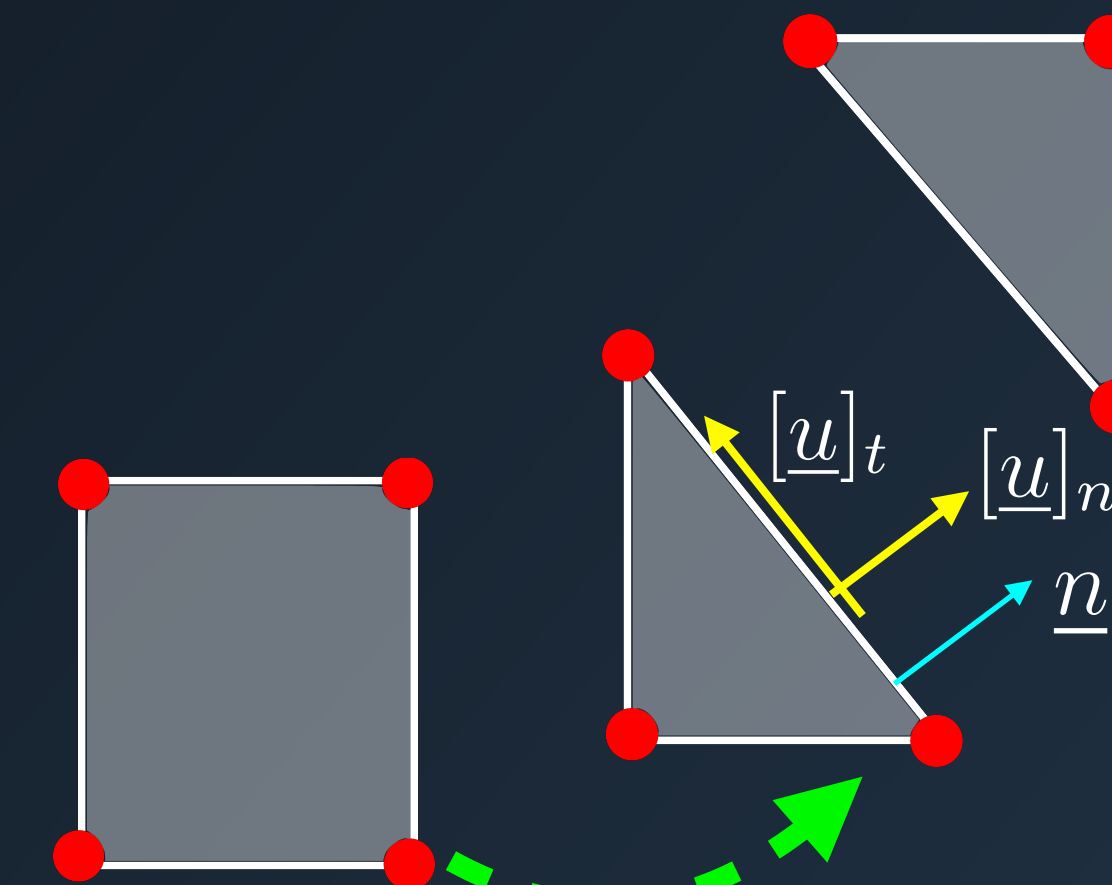
- Quantification de la fissuration
- Plus de flexibilité
- Meilleur contrôle de l'effet unilatéral

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(\underline{x}) [\underline{u}]_j(t)$$

[Oliver, 1999]

Embedded Finite Element Method (E-FEM)

Unique cadre thermodynamique pour décrire les non-linéarités



Enrichissement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{u}} + \mathcal{H}_\Gamma(\underline{x}) [\underline{u}]])$$

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{t} = \mathcal{F}([\underline{u}])$$

$$\delta_\Gamma \approx \frac{1}{k} \gamma(\underline{x} \in \Gamma)$$



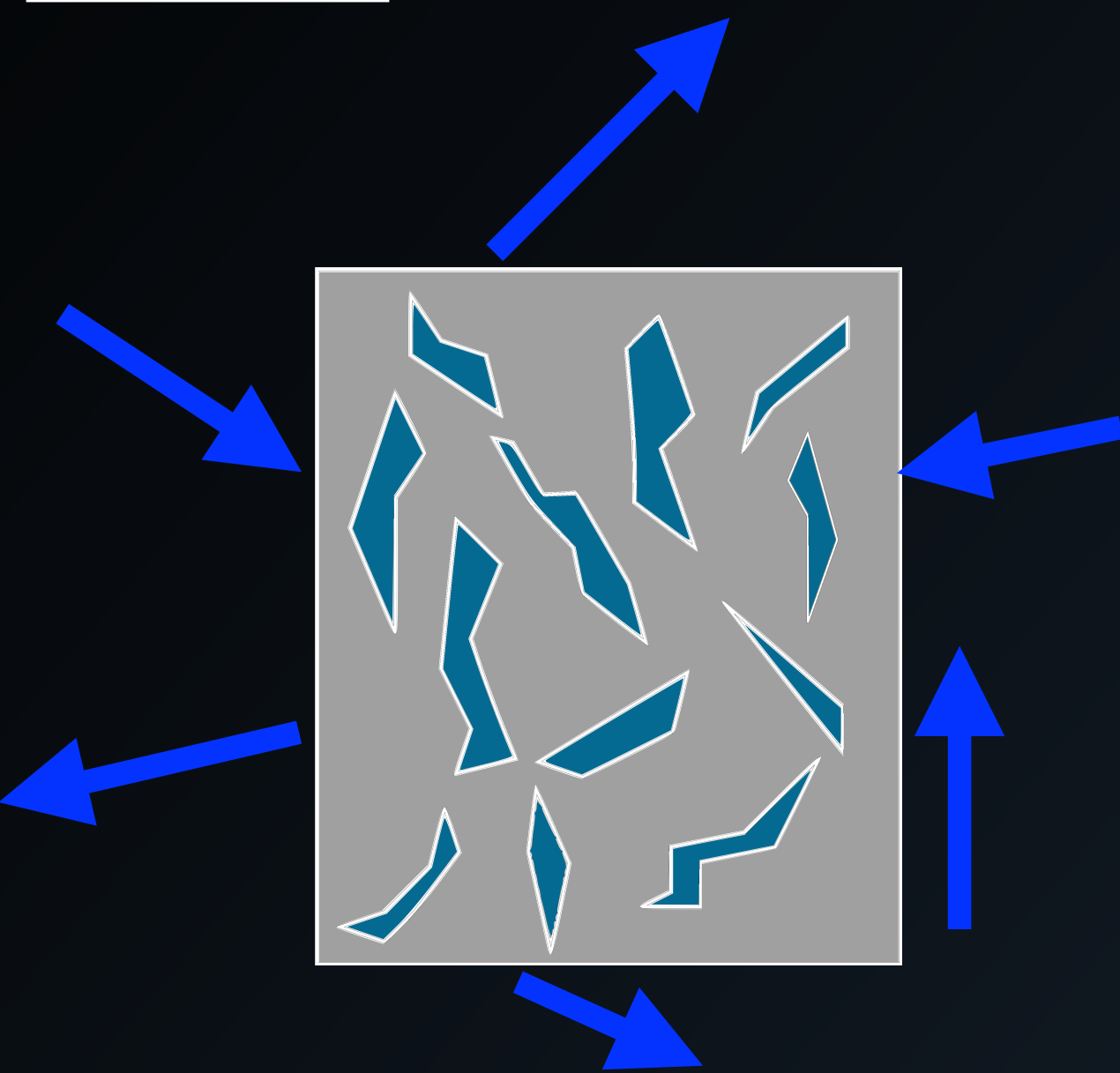
I. Démonstration dans le cas des lois d'endommagement isotrope et plastique

# LOI DE COMPORTEMENT DISCRETE ET APPLICATIONS



## Classe de lois anisotrope

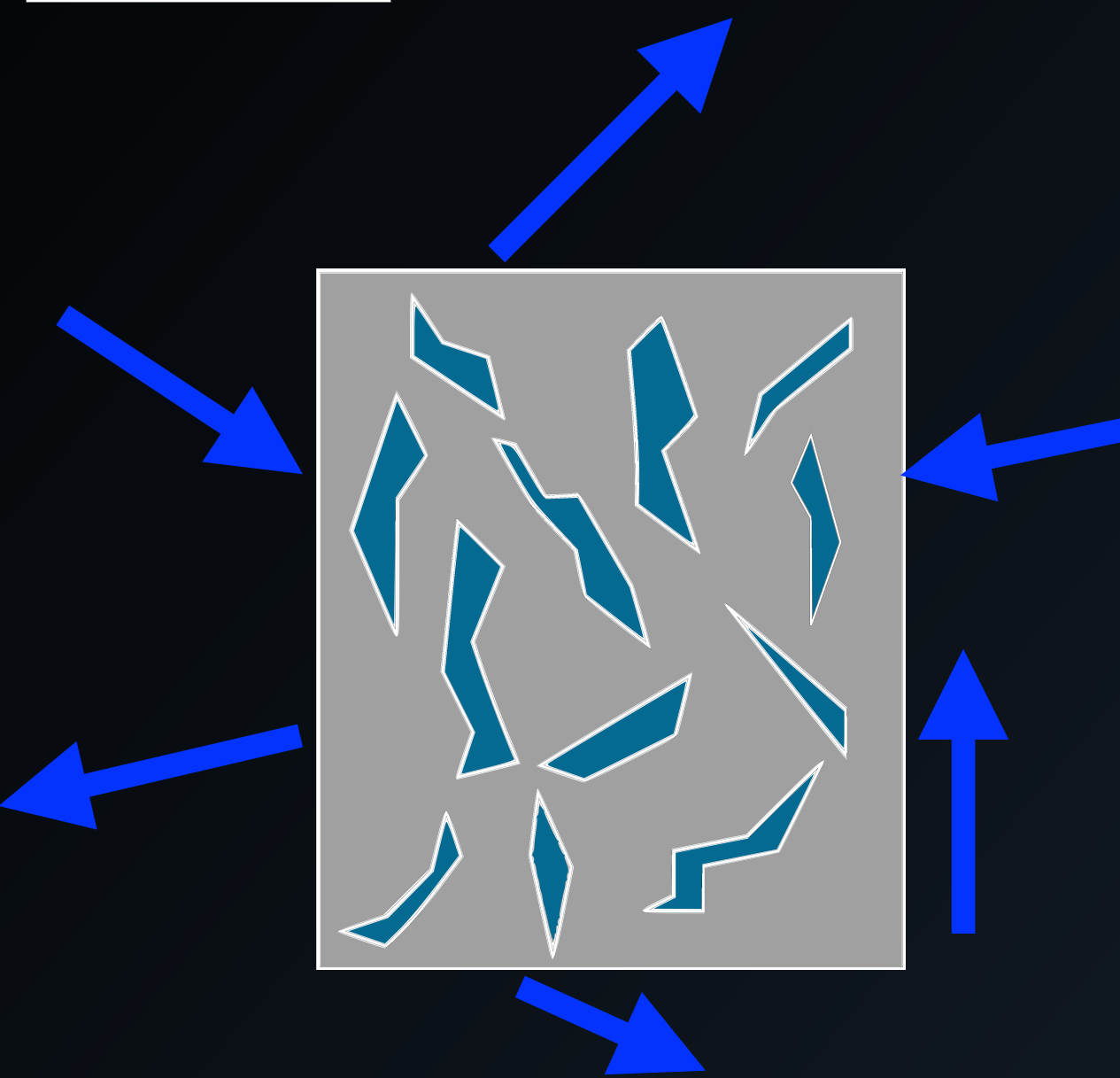
Concept



## Classe de lois anisotrope

Concept

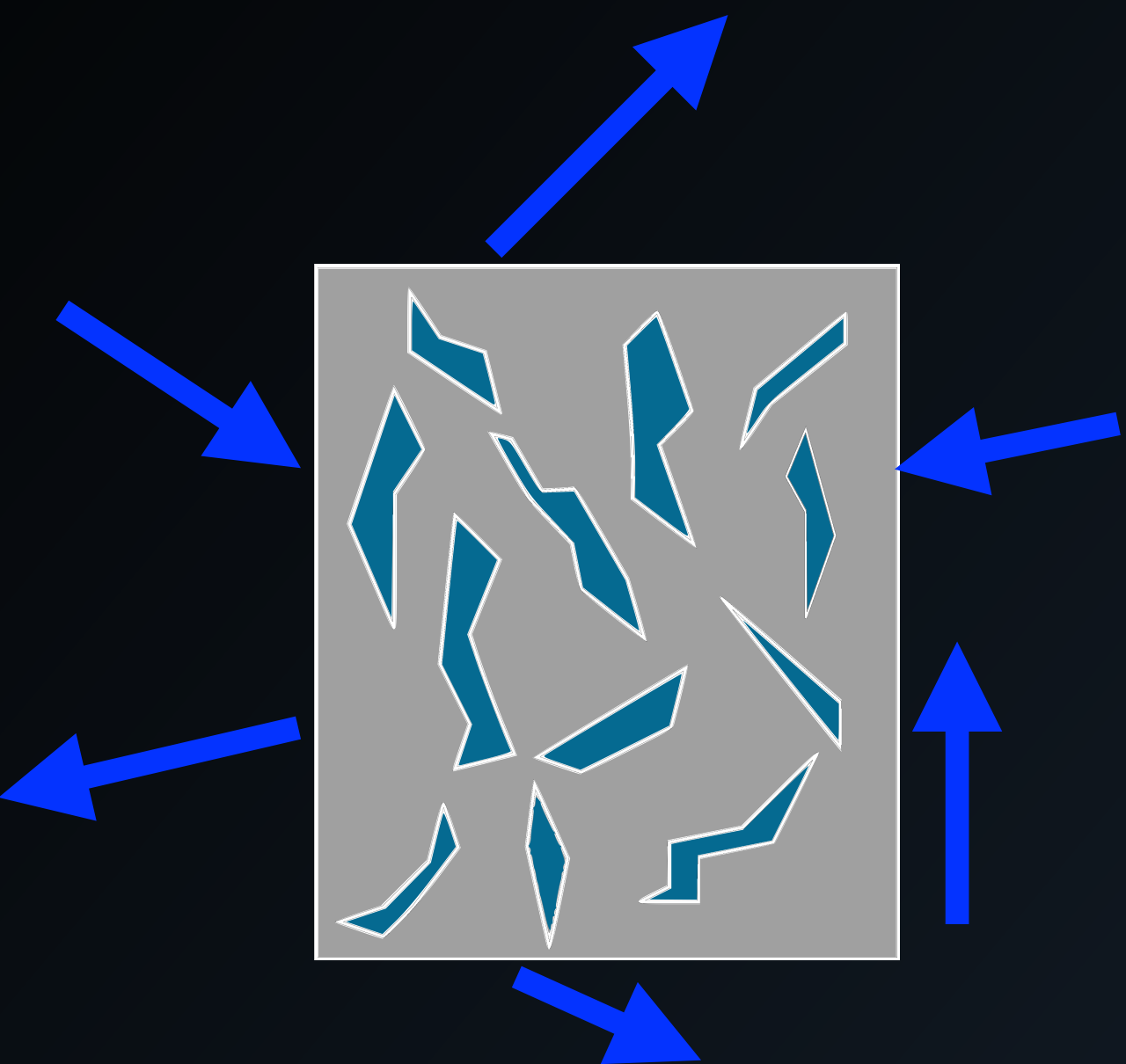
[Bargellini et al, 2006]



$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 - \sum_{i \in \{1,4,7\}} \rho_i \frac{dg_i(\underline{\underline{\varepsilon}})}{d\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

## Classe de lois anisotrope

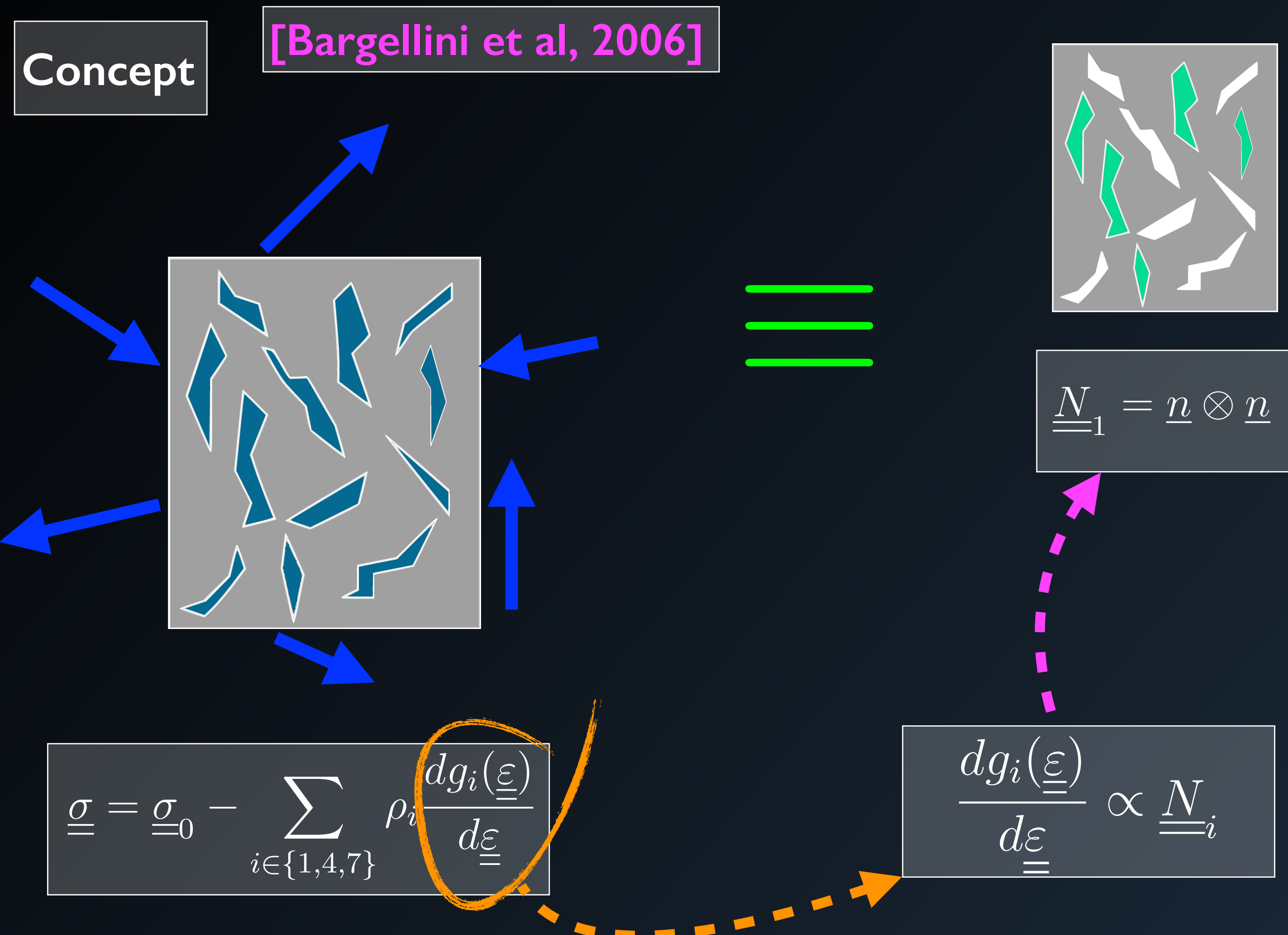
Concept [Bargellini et al, 2006]



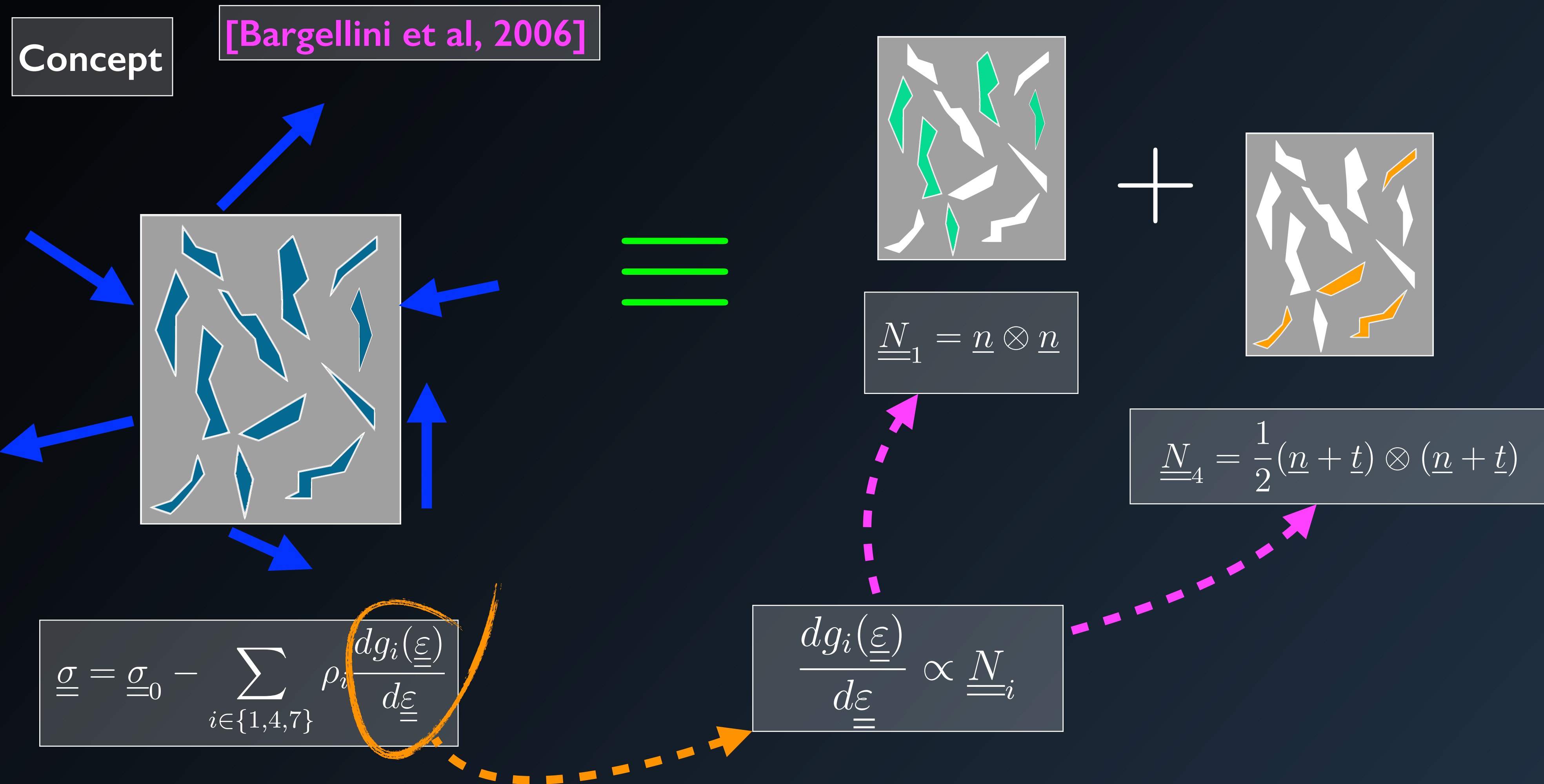
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 - \sum_{i \in \{1,4,7\}} \rho_i \frac{dg_i(\underline{\underline{\varepsilon}})}{d\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$\frac{dg_i(\underline{\underline{\varepsilon}})}{d\underline{\underline{\varepsilon}}} \propto \underline{\underline{N}}_i$$

## Classe de lois anisotrope



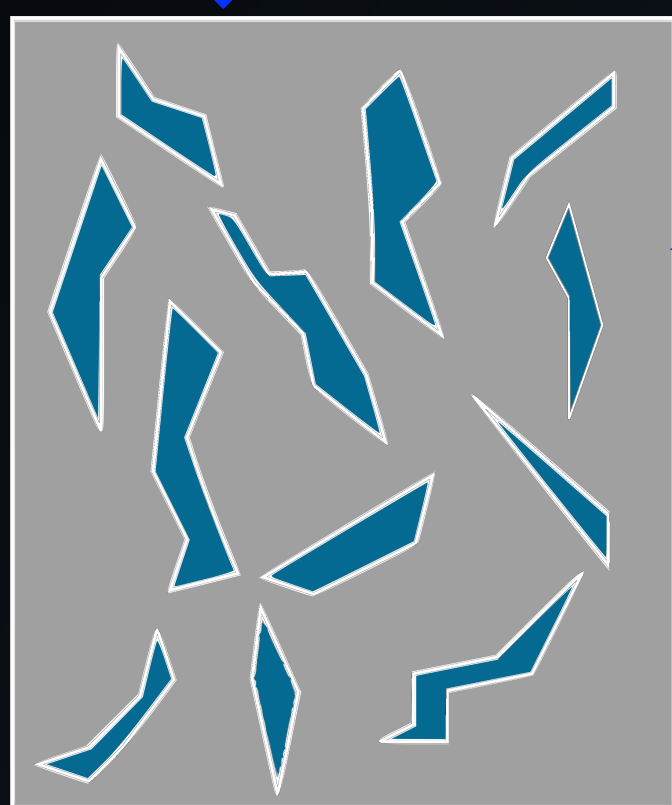
## Classe de lois anisotrope



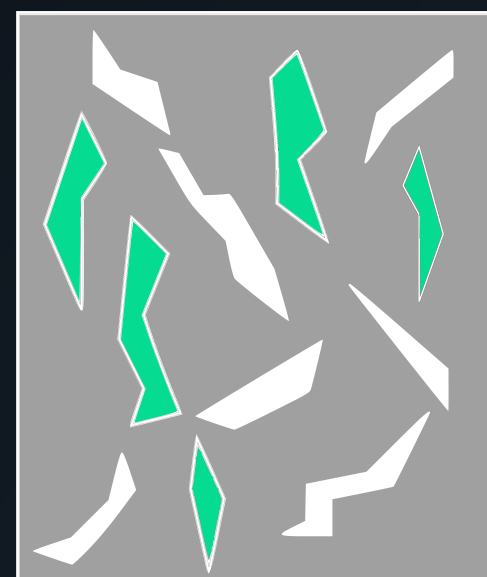
## Classe de lois anisotrope

Concept

[Bargellini et al, 2006]



≡



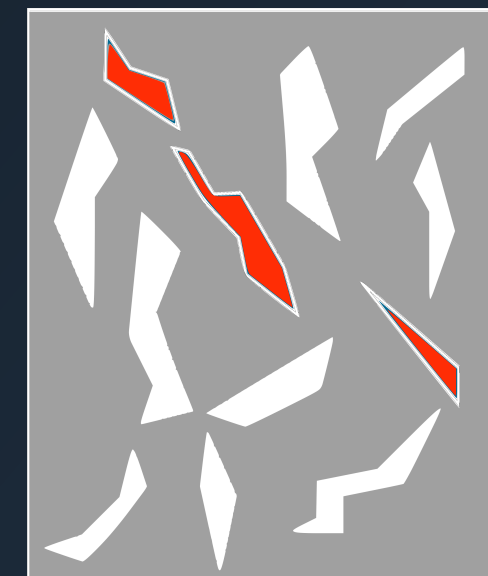
$$\underline{\underline{N}}_1 = \underline{n} \otimes \underline{n}$$

+



$$\underline{\underline{N}}_4 = \frac{1}{2}(\underline{n} + \underline{t}) \otimes (\underline{n} + \underline{t})$$

+



$$\underline{\underline{N}}_7 = \frac{1}{2}(\underline{n} - \underline{t}) \otimes (\underline{n} - \underline{t})$$

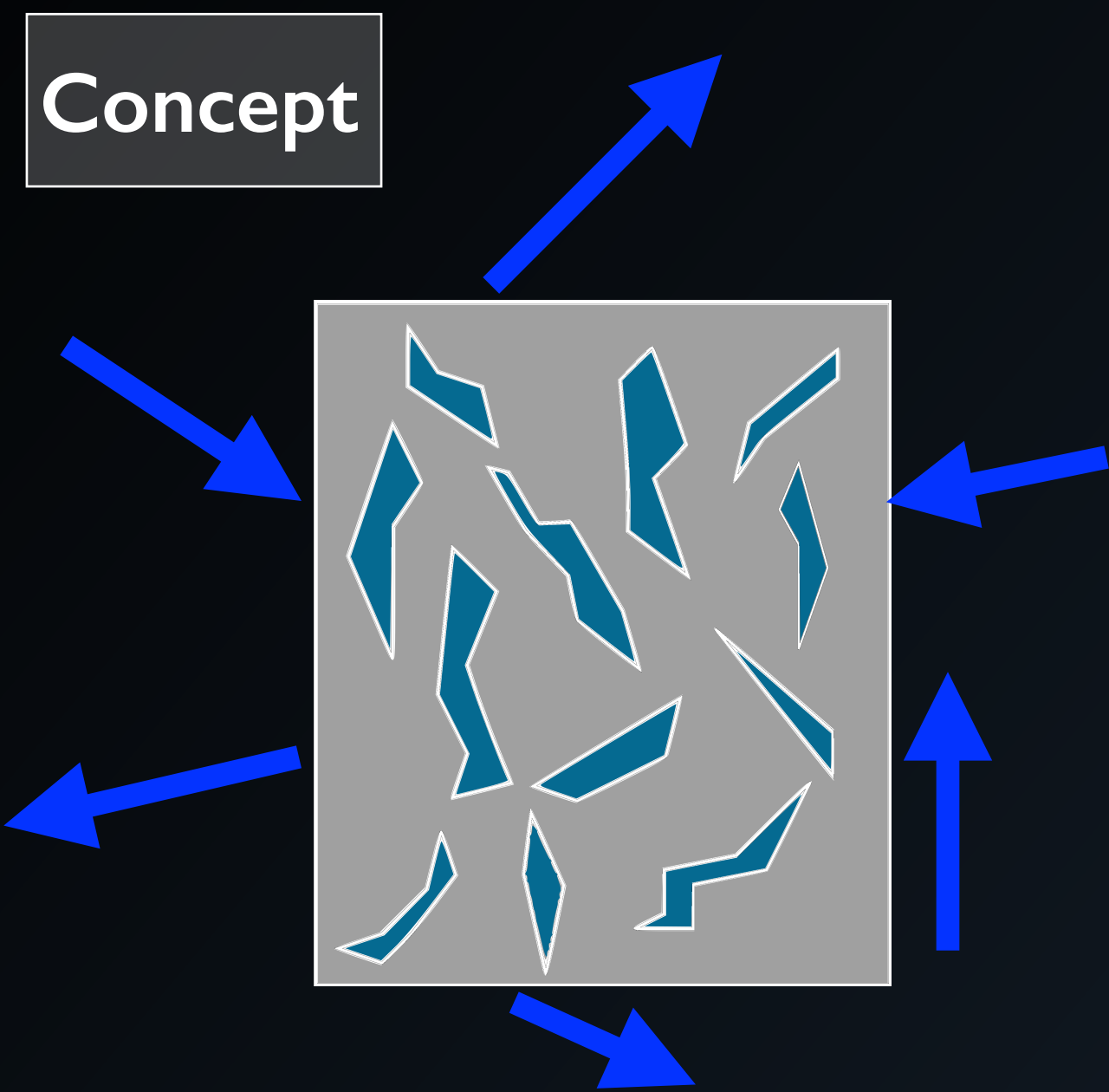
Cadre anisotrope

Cadre approprié à la description de la fissuration

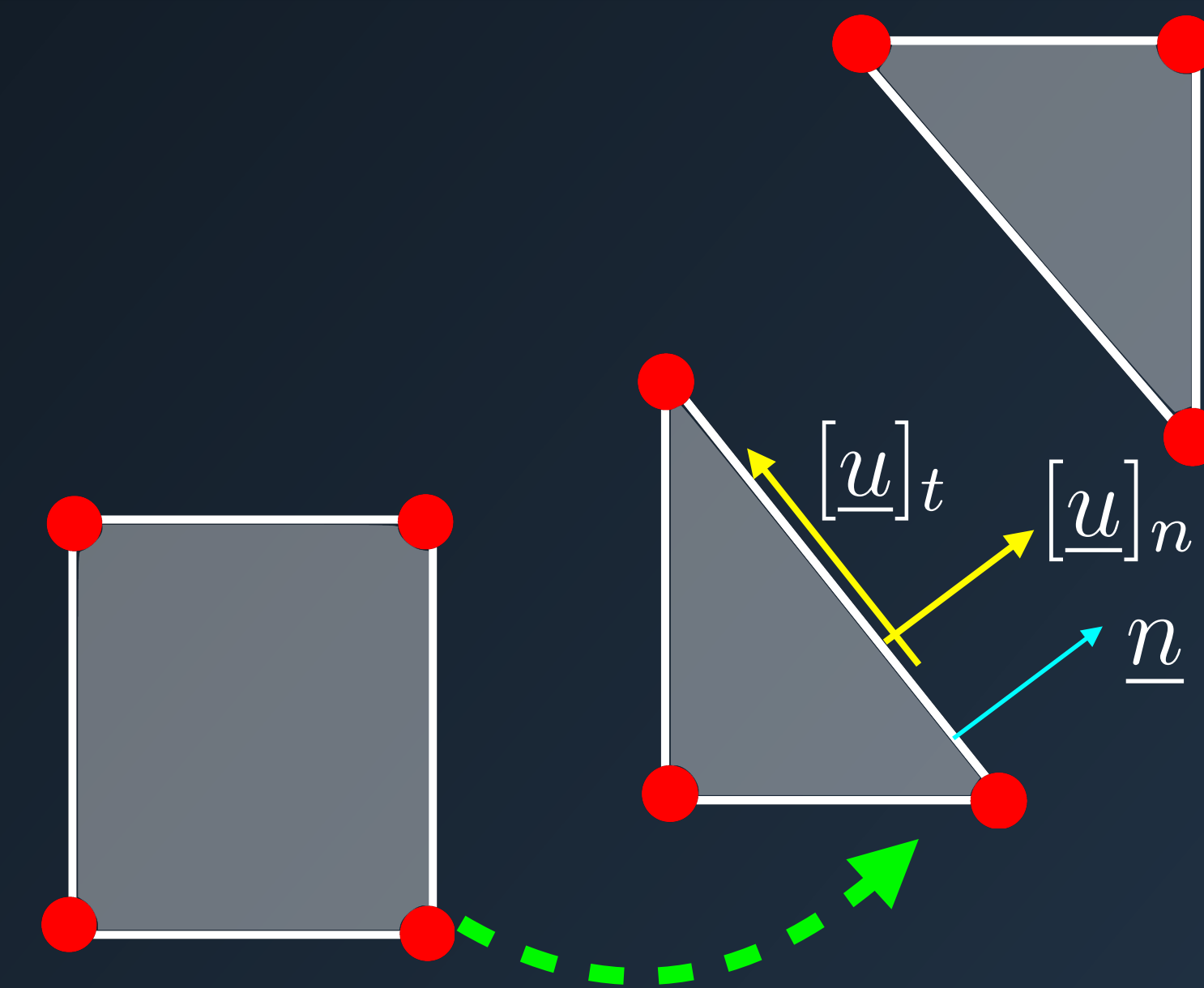
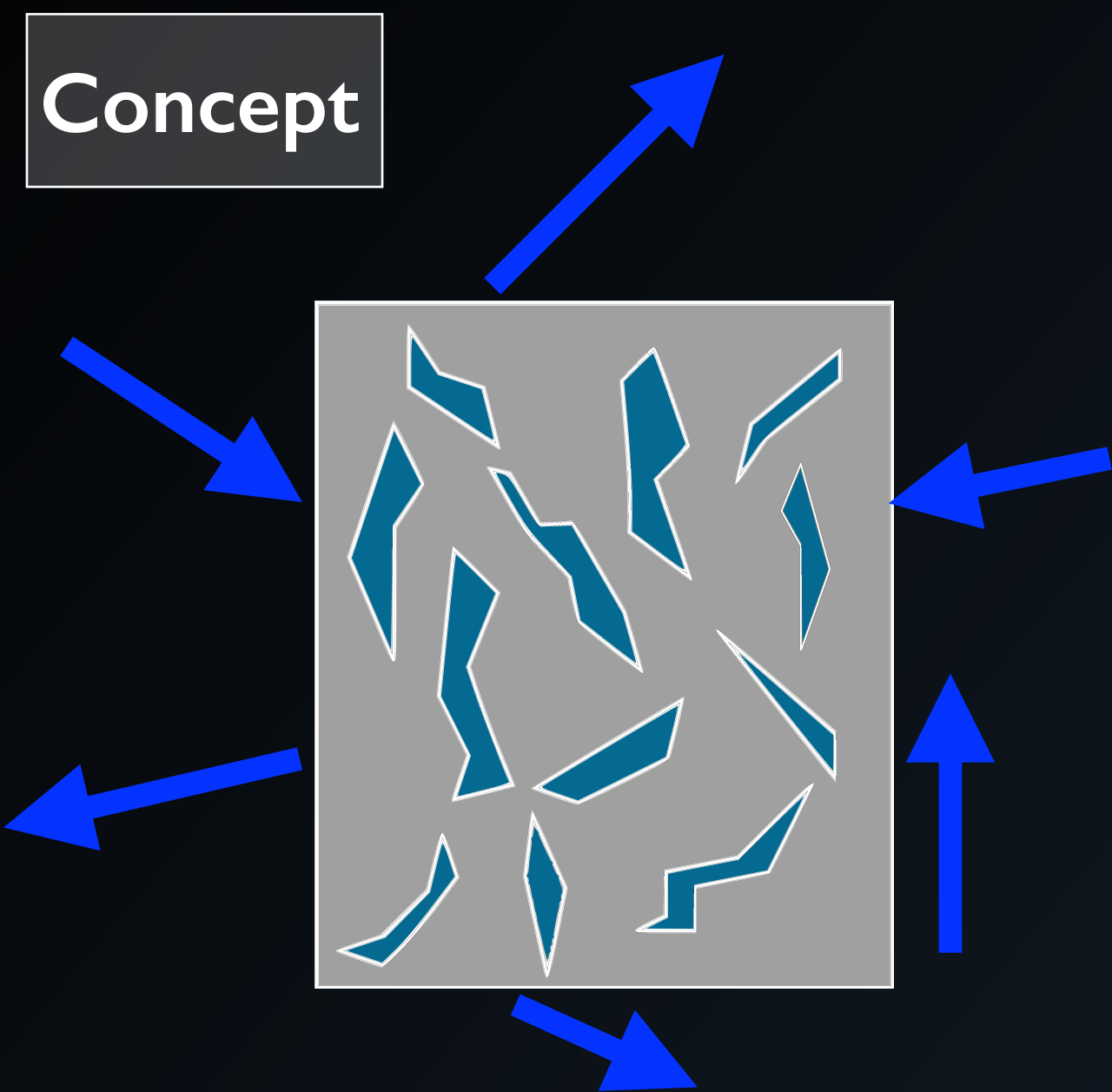
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 - \sum_{i \in \{1,4,7\}} \rho_i \frac{dg_i(\underline{\underline{\varepsilon}})}{d\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$\frac{dg_i(\underline{\underline{\varepsilon}})}{d\underline{\underline{\varepsilon}}} \propto \underline{\underline{N}}_i$$

## Classe de lois anisotrope



## Classe de lois anisotrope

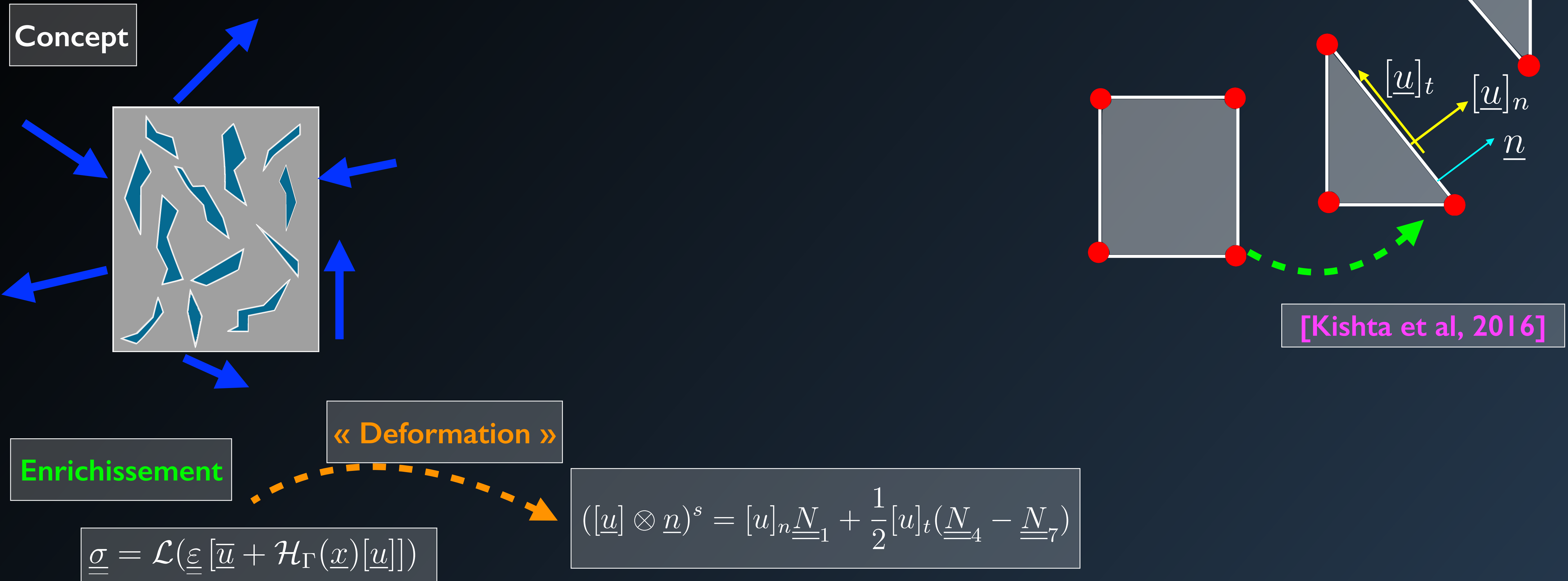


Enrichissement

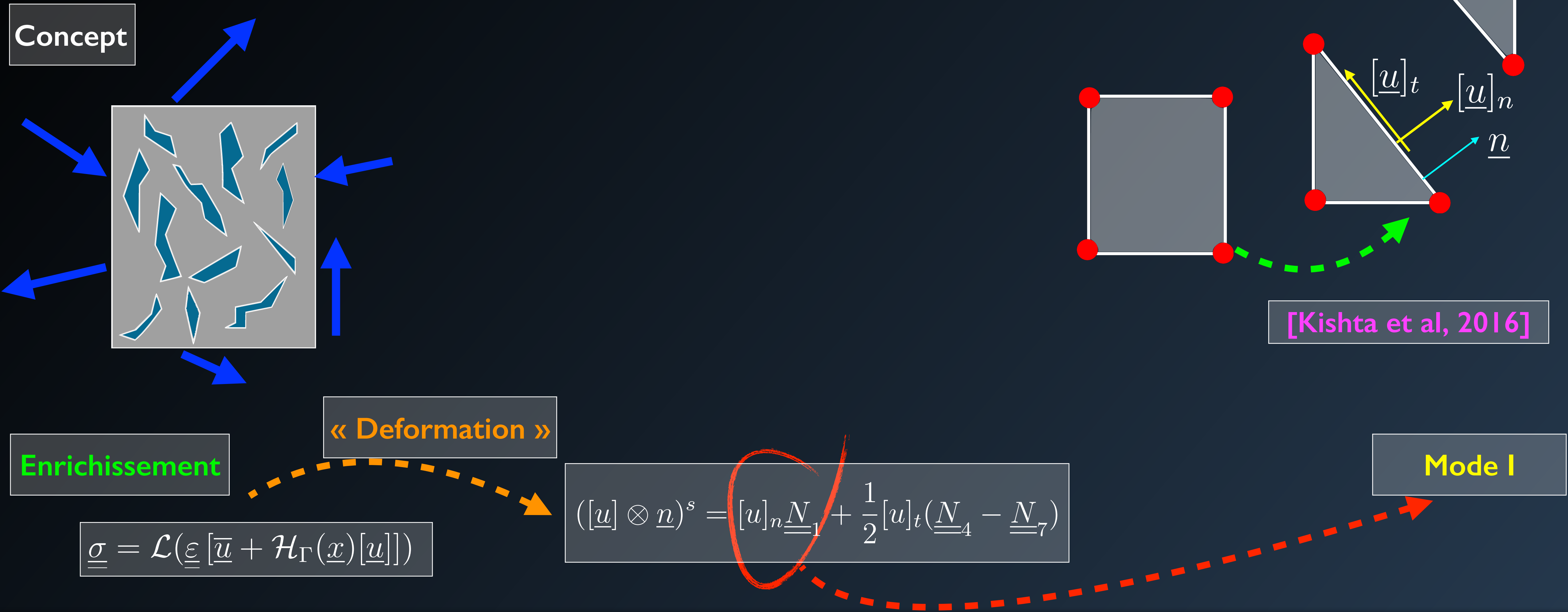
$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\bar{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma}(\underline{x})[\underline{u}]])$$



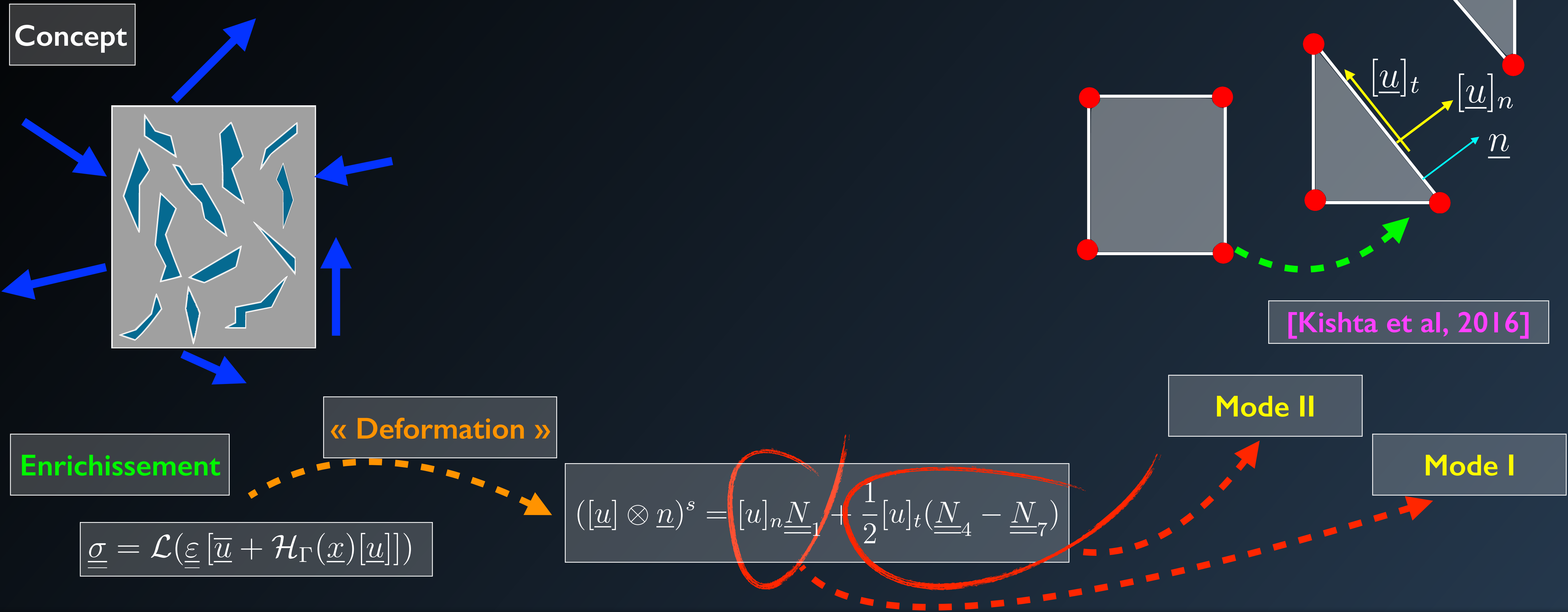
## Classe de lois anisotrope



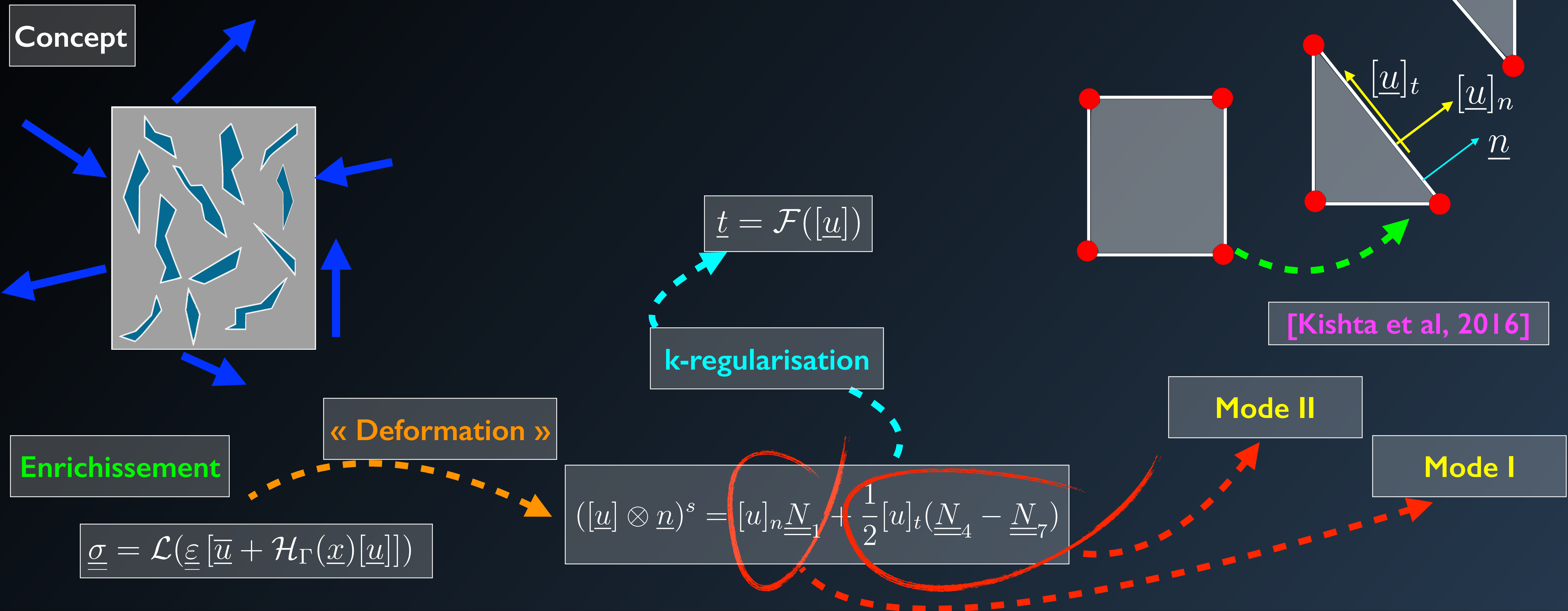
## Classe de lois anisotrope



## Classe de lois anisotrope



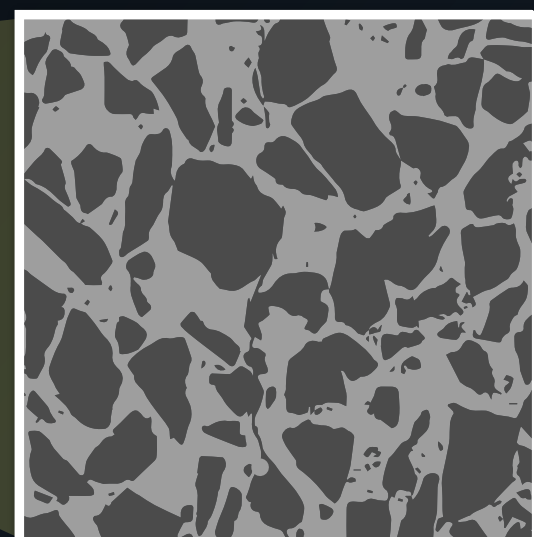
## Classe de lois anisotrope



## Classe de lois anisotrope

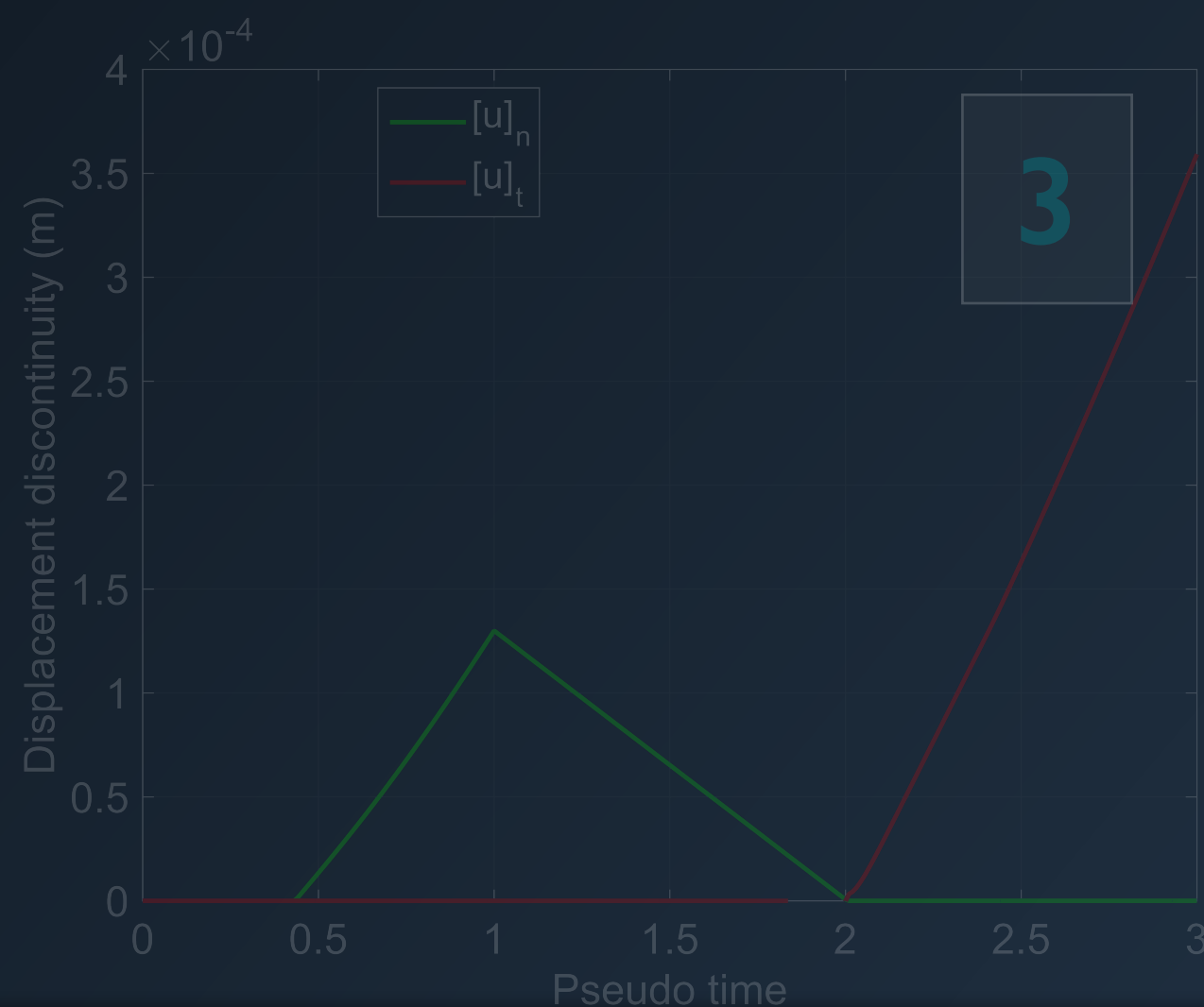
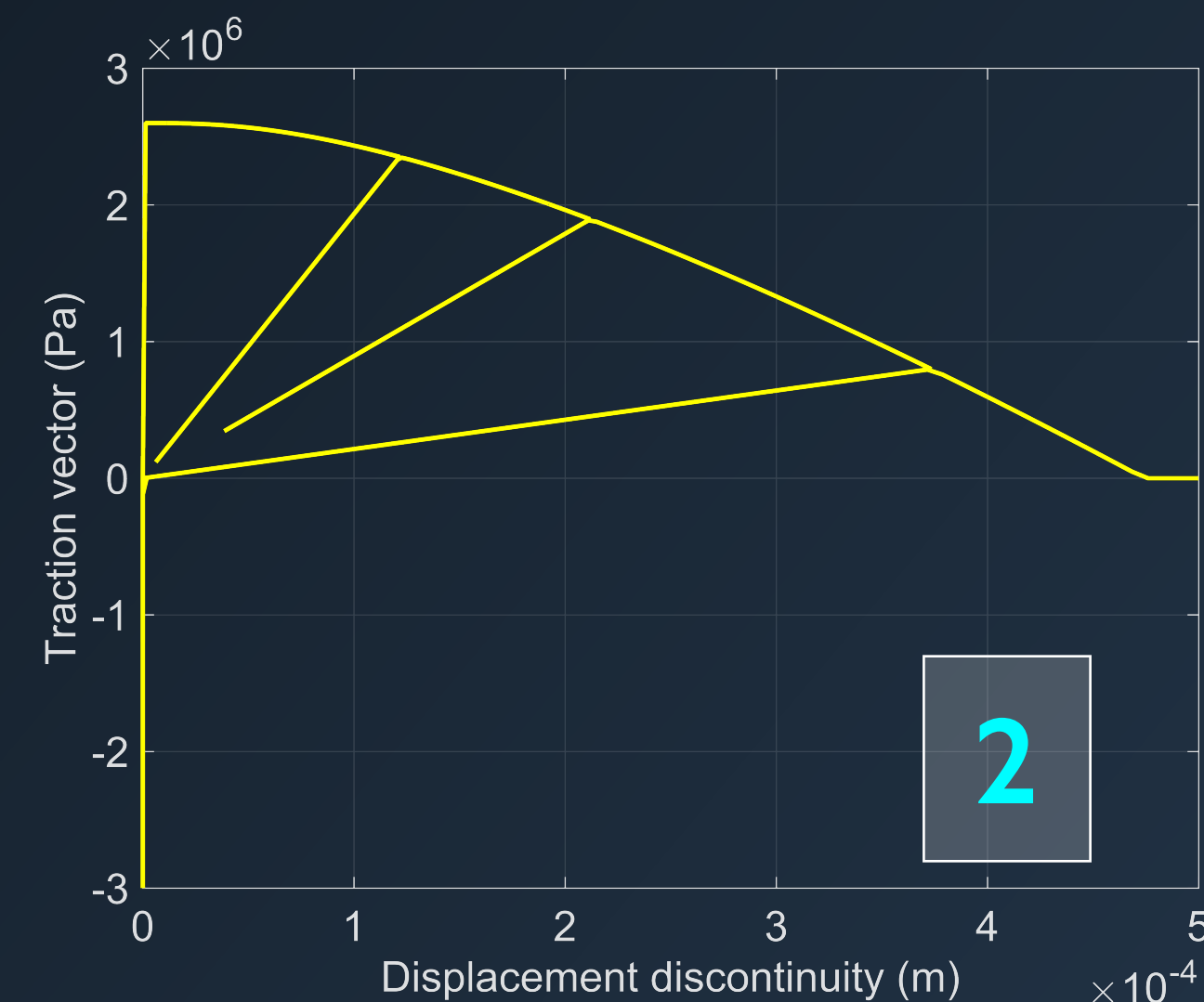
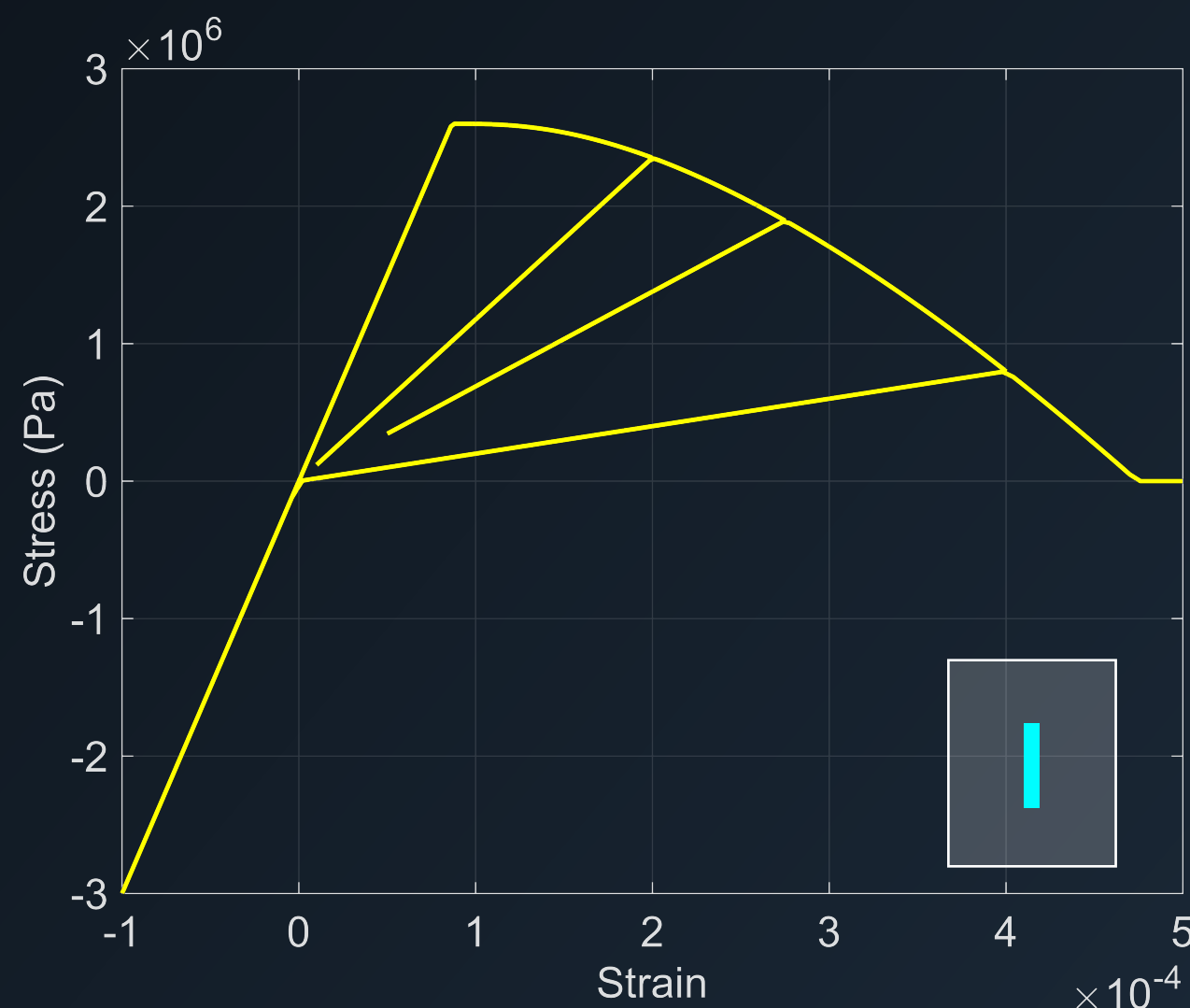


Traction  
cyclique



Equivalence contrainte/  
déformation et vecteur traction/  
saut de déplacement

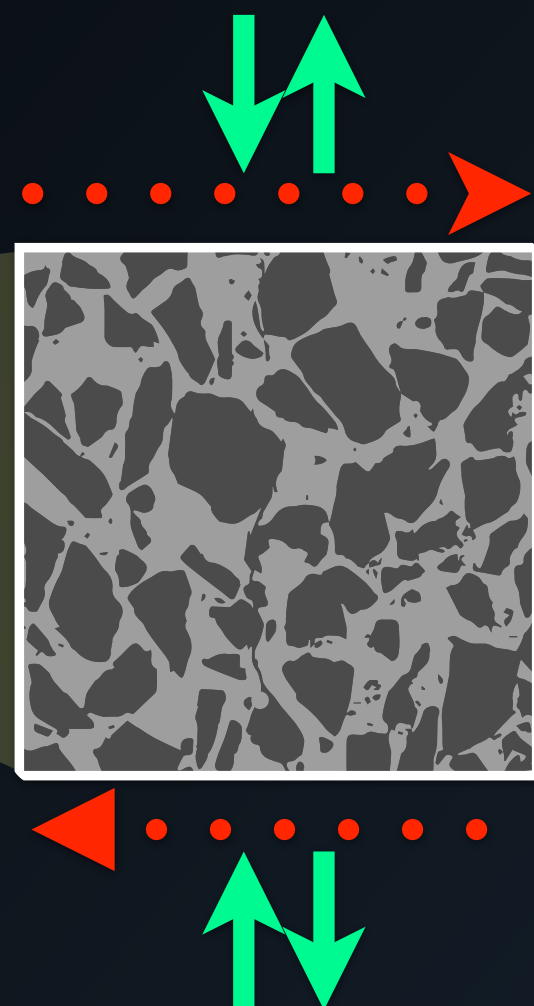
[Kishta et al, 2016]



## Classe de lois anisotrope

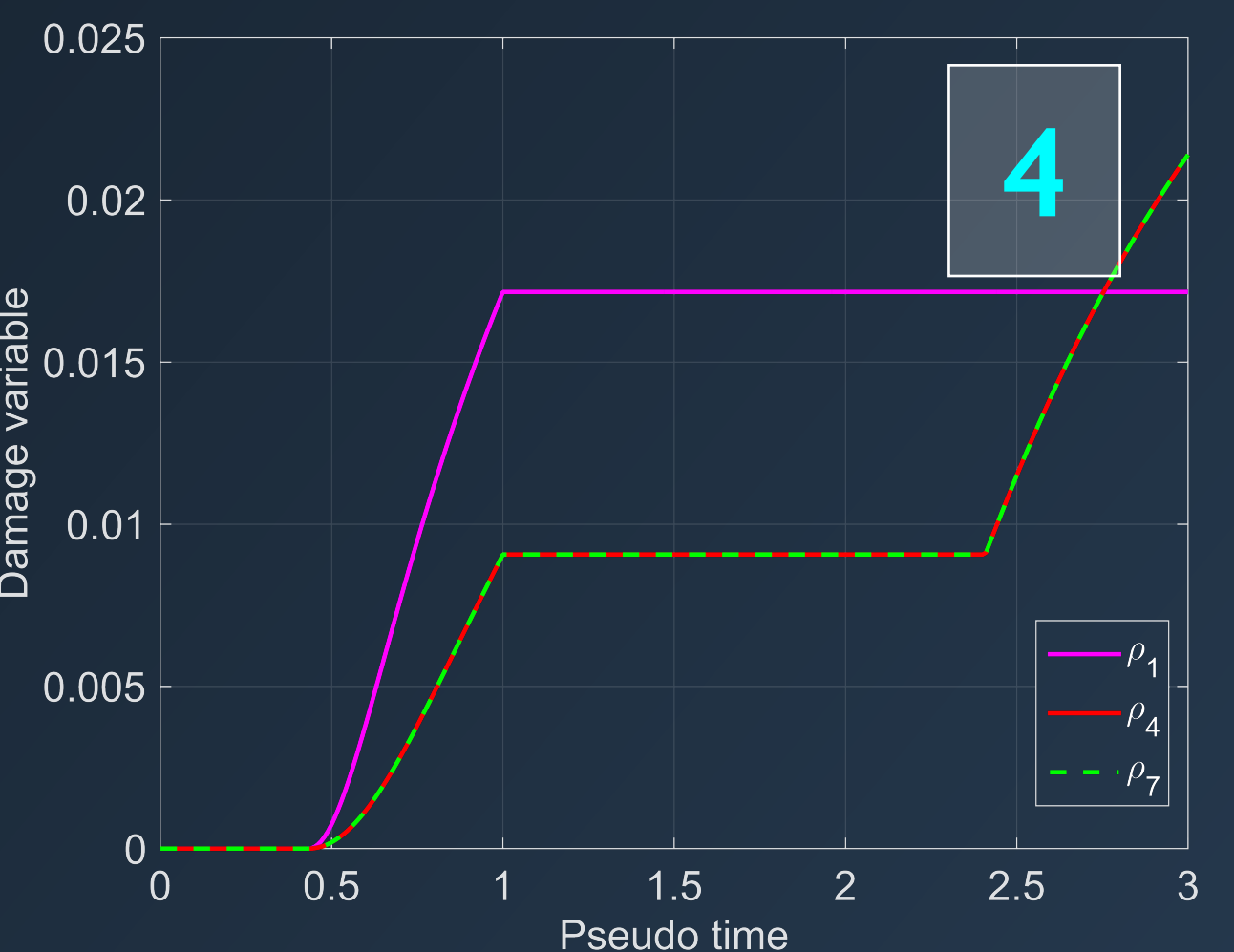
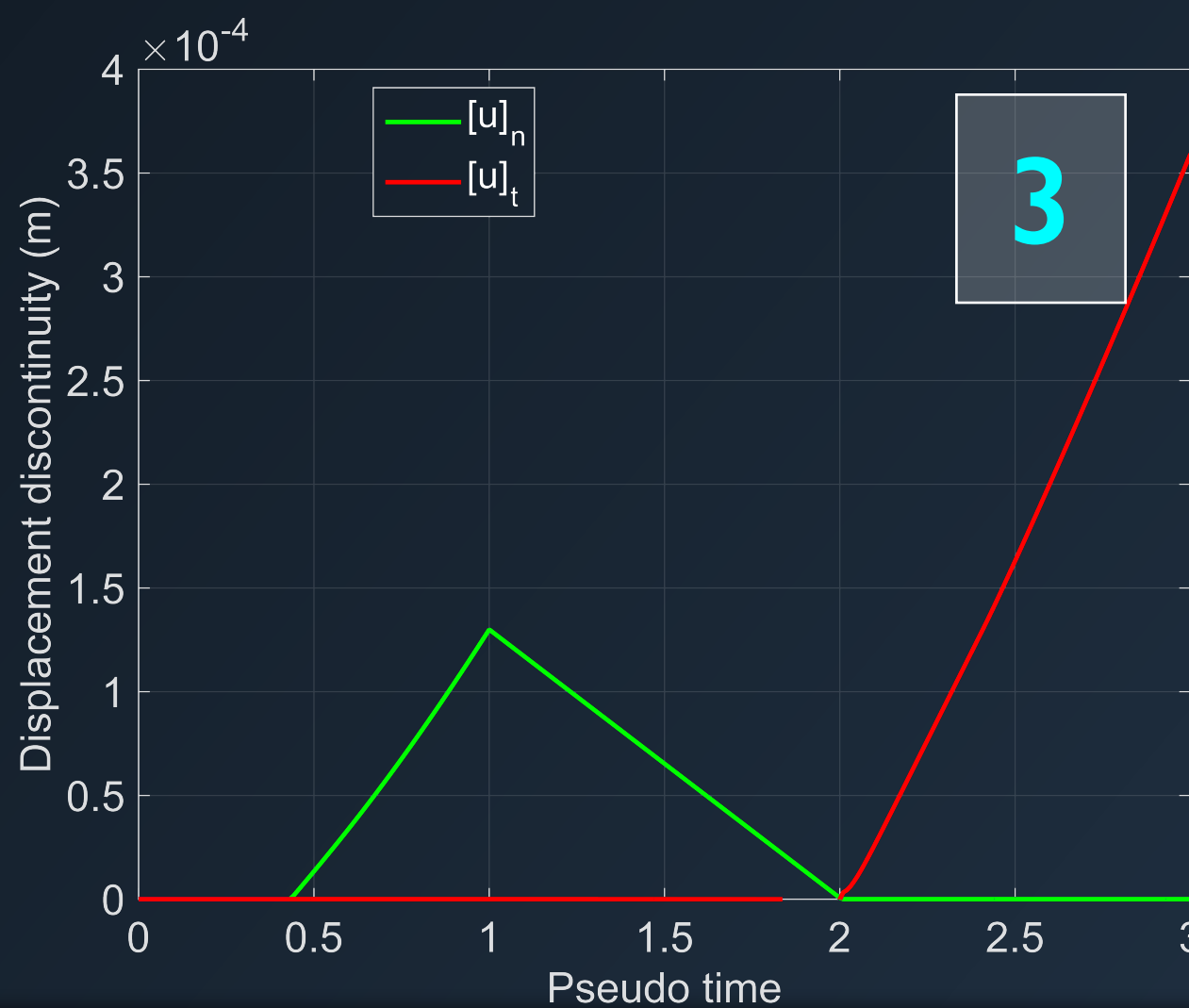
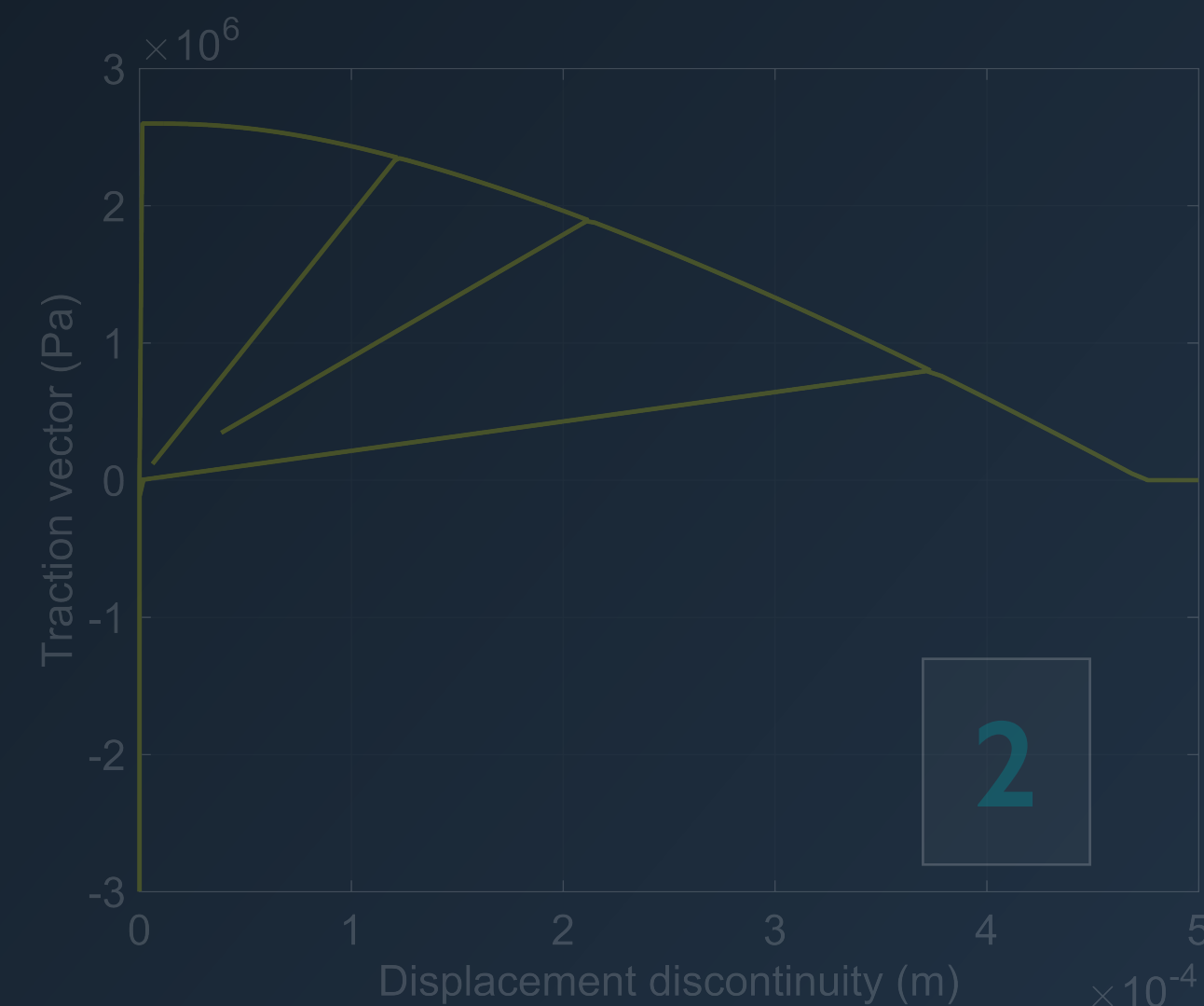
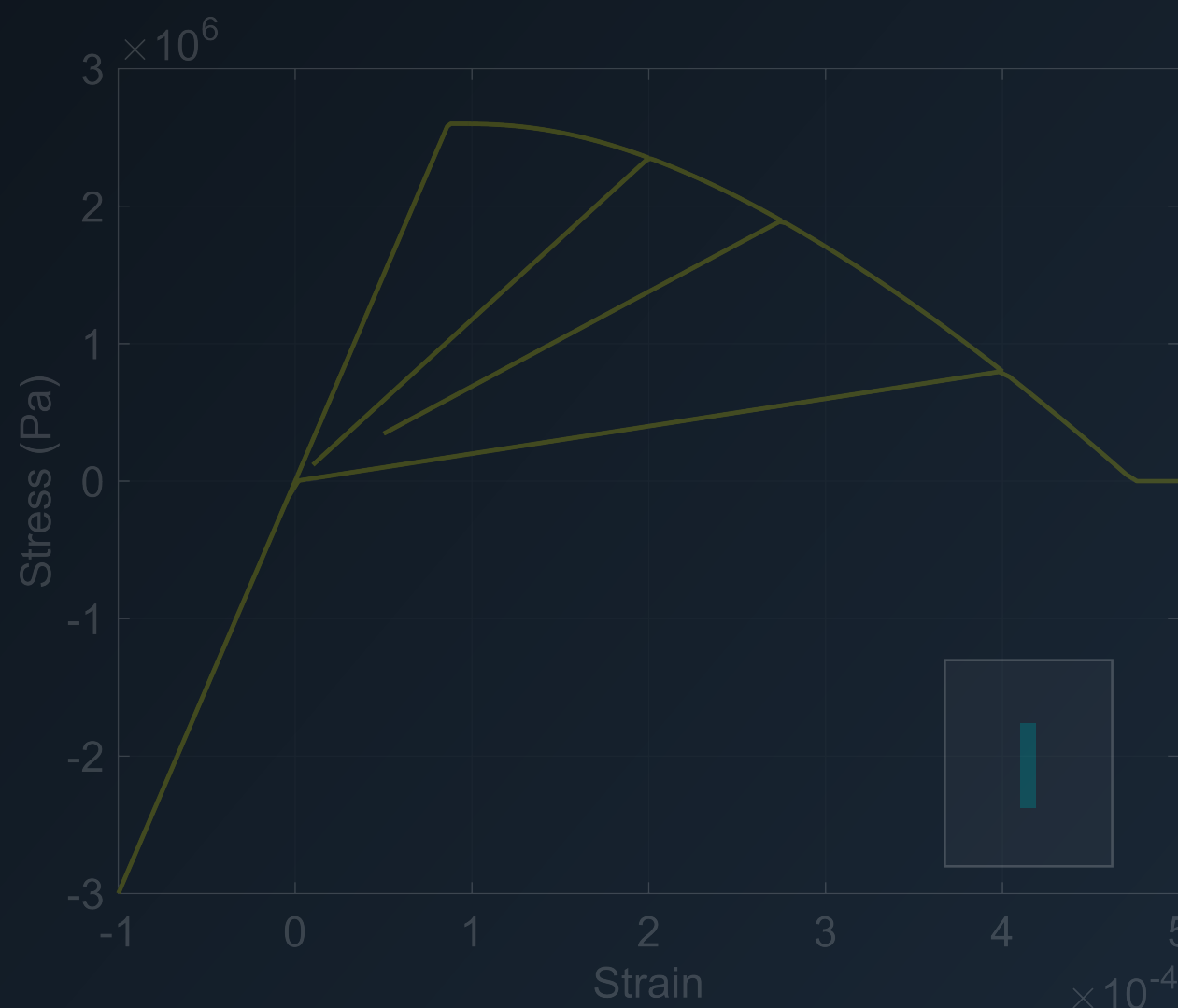


Traction/  
cisaillement



Ouvertures de fissures et  
variables d'endommagement

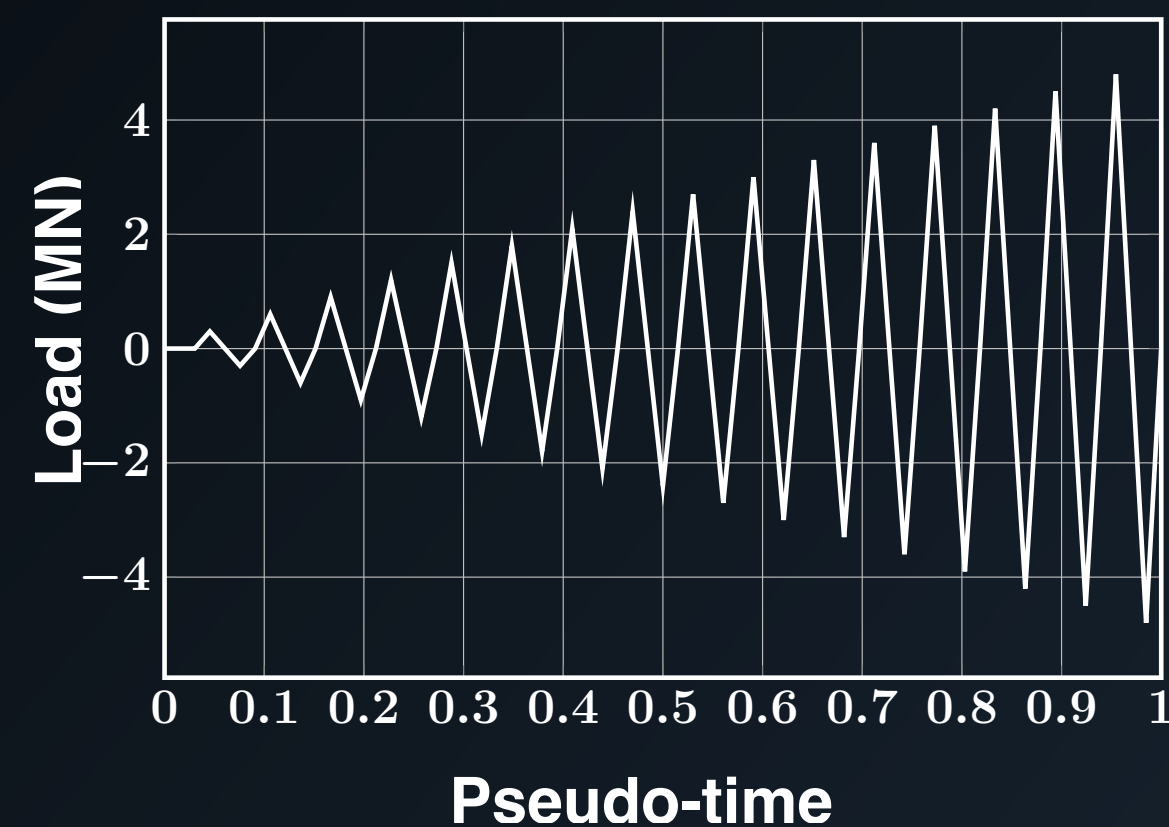
[Kishta et al, 2016]



## Classe de lois anisotrope



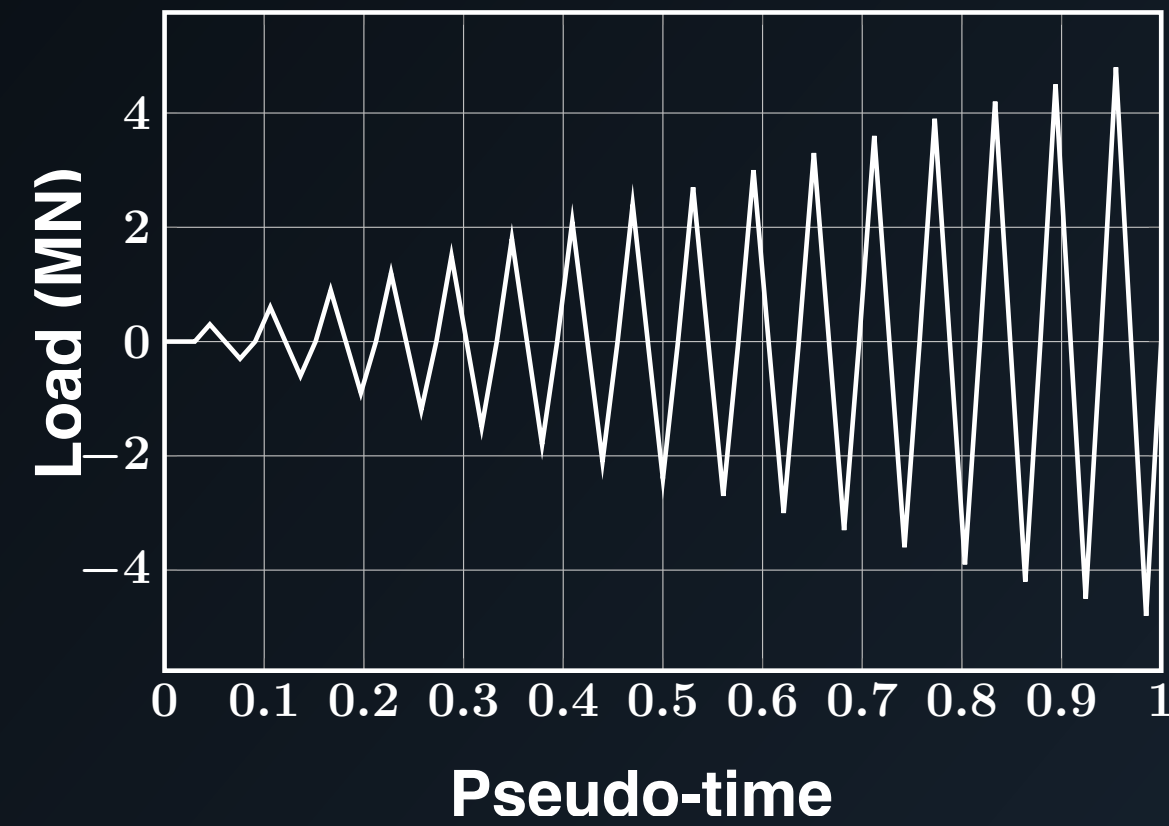
[Rivillon et al, 2011]



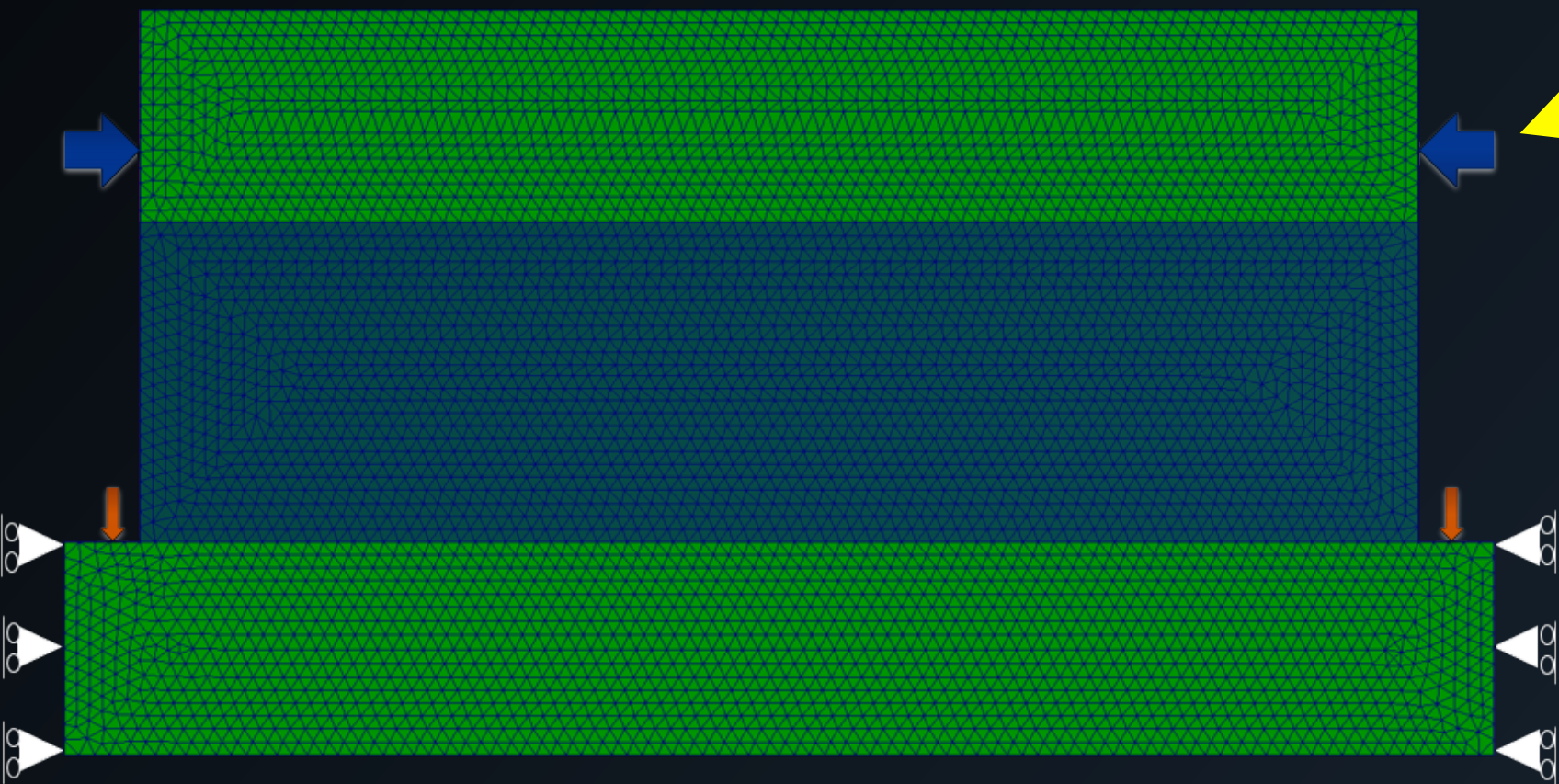
## Classe de lois anisotrope



[Rivillon et al, 2011]



[Balmaseda et al, 2016]

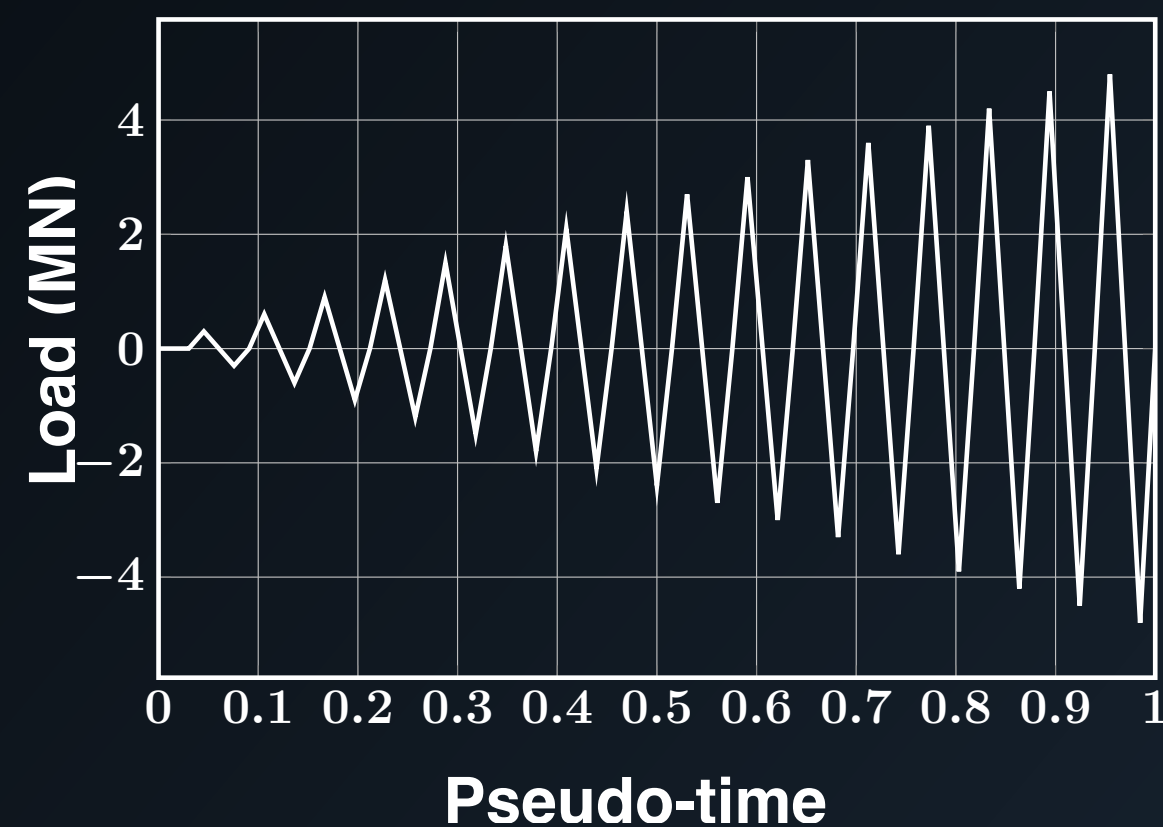




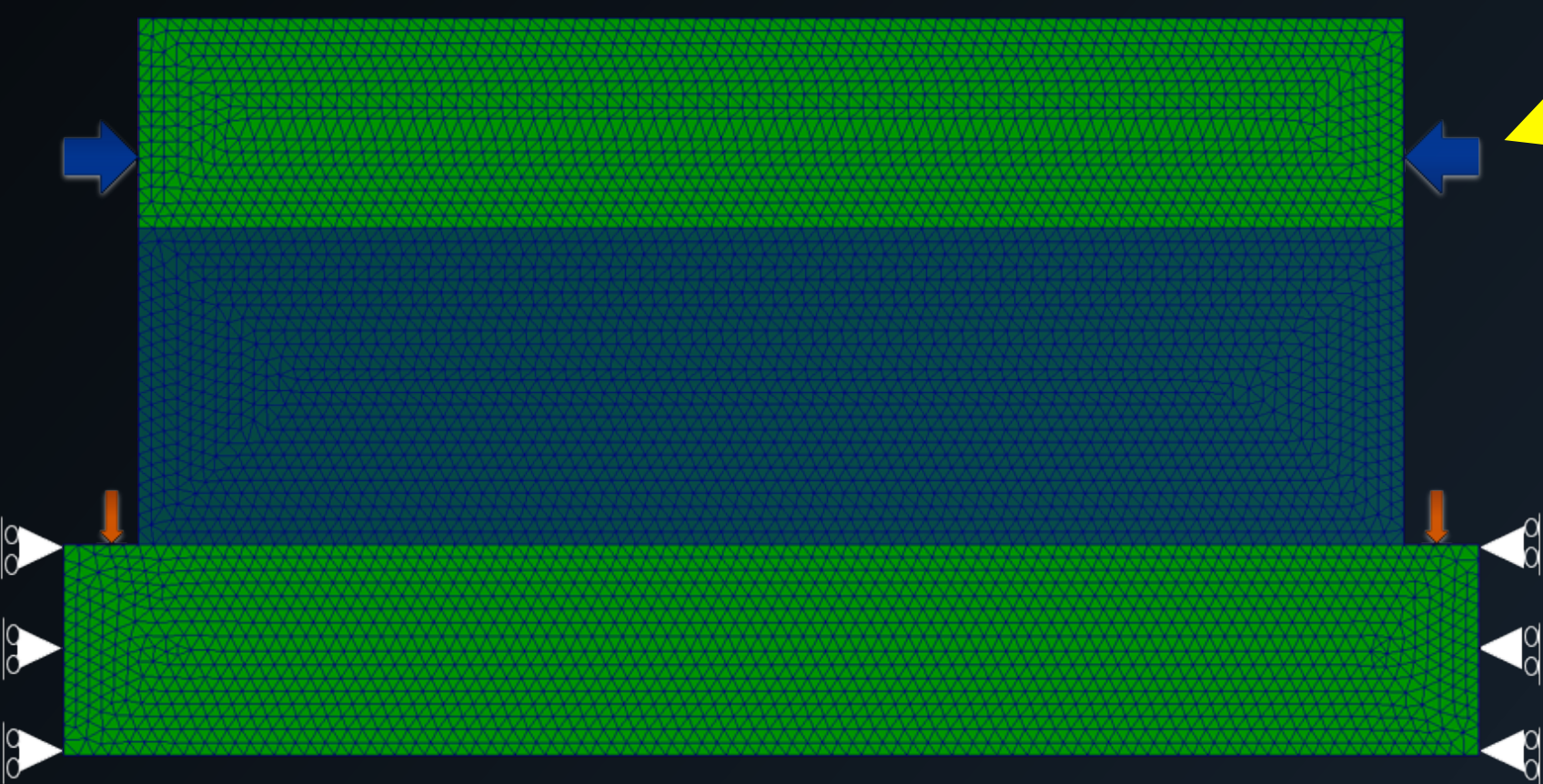
## Classe de lois anisotrope



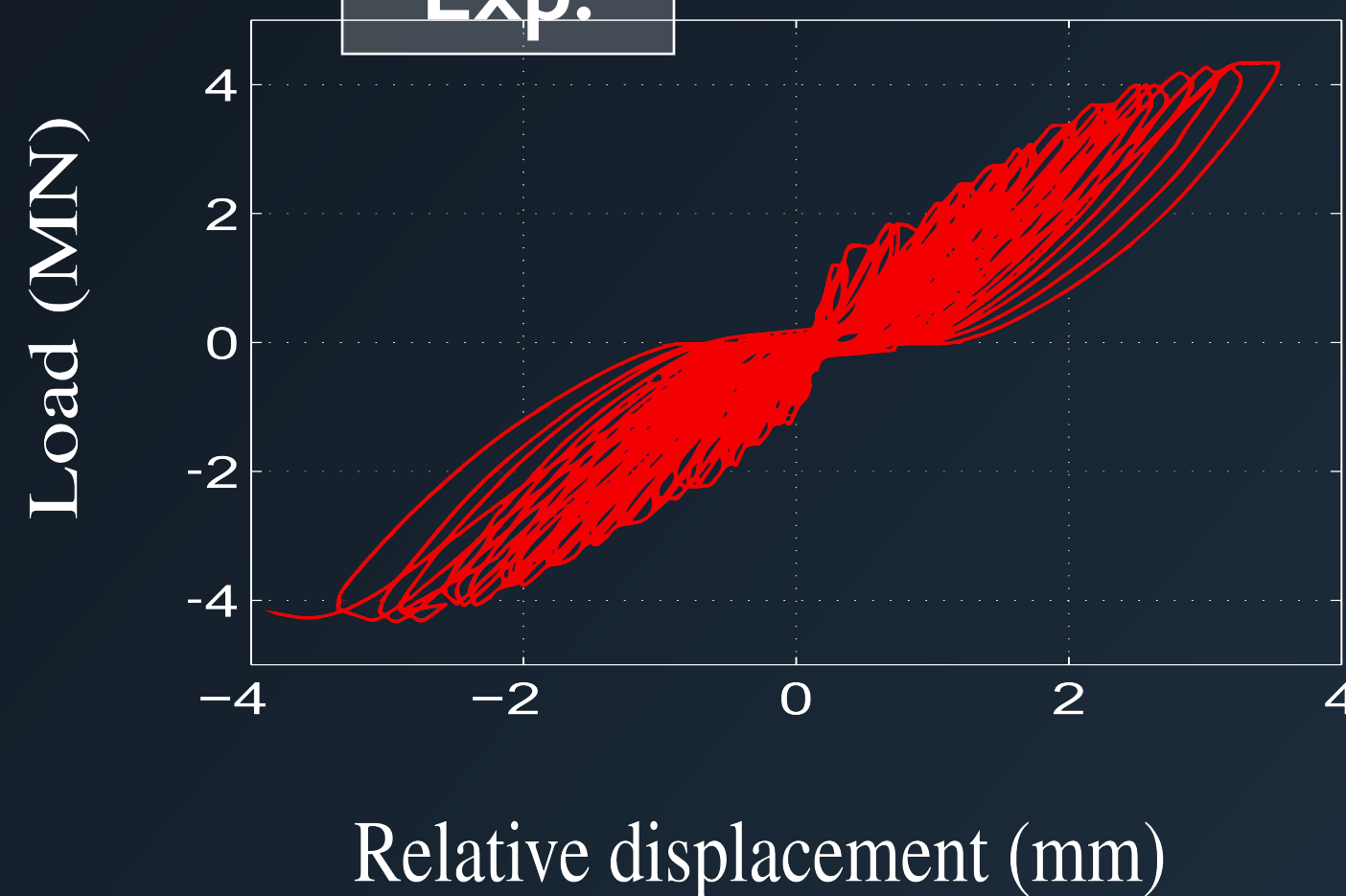
[Rivillon et al, 2011]



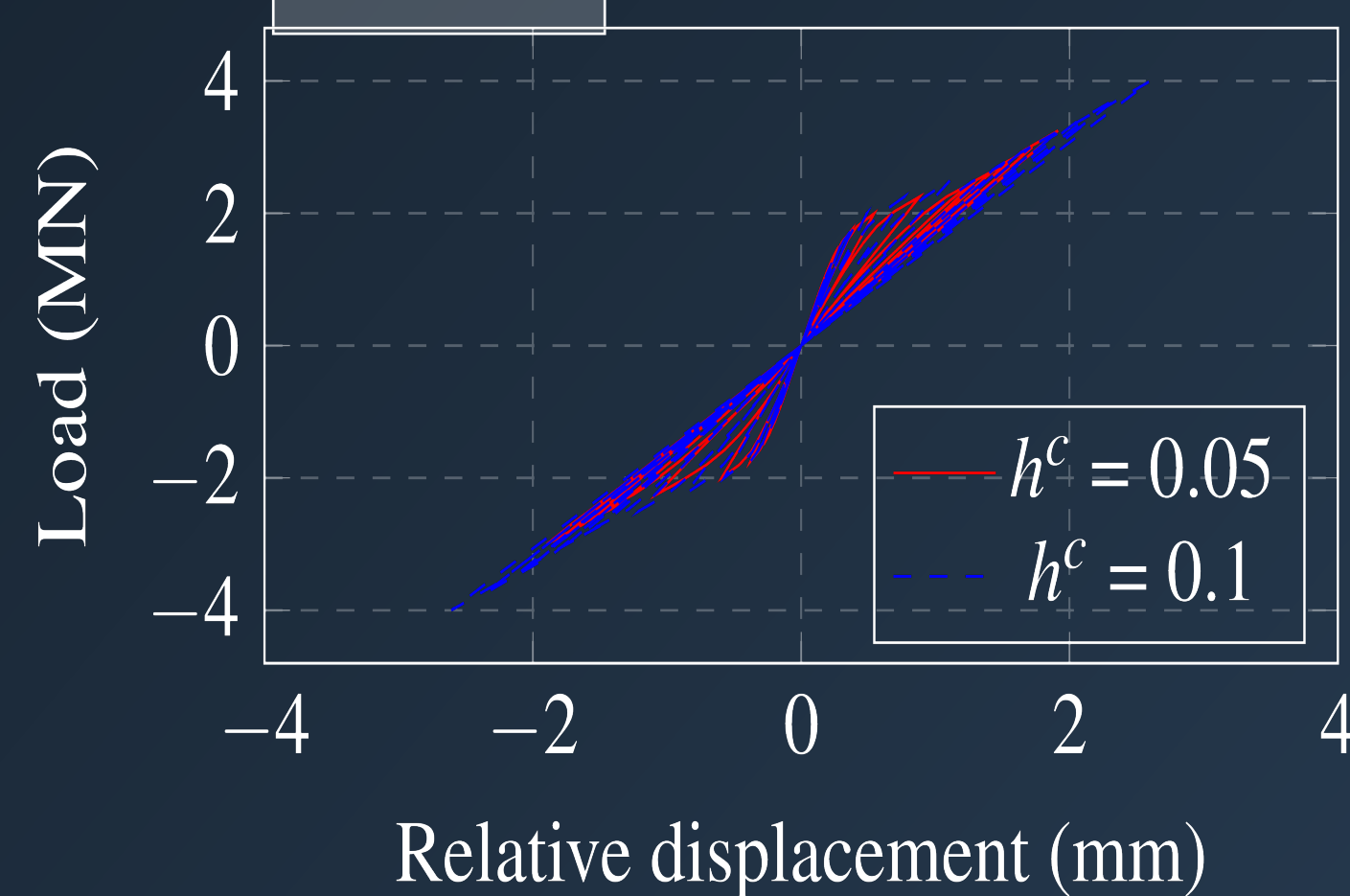
[Balmaseda et al, 2016]



Exp.



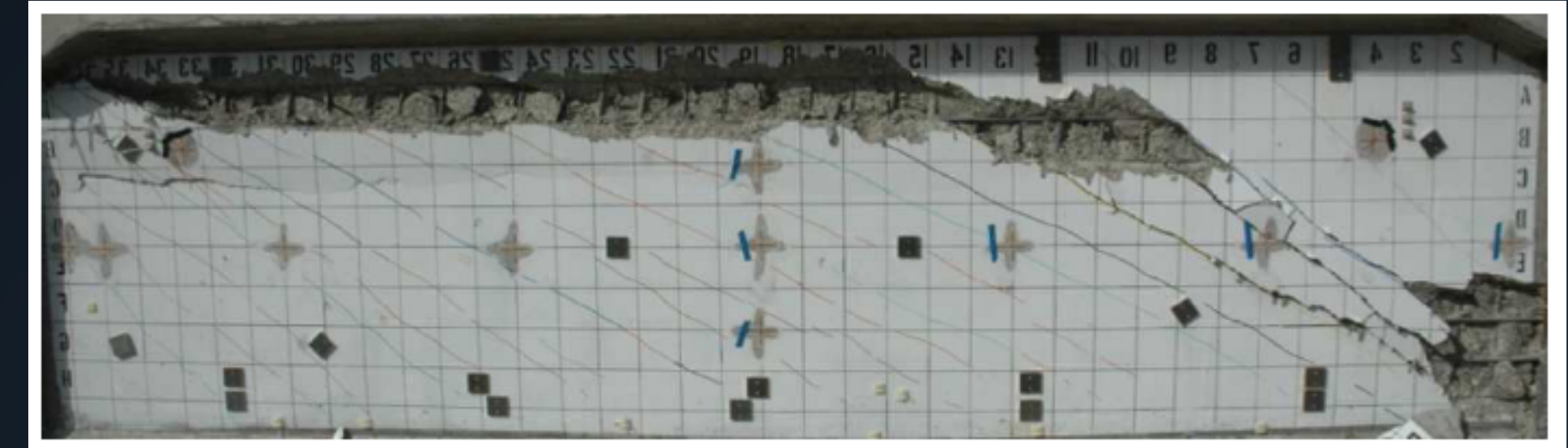
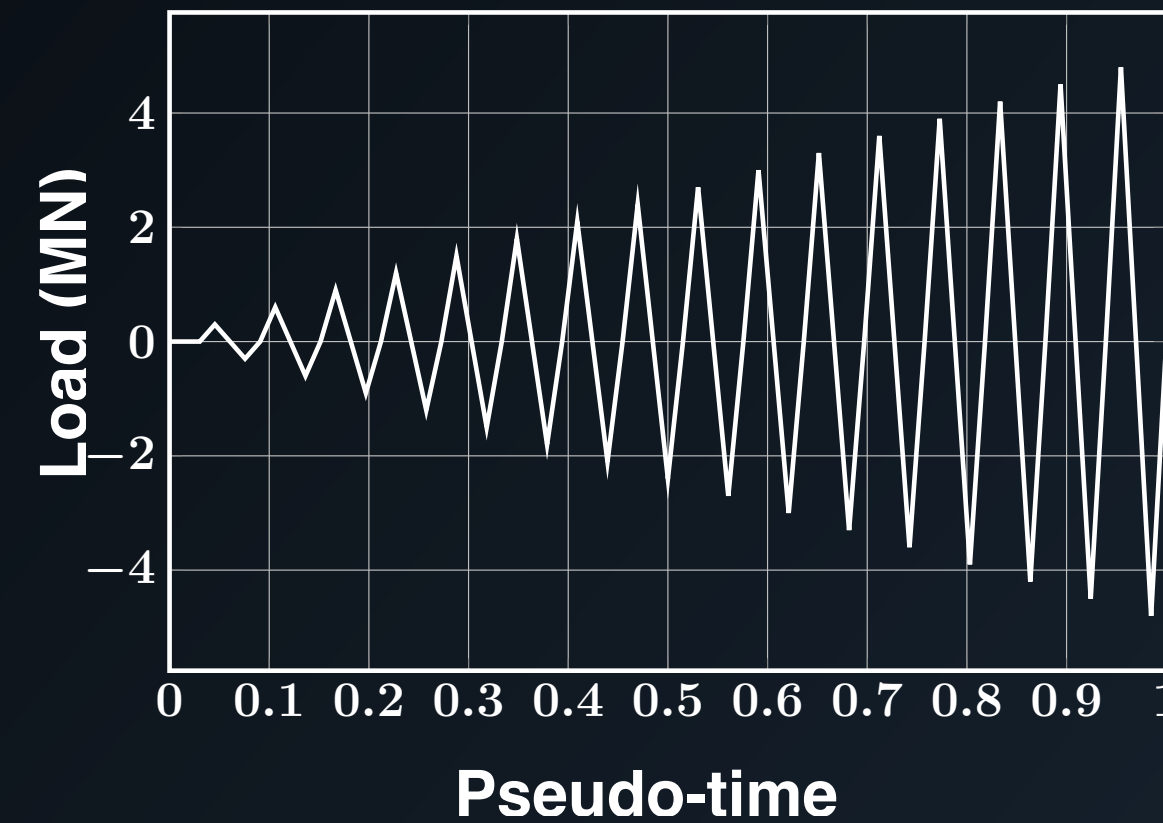
Num..



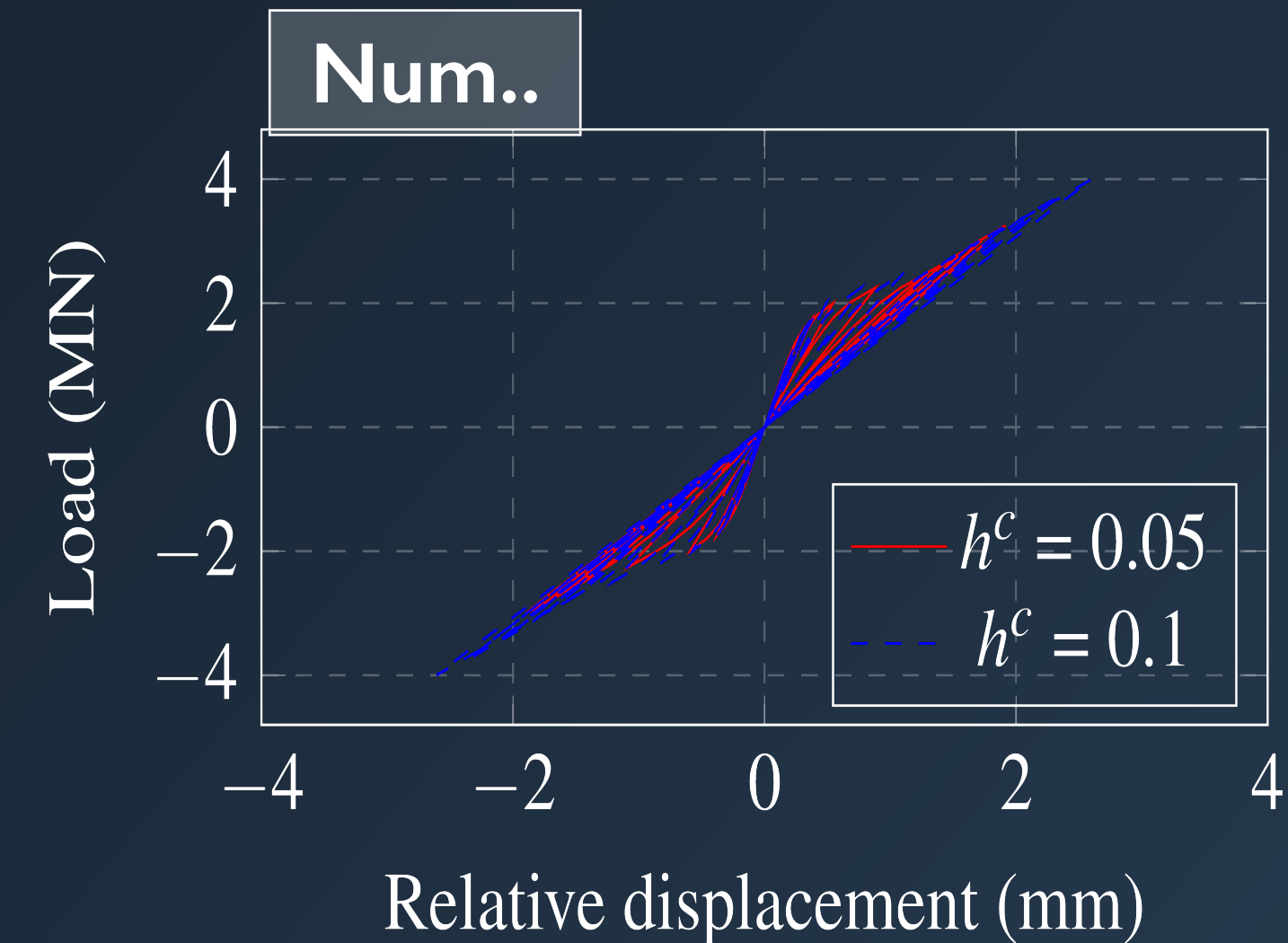
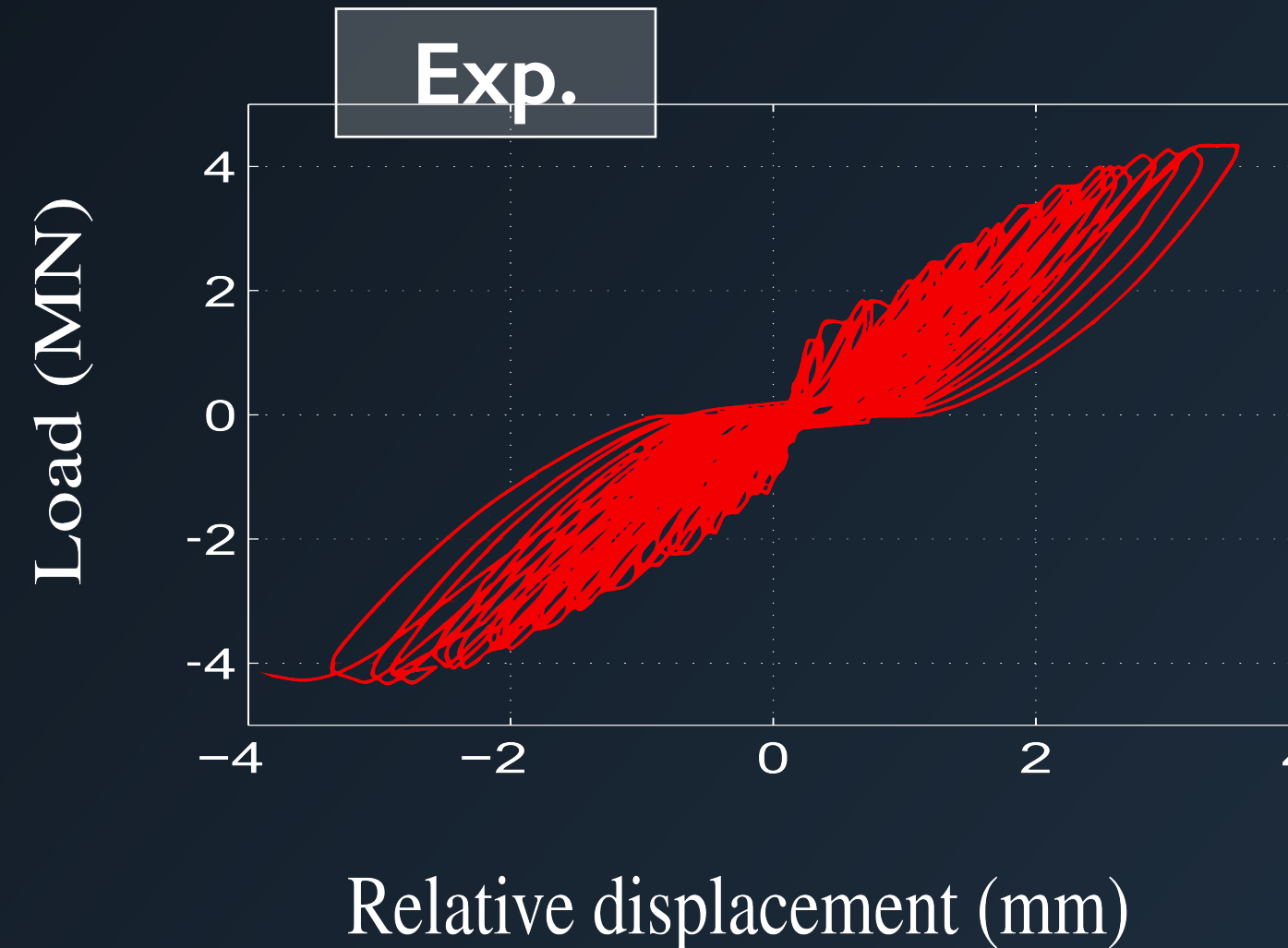
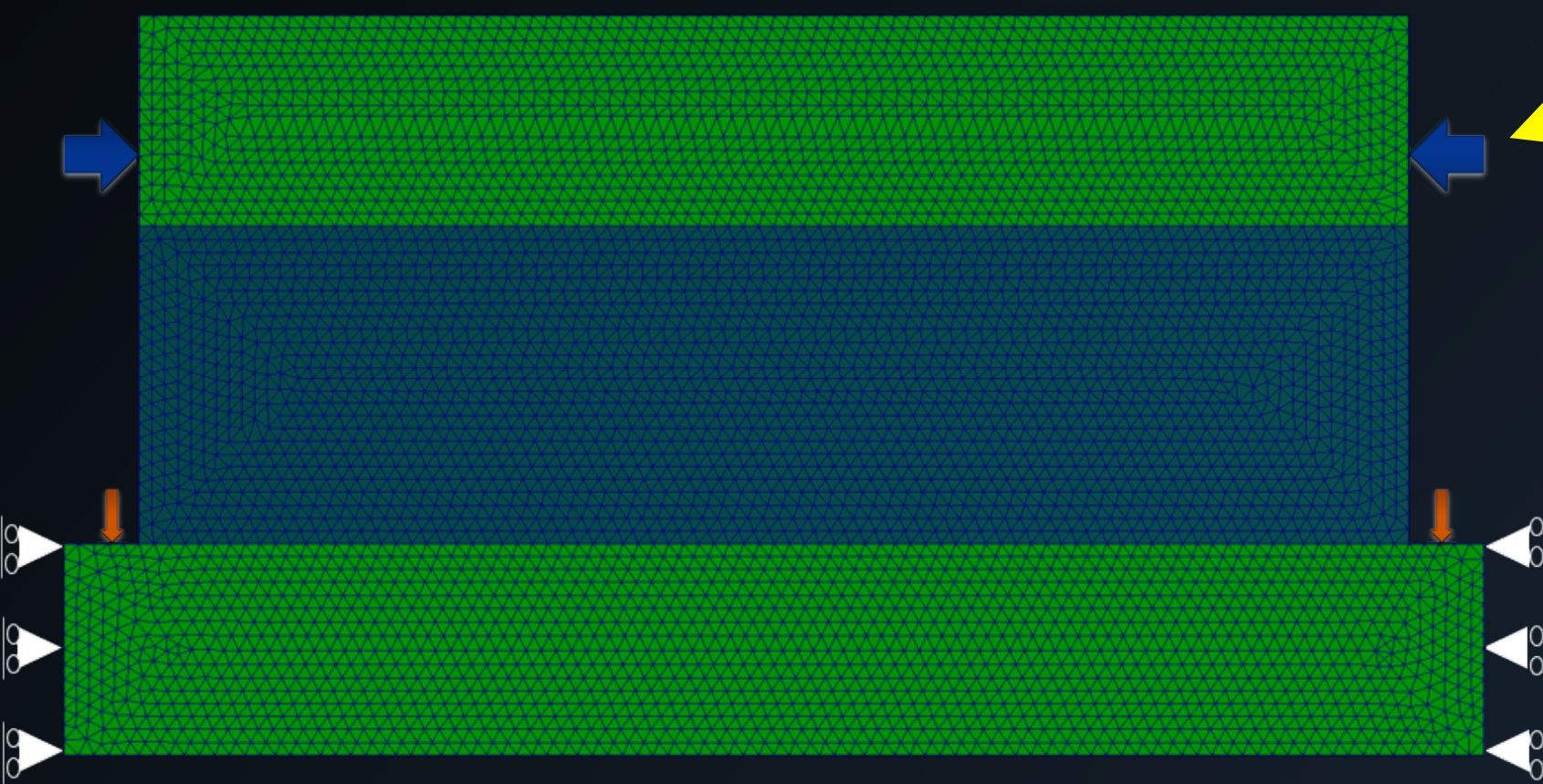
## Classe de lois anisotrope



[Rivillon et al, 2011]



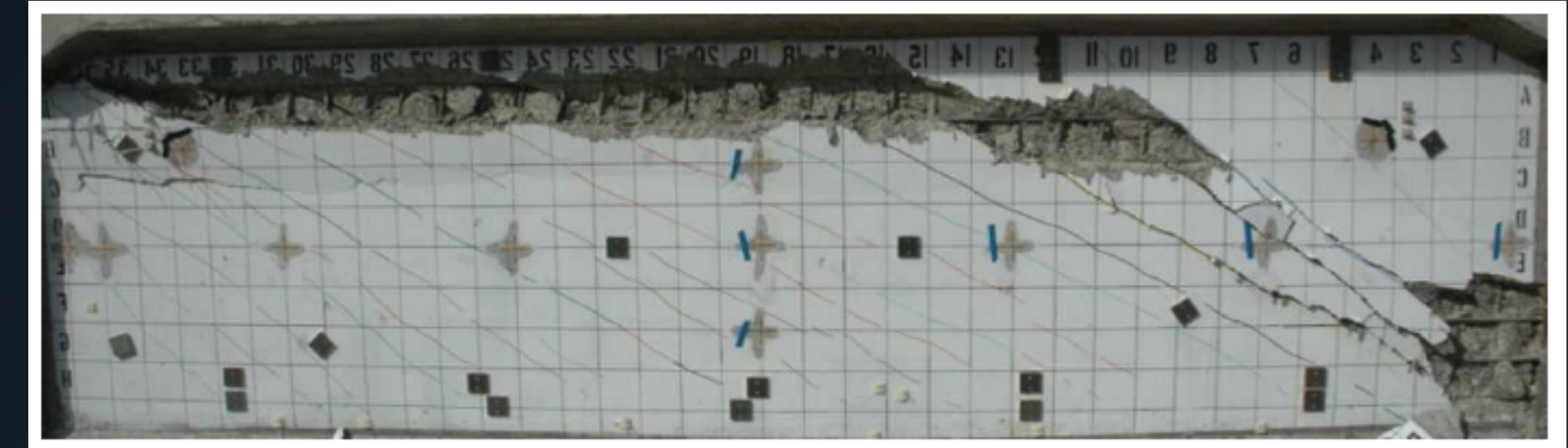
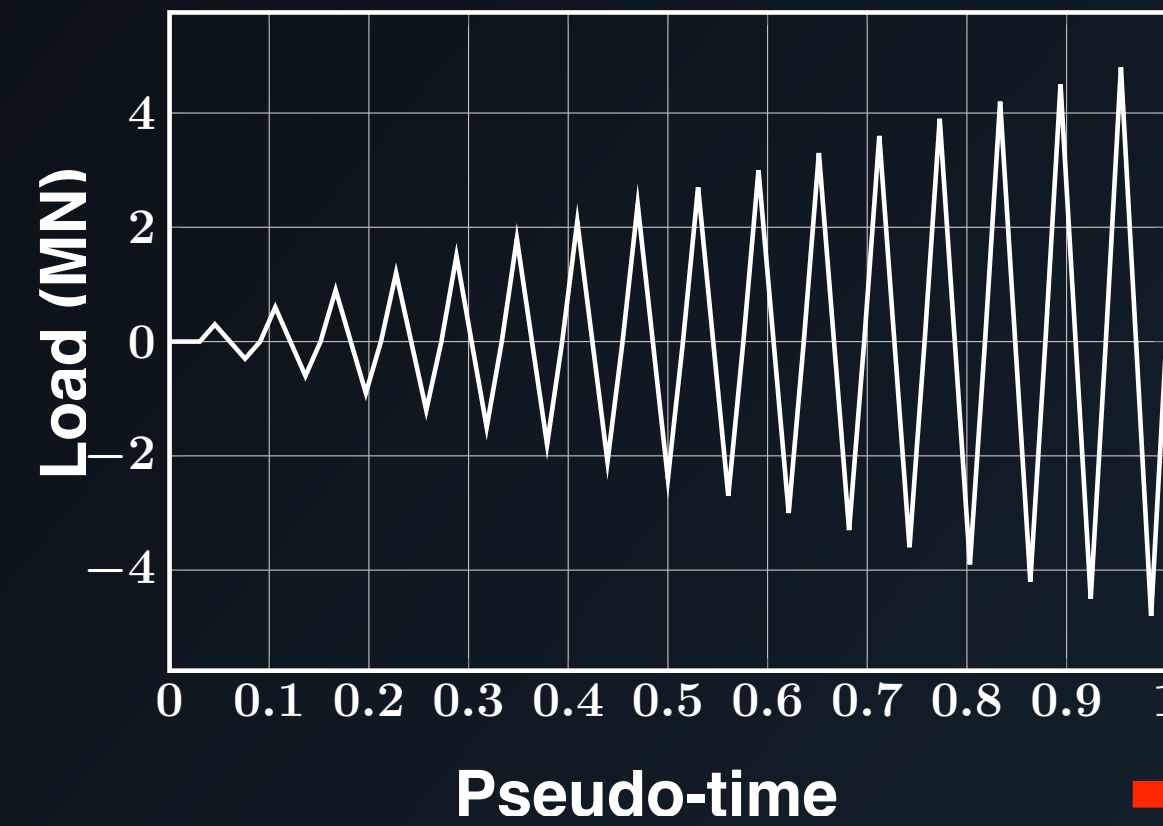
[Balmaseda et al, 2016]



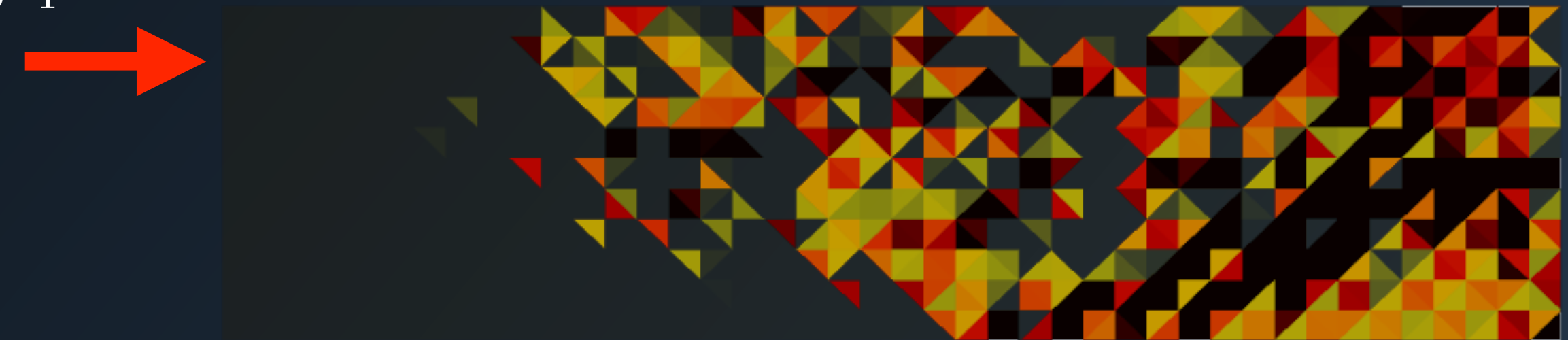
## Classe de lois anisotrope



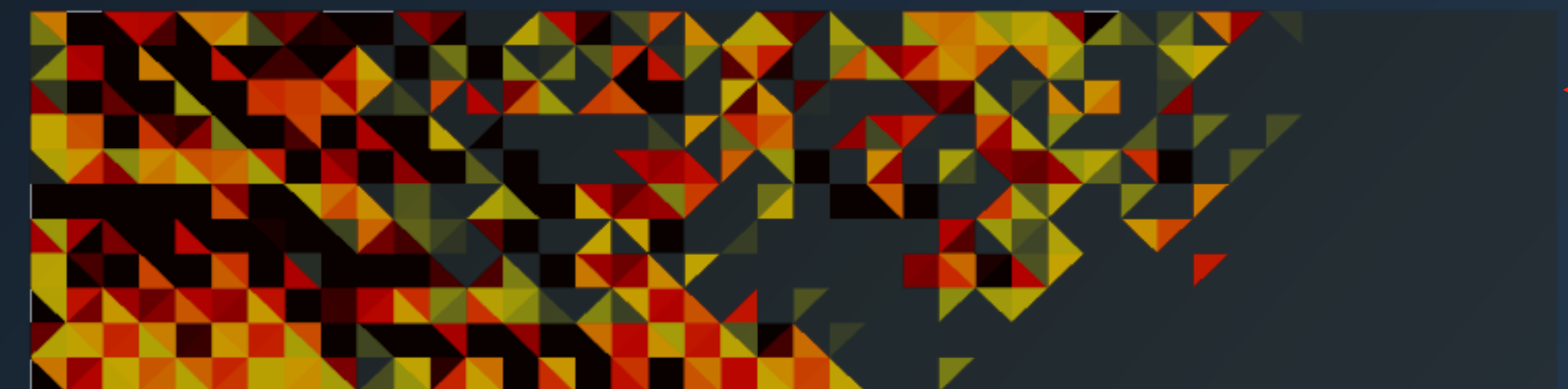
[Rivillon et al, 2011]



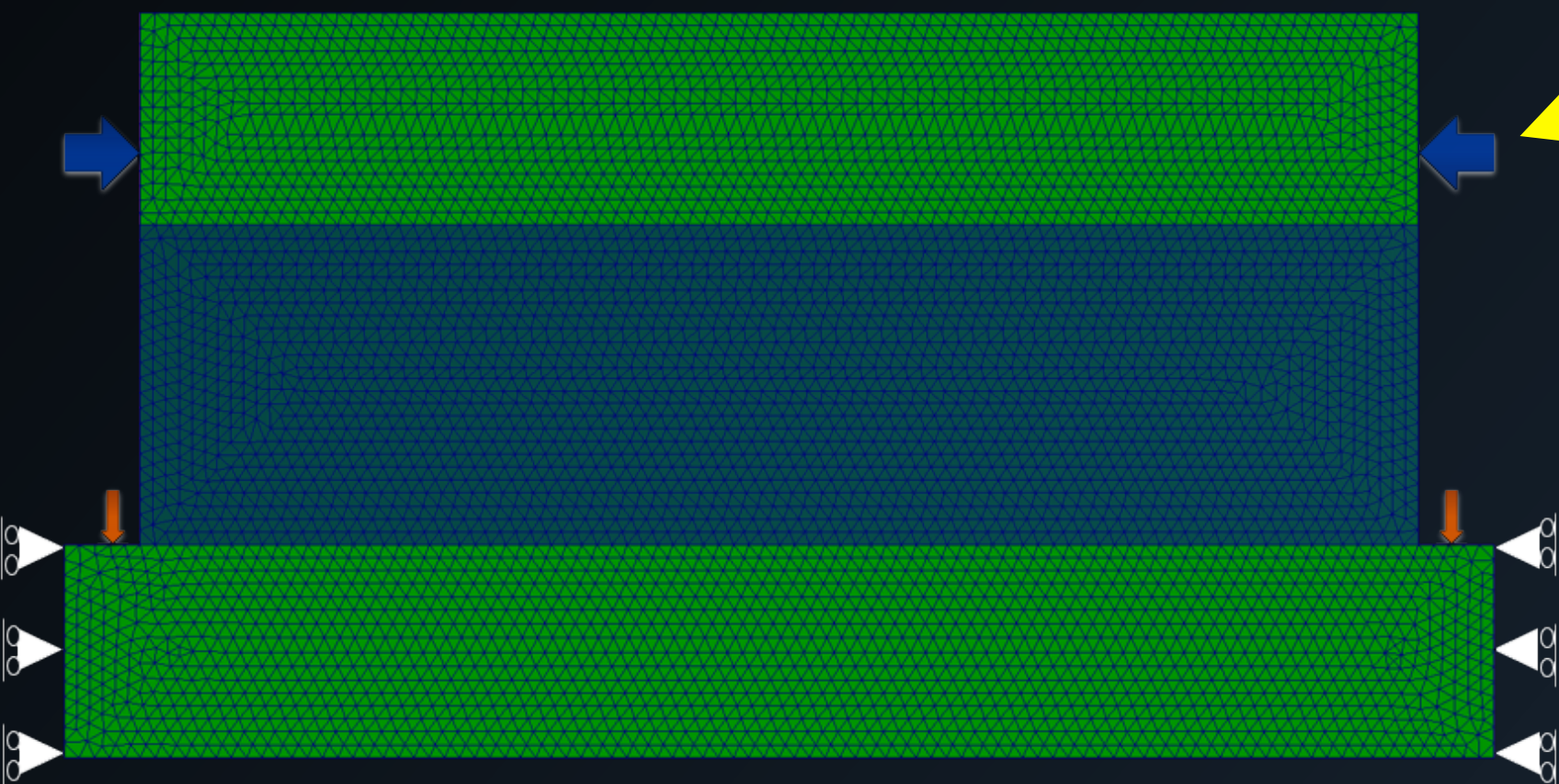
0.000e+00 7e-5 0.00014 0.00021 2.790e-04



0.000e+00 7e-5 0.00014 0.00021 2.790e-04



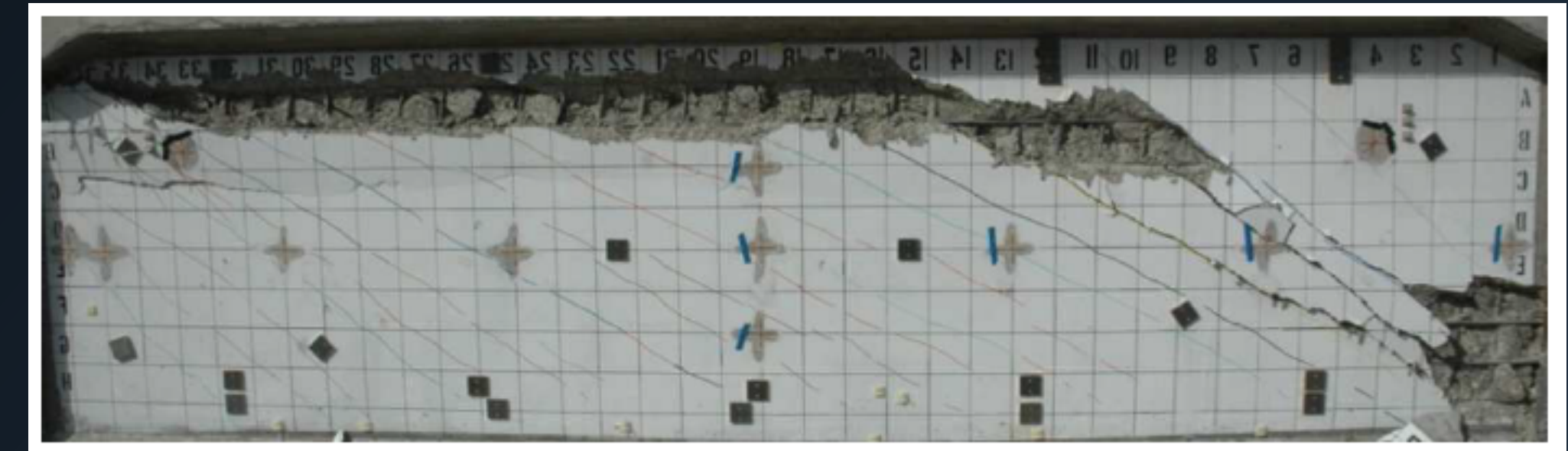
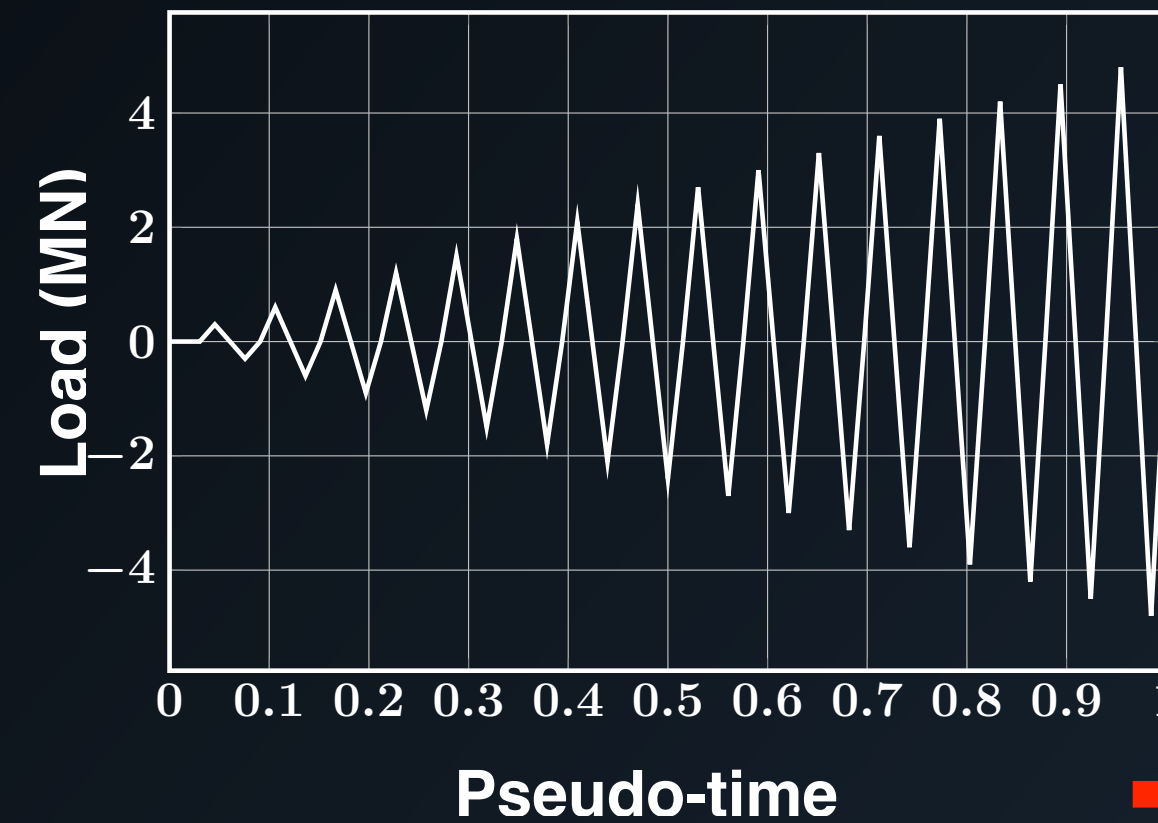
[Balmaseda et al, 2016]



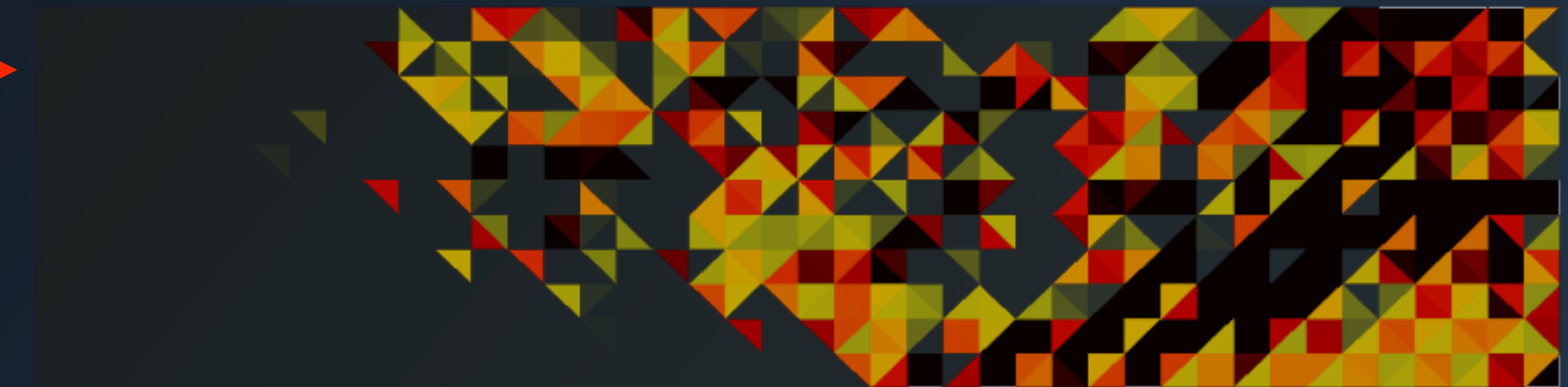
## Classe de lois anisotrope



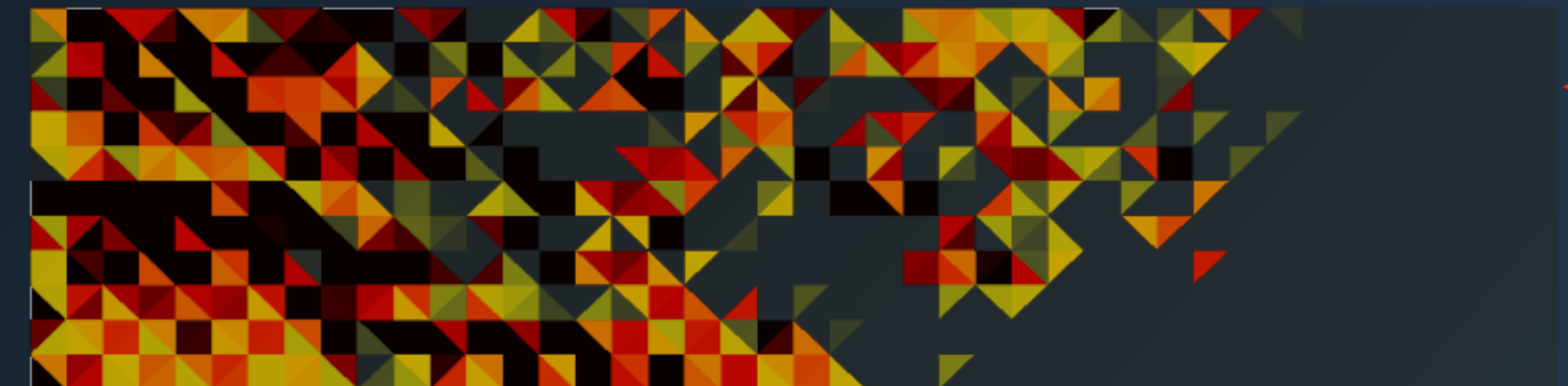
[Rivillon et al, 2011]



0.000e+00 7e-5 0.00014 0.00021 2.790e-04



0.000e+00 7e-5 0.00014 0.00021 2.790e-04



- 1. Quantification de la fissuration
- 2. Peu de dépendance au maillage
- 3. Robustesse de l'intégration locale (loi « vectorielle »)

- 1. Pas de continuité du chemin de fissuration
- 2. Difficultés à identifier chaque fissure

# CONTINUITÉ DU TRAJET DE FISSURATION

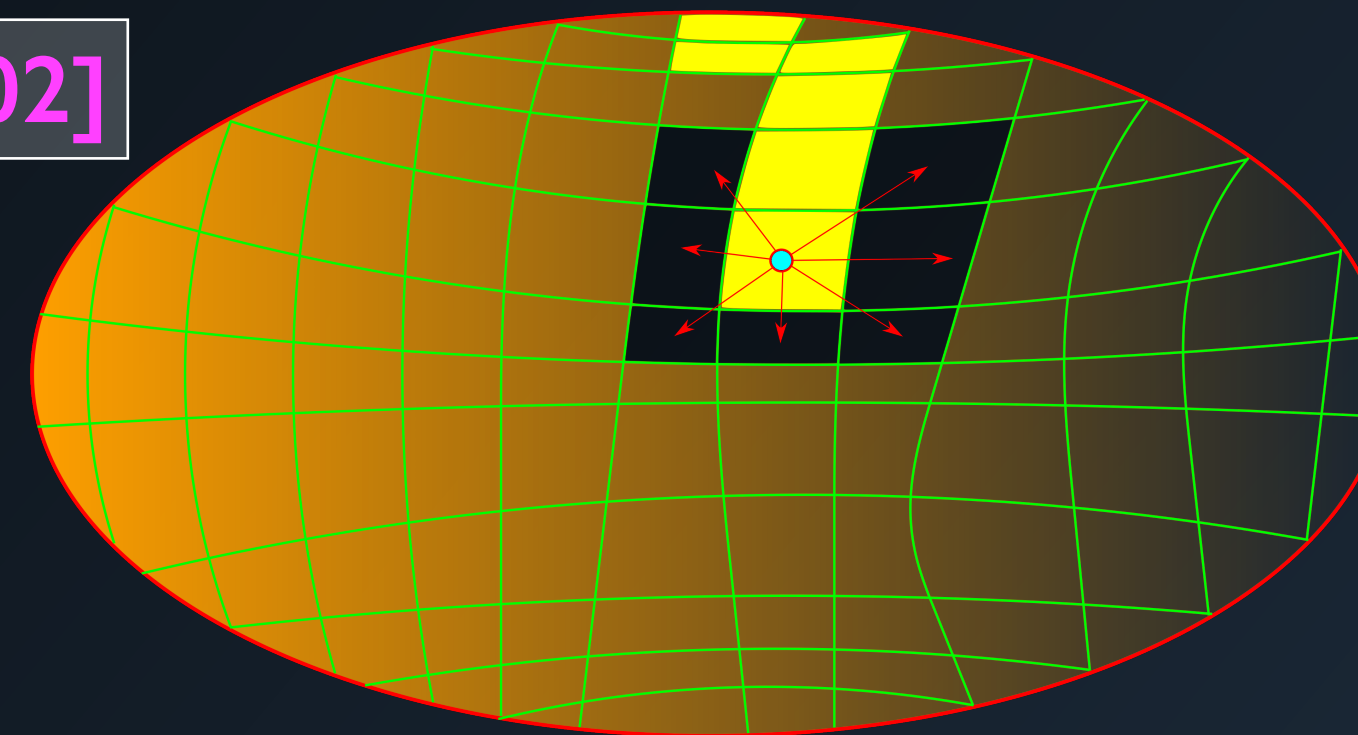
- Pour doit-on assurer la continuité ?
  - Eviter les phénomènes de blocage en contrainte
  - Saut de déplacement - CHAMELEM

- Pour doit-on assurer la continuité ?
  - Eviter les phénomènes de blocage en contrainte
  - Saut de déplacement - CHAMELEM

[Alfaiate et al, 2002]

Tracking local

Problème non-  
local



Utilisation d'un  
champ de  
connectivité

- Pour doit-on assurer la continuité ?
  - Eviter les phénomènes de blocage en contrainte
  - Saut de déplacement - CHAMELEM

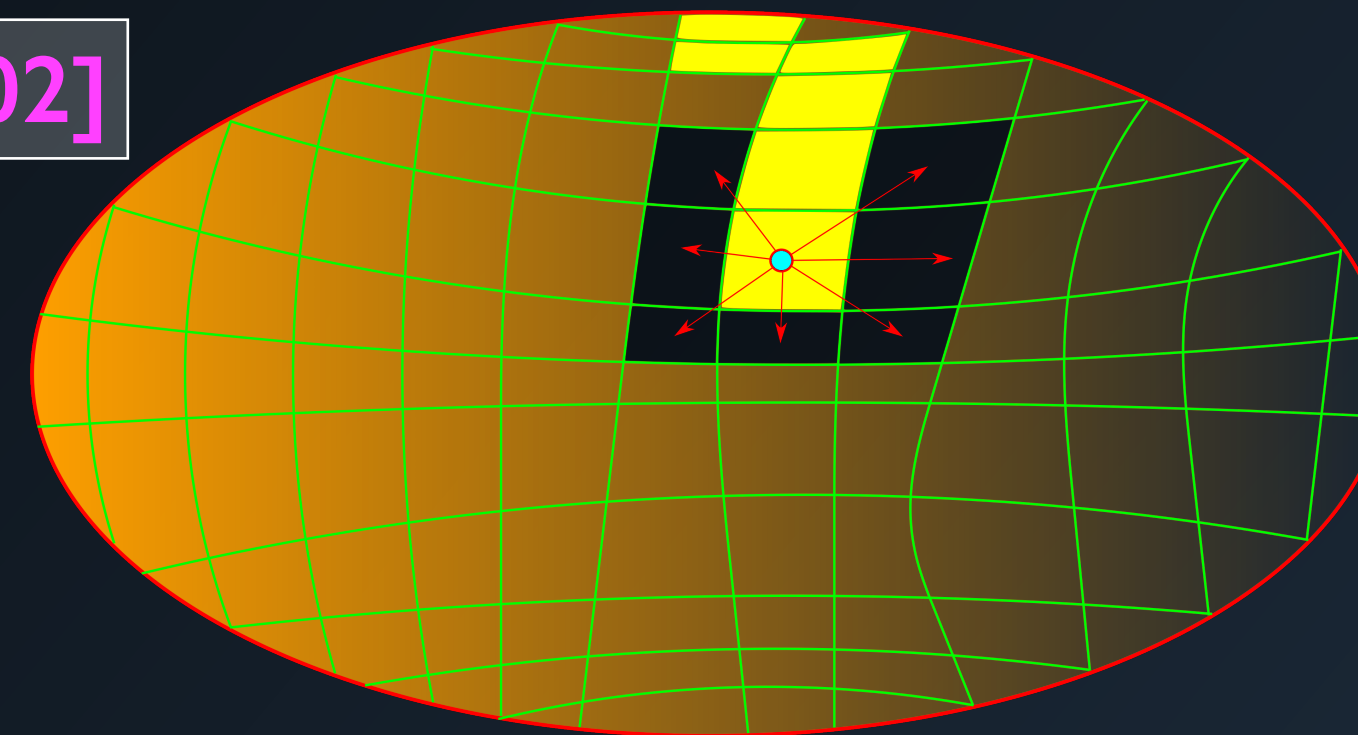
Tracking local

Problème non-local

Tracking global

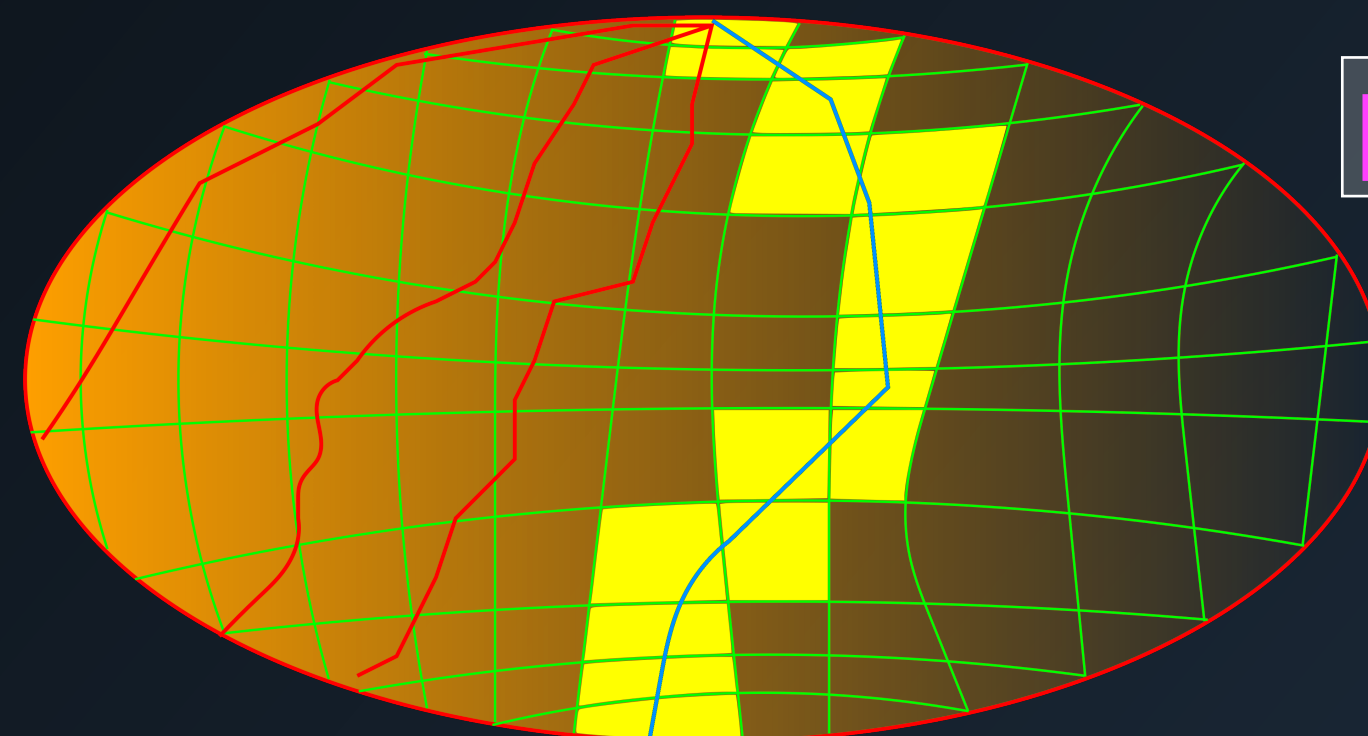
Problème de conduction

[Alfaiate et al, 2002]



Utilisation d'un champ de connectivité

[Oliver et al, 2002]



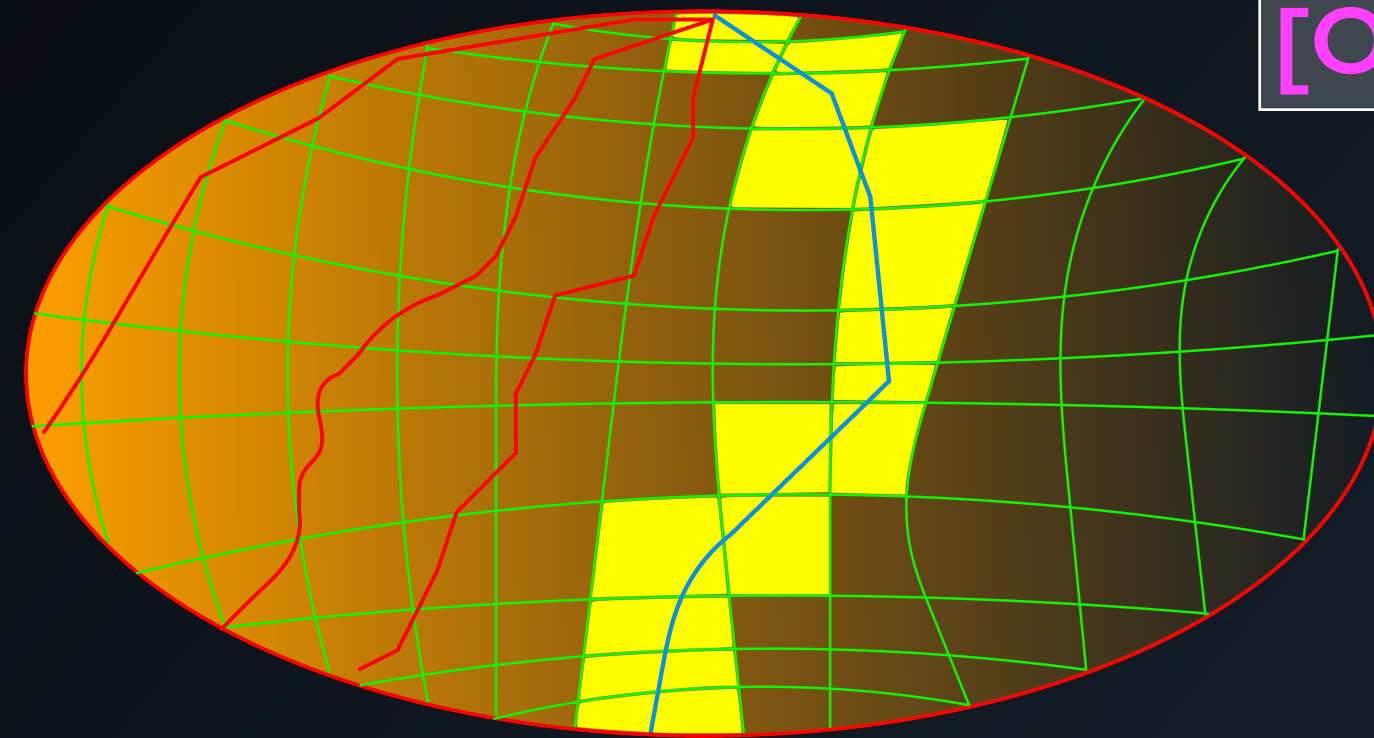
$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} &\in \Omega \\
 \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} &\in \Omega \\
 \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} &\in \Omega_q \\
 \theta &= \theta^* & \underline{x} &\in \Omega_\theta
 \end{aligned}$$



# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



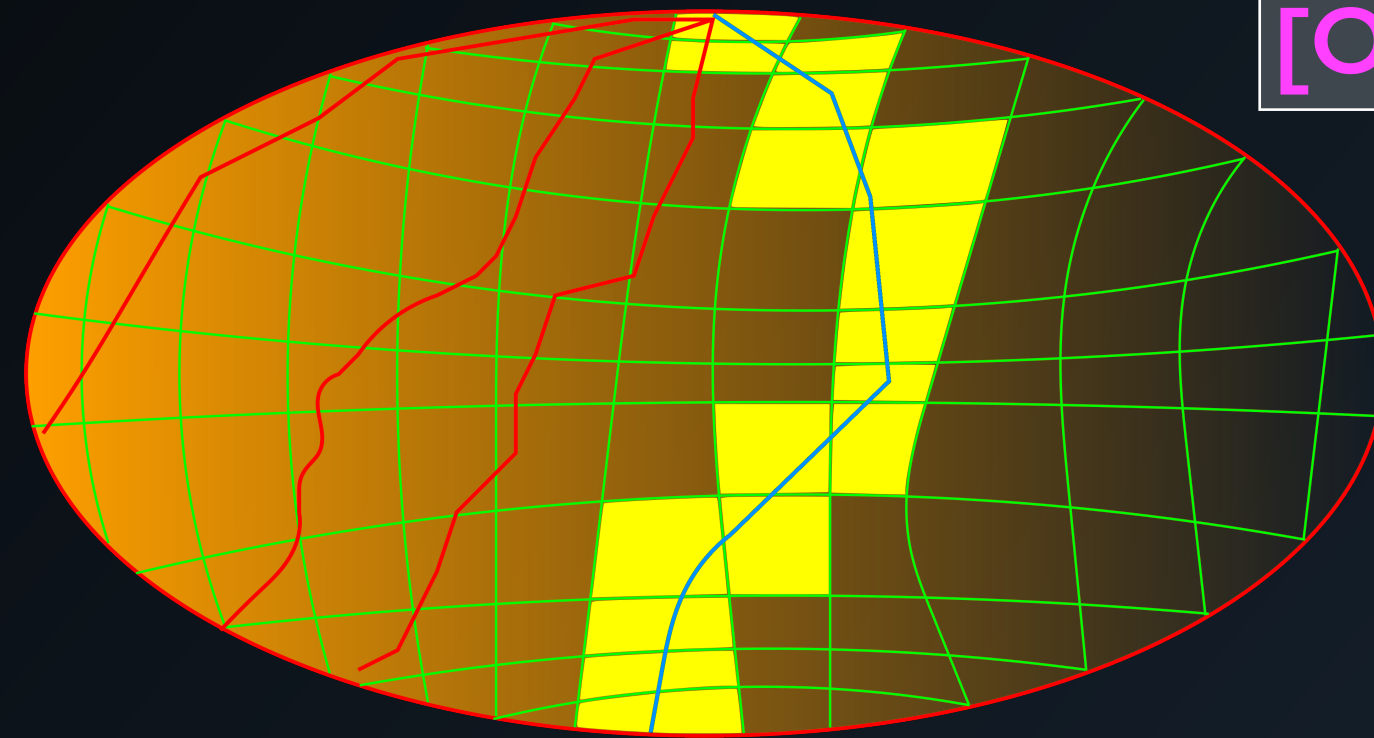
[Oliver et al, 2002]

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\
 \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta
 \end{aligned}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

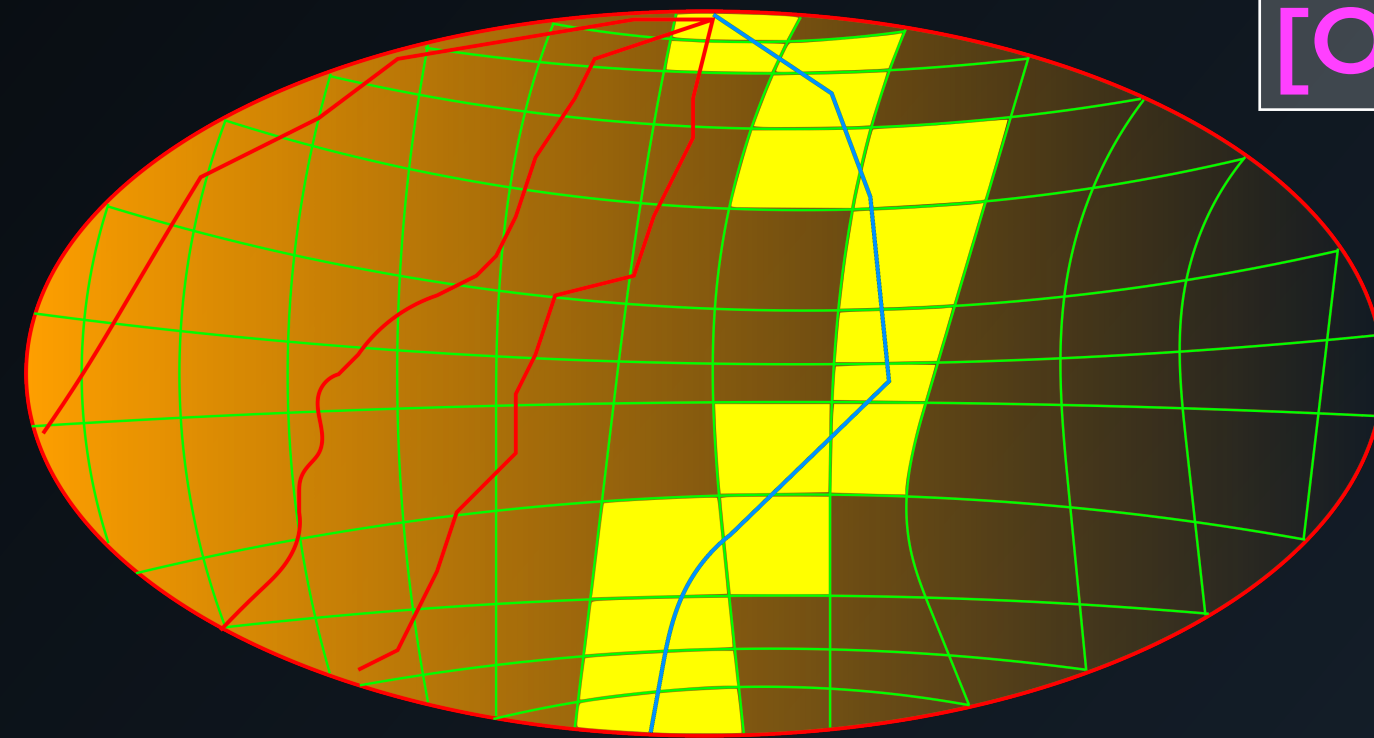
$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\
 \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} T_X^2 & T_X T_Y \\ T_X T_Y & T_Y^2 \end{pmatrix}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\
 \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\
 \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta
 \end{aligned}$$

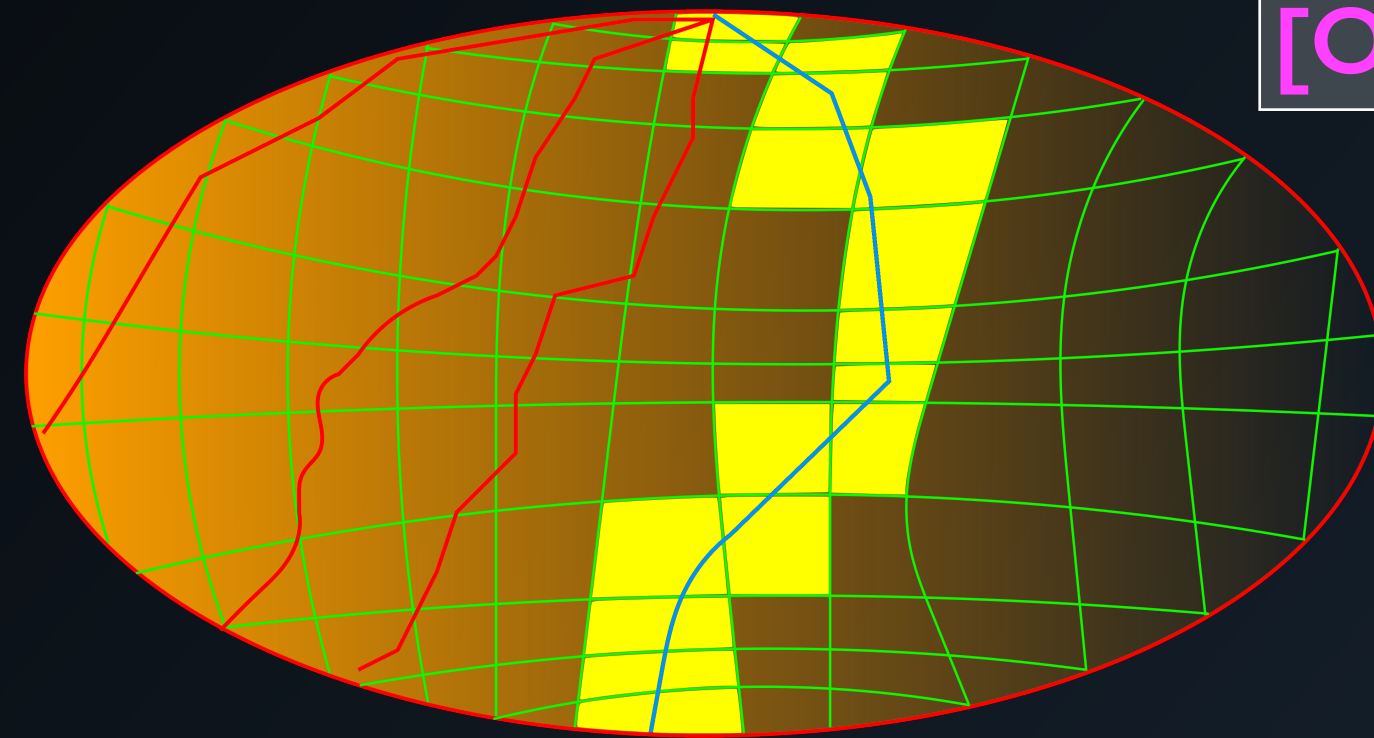
Pas inversible

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} T_X^2 & T_X T_Y \\ T_X T_Y & T_Y^2 \end{pmatrix}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\ \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta \end{aligned}$$

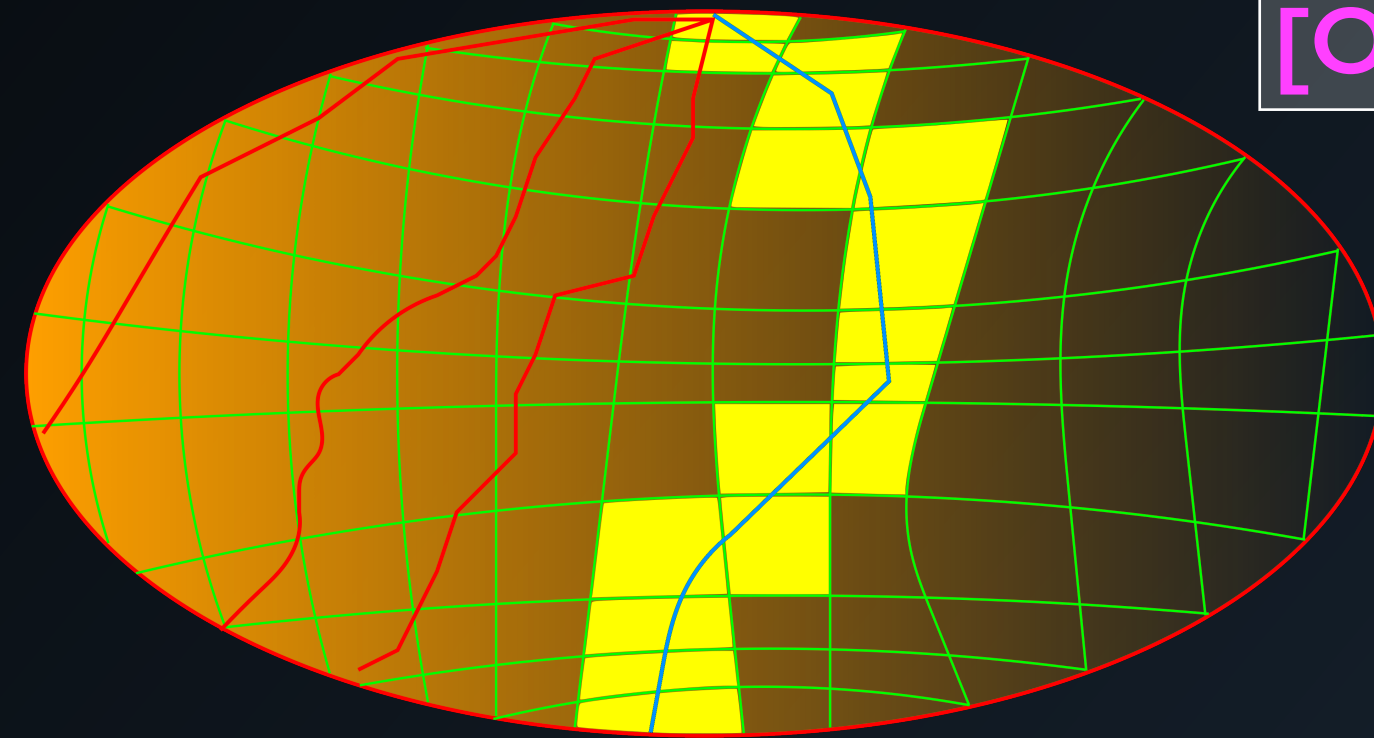
Pas inversible

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} T_X^2 & T_X T_Y \\ T_X T_Y & T_Y^2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\ \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta \end{aligned}$$

Pas inversible

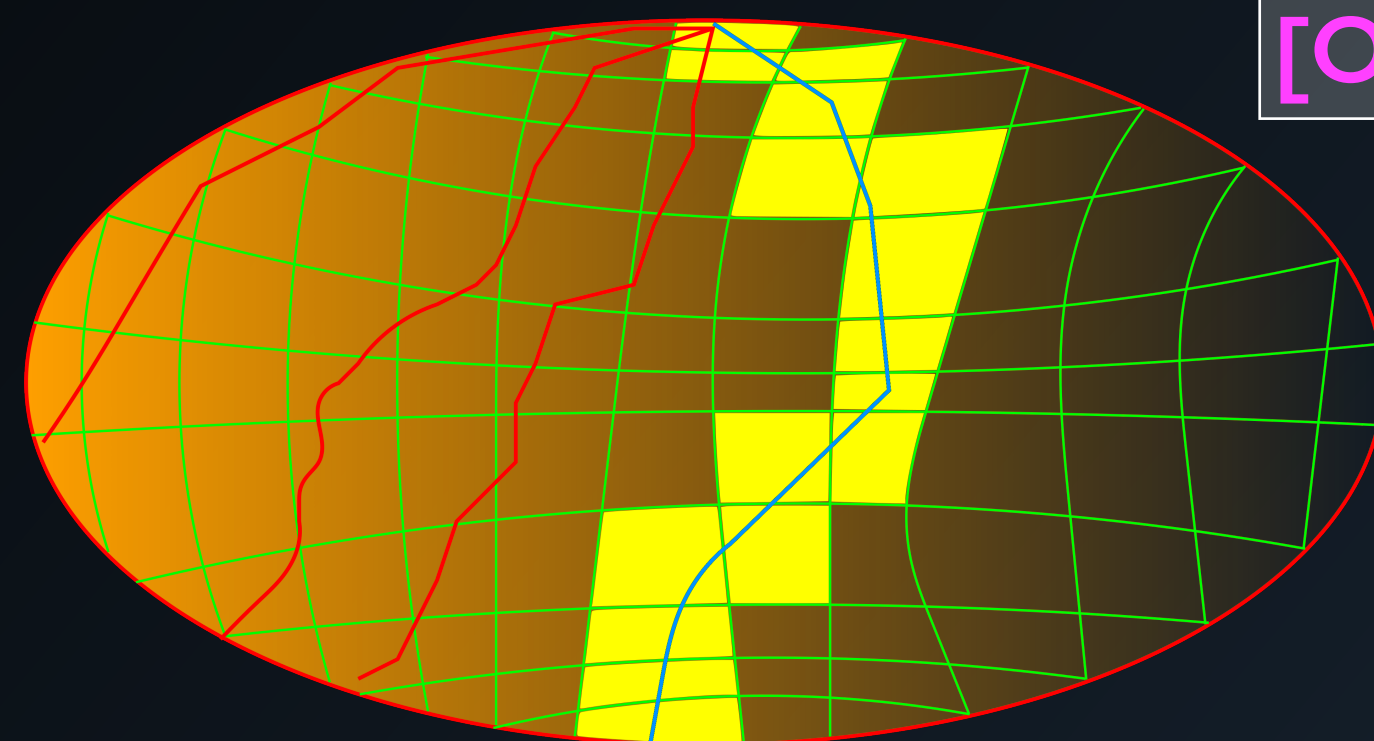
Conductivité numérique

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} T_X^2 & T_X T_Y \\ T_X T_Y & T_Y^2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\ \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta \end{aligned}$$

- 1. Analyse séquentielle
- 2. Généralisation 3D

1. Problème mal posé

Pas inversible

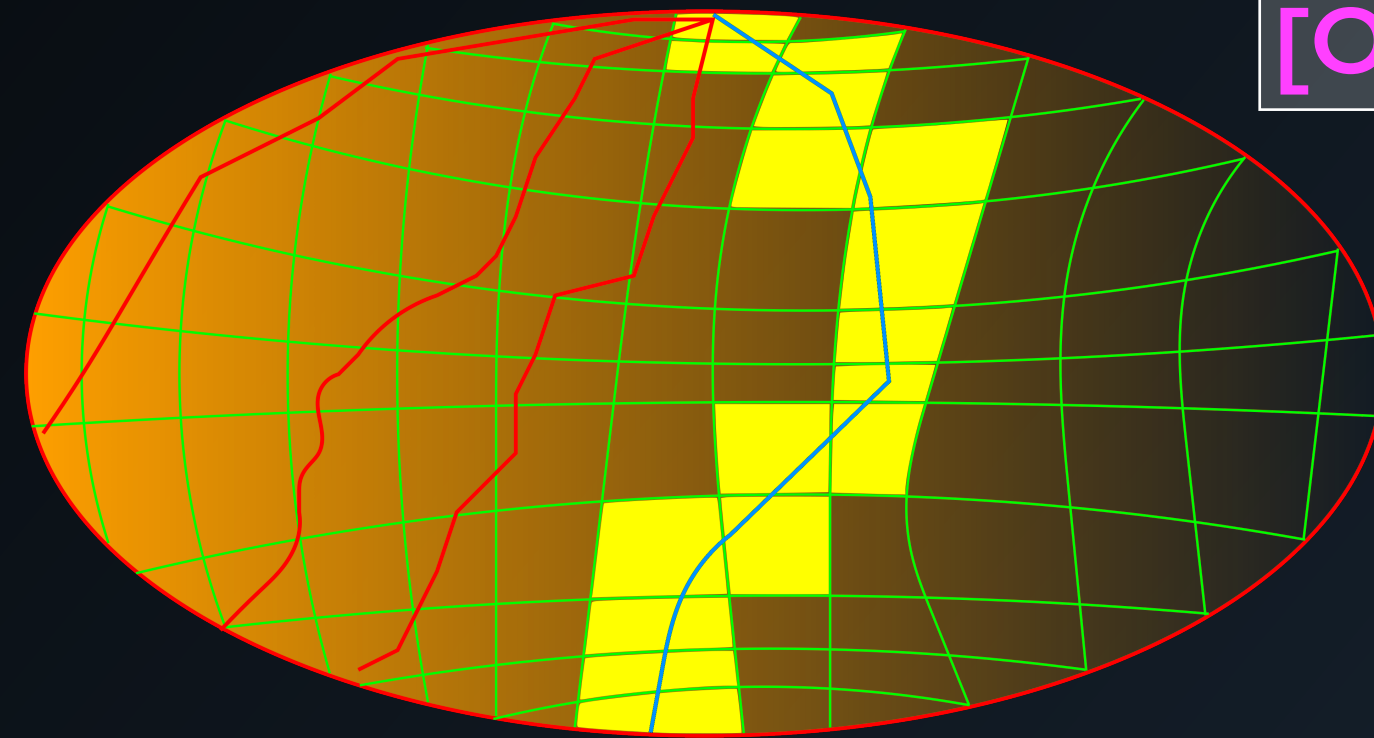
Conductivité numérique

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} T_X^2 & T_X T_Y \\ T_X T_Y & T_Y^2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Continuité du trajet de fissuration

Tracking global

Problème de conduction



[Oliver et al, 2002]

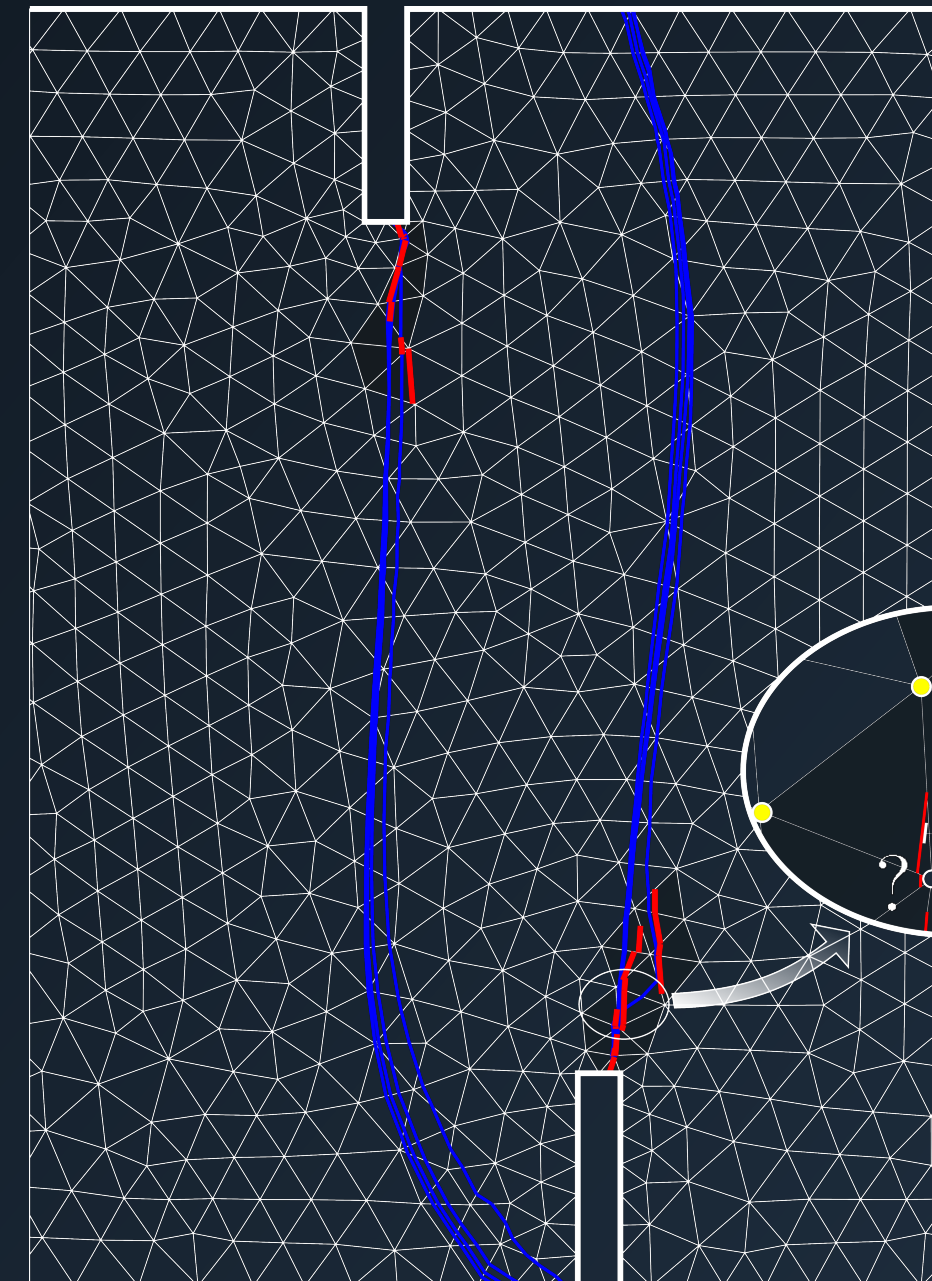
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{q} &= 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} &= -\mathbb{K} \cdot \nabla \theta & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{q} \cdot \underline{n} &= 0 & \underline{x} \in \Omega_q \\ \theta &= \theta^* & \underline{x} \in \Omega_\theta \end{aligned}$$



1. Analyse séquentielle
2. Généralisation 3D



1. Problème mal posé
2. Difficultés en cas de chargement cyclique



$\Omega_e^-$  : ●  
 $\Omega_e^+$  : ■

[Feist et al, 2006]

Mauvaise décomposition des éléments enrichis

Problème de convection-diffusion

[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$



## Problème de convection-diffusion

[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

Diffusion  
isotrope

## Problème de convection-diffusion

[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

Diffusion  
isotrope

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

## Problème de convection-diffusion

[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

Diffusion  
isotrope

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

Diffusion  
anisotrope

## Problème de convection-diffusion

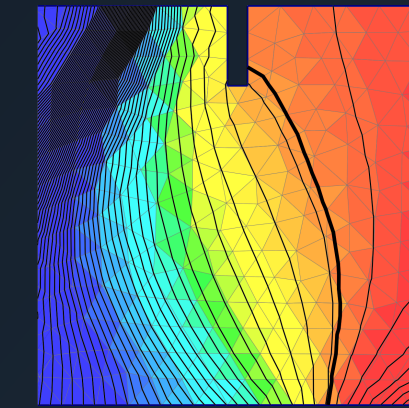
[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

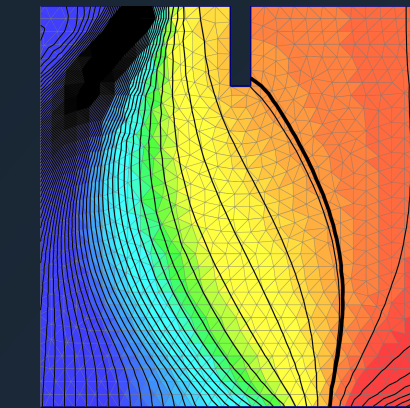
$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

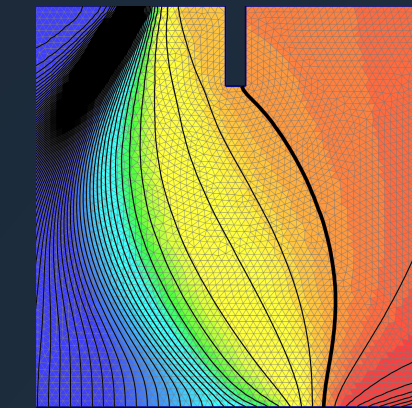
Diffusion  
isotrope



Gros



Moyen



Fin

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

Diffusion  
anisotrope

## Problème de convection-diffusion

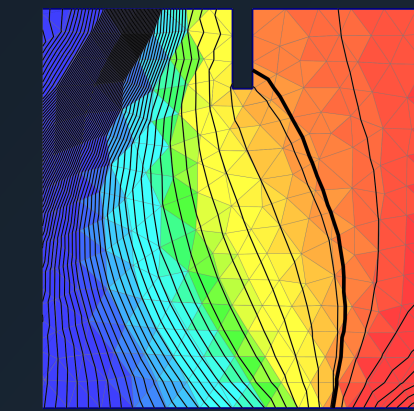
[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

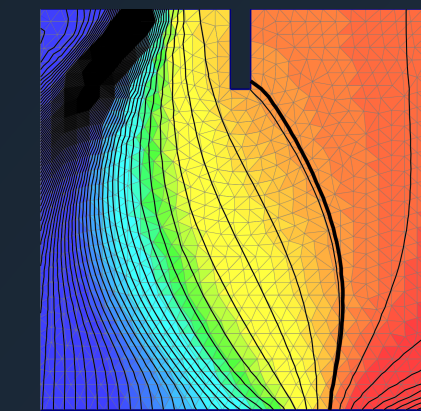
$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

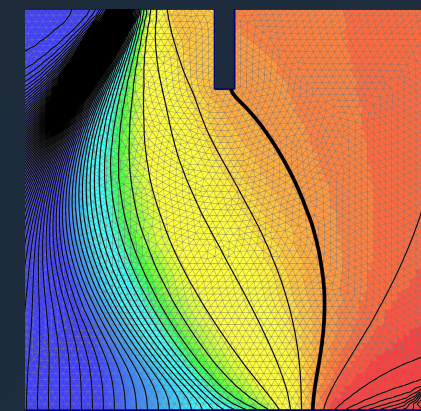
Diffusion  
isotrope



Gros



Moyen



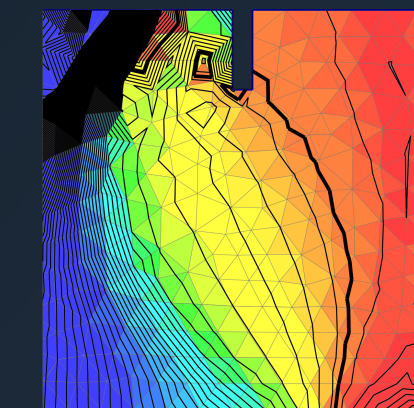
Fin

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

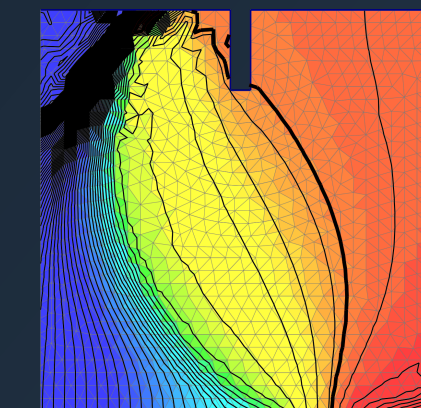
$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

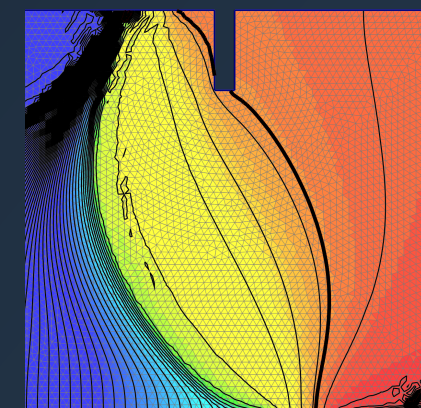
Diffusion  
anisotrope



Gros



Moyen



Fin

## Problème de convection-diffusion

[Riccardi et al, 2016]

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

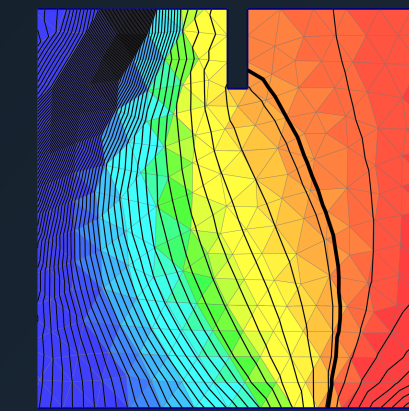
$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

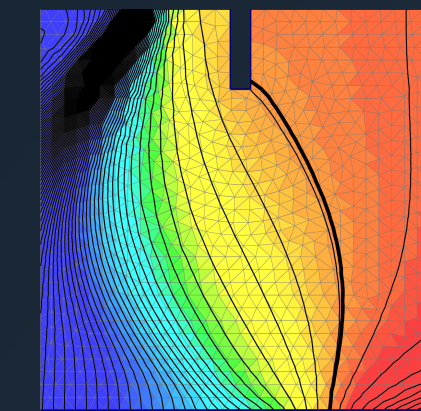
Diffusion isotrope



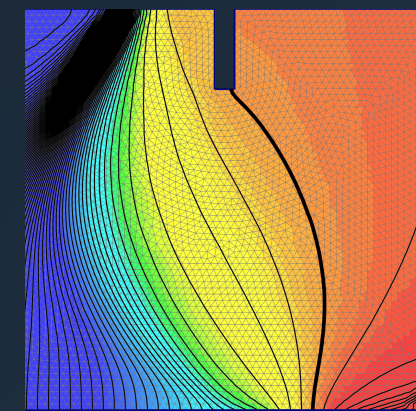
1. Indépendance au maillage
2. Problème bien posé



Gros



Moyen



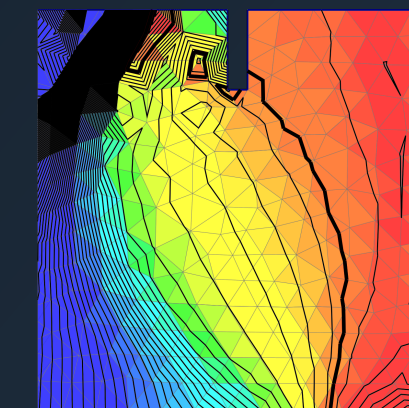
Fin

$$\underline{T} \cdot \nabla \theta - \operatorname{div} \left( \frac{h_T \cdot \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) = 0 \quad \underline{x} \in \Omega$$

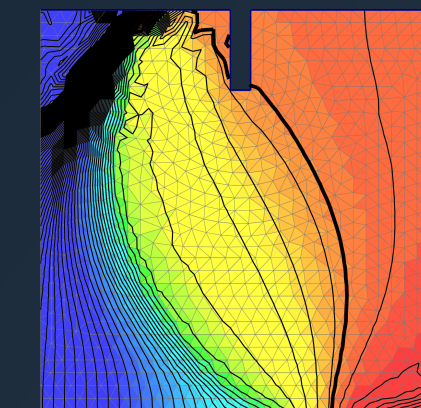
$$\underline{q} = \left( -\frac{h_T \|\underline{T}\|}{2} \cdot \frac{\underline{T} \otimes \underline{T}}{\|\underline{T}\|^2} \cdot \nabla \theta \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_q$$

$$\theta = \theta^* \quad \underline{x} \in \Omega_\theta$$

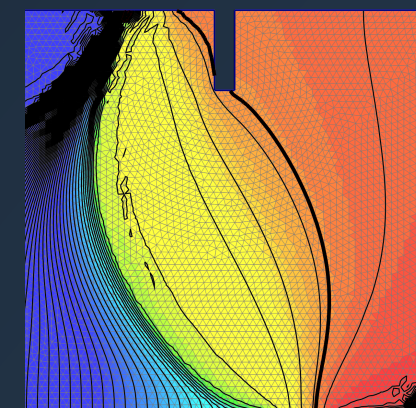
Diffusion anisotrope



Gros



Moyen

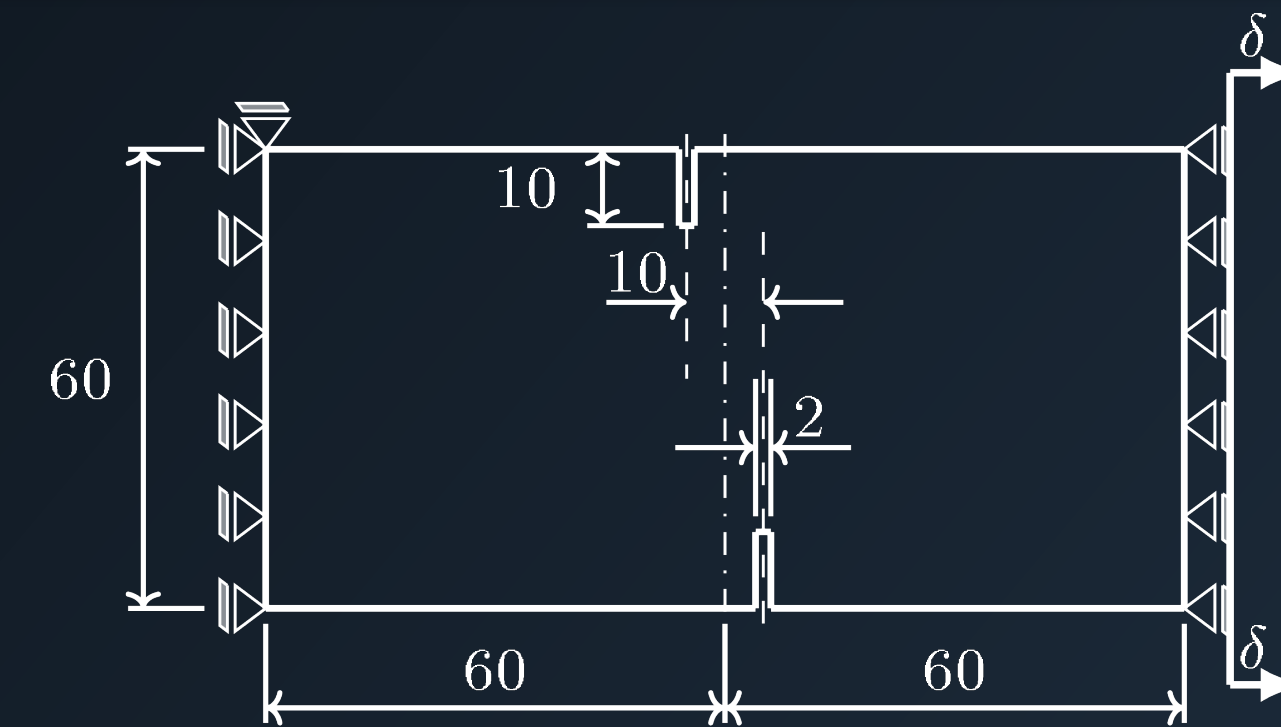
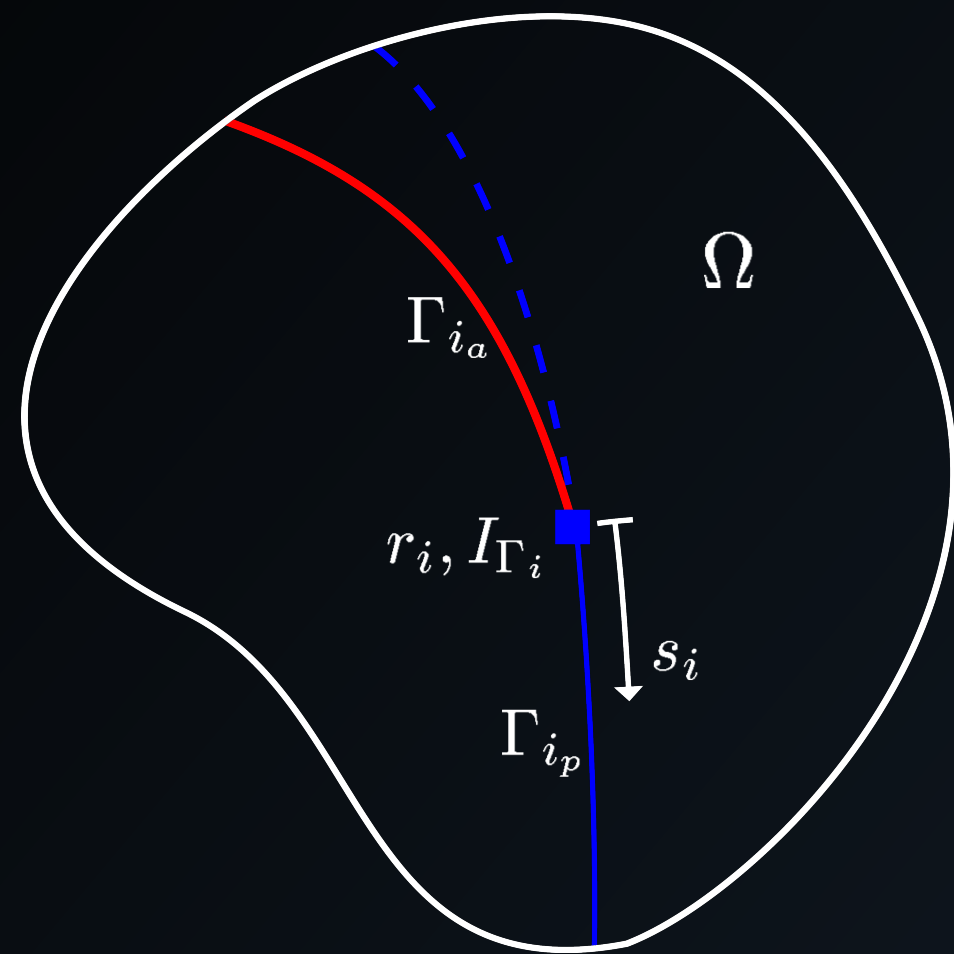


Fin

# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]

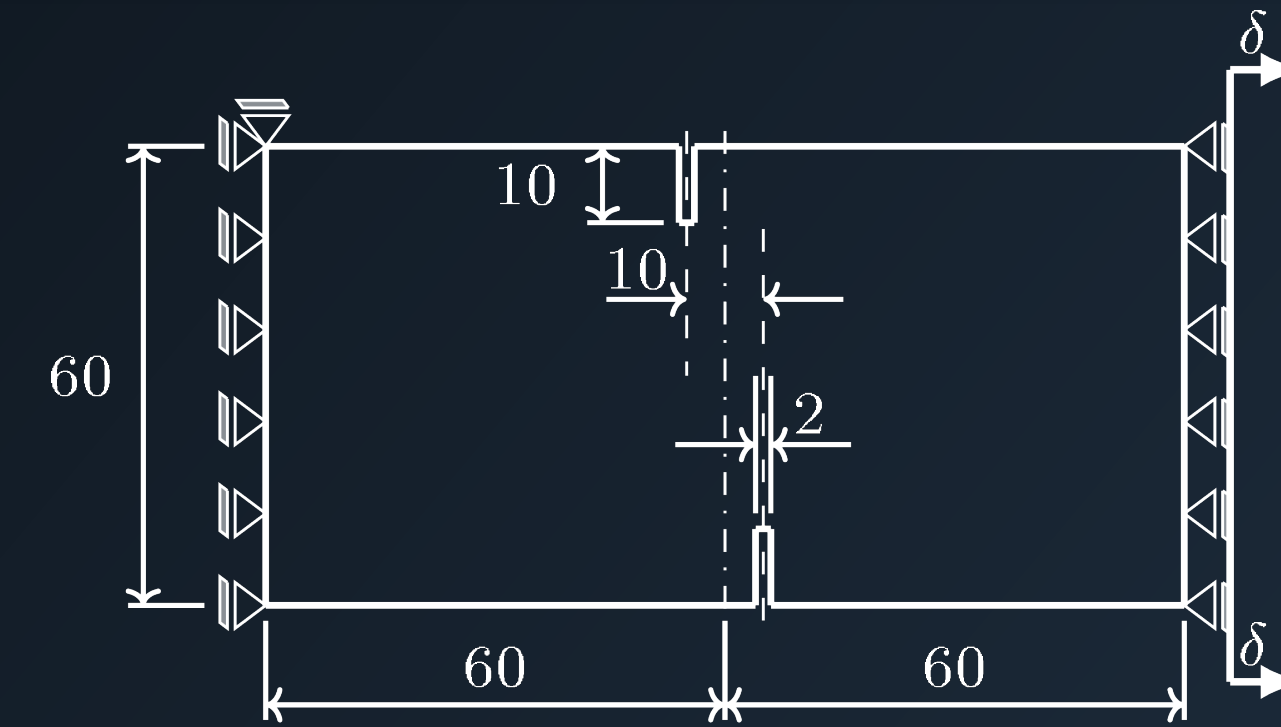
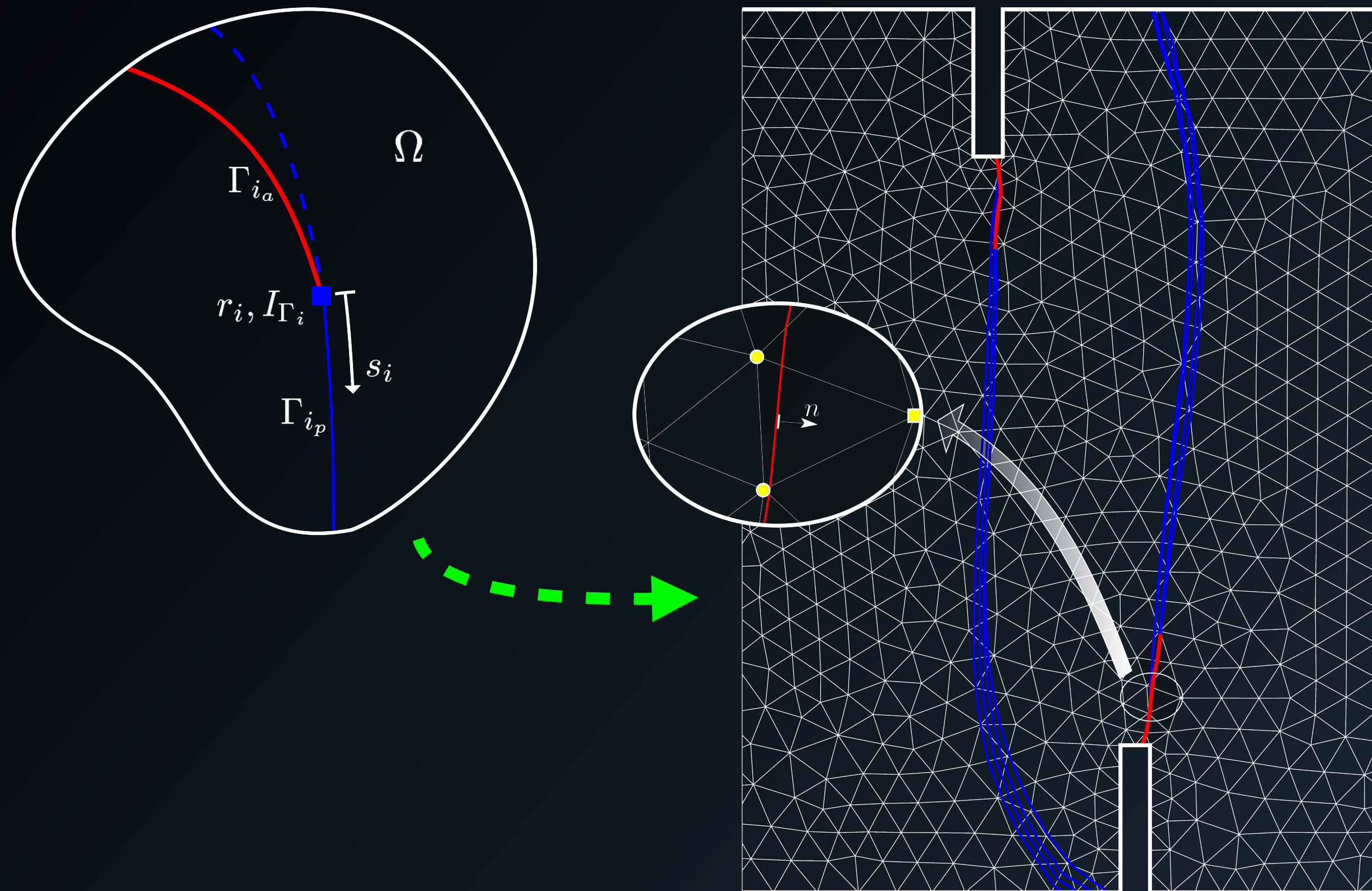


$E=24$  GPa  
 $\nu=0.2$   
 $G_f=50$  N/m  
 $f_t=2.4$  MPa  
 thickness=10 mm

# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]



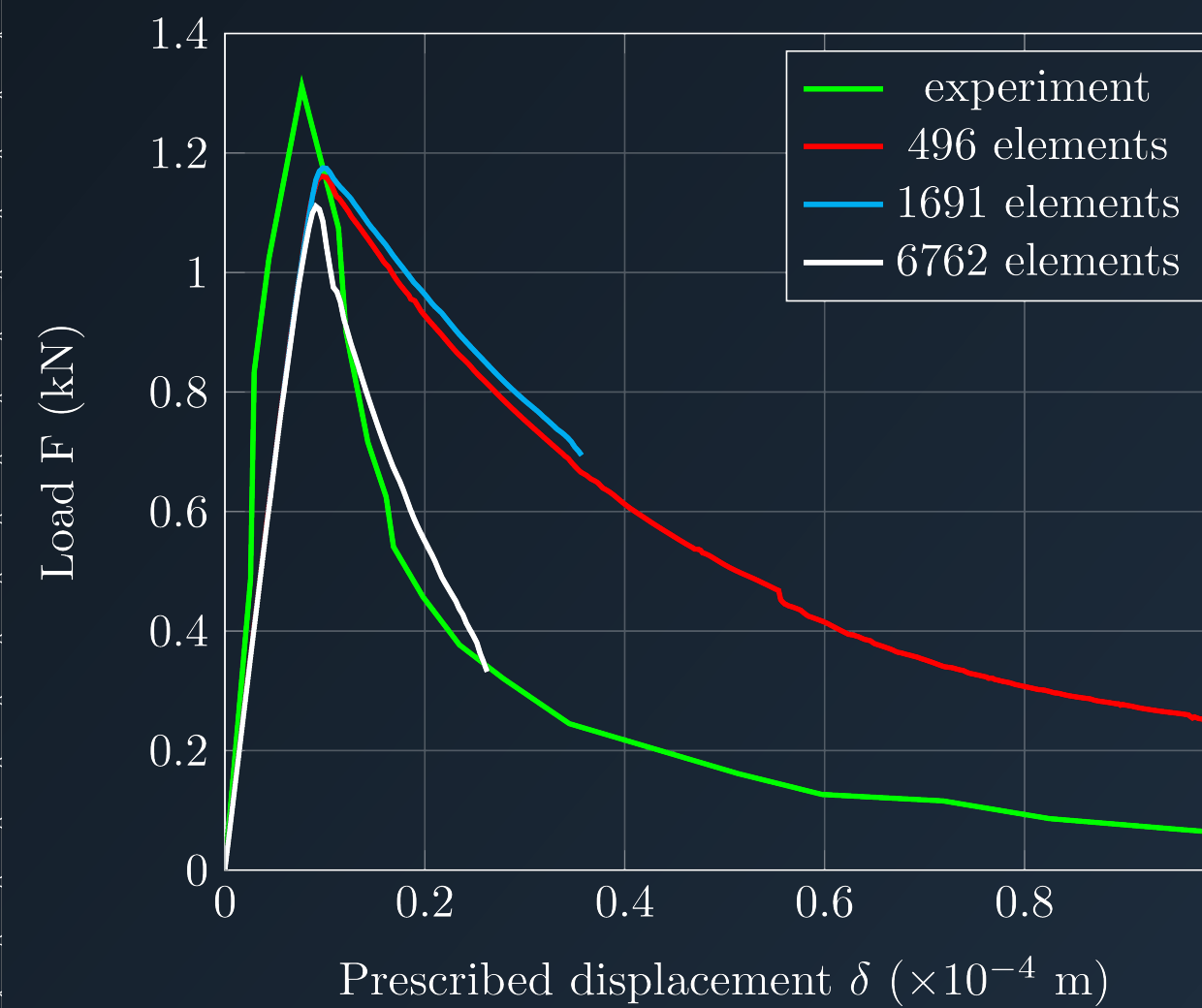
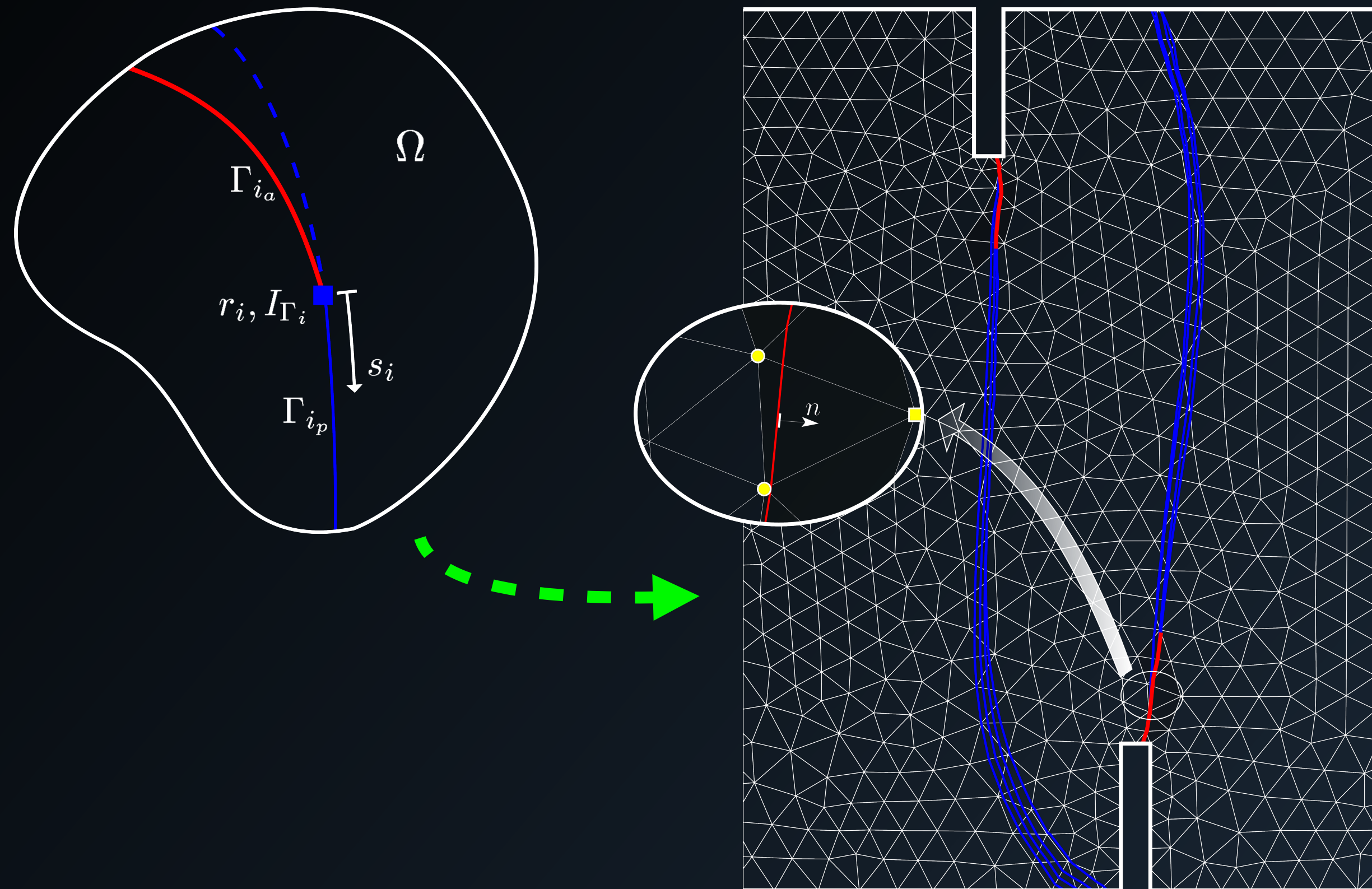
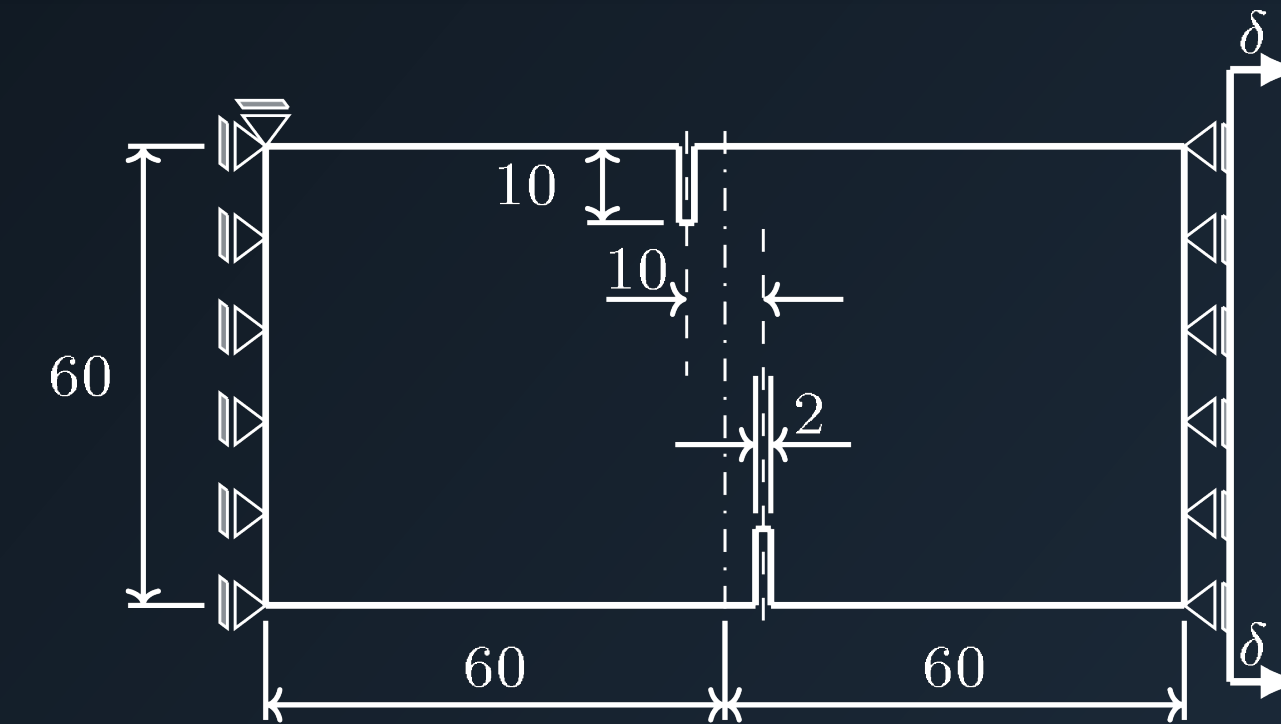
$E=24$  GPa  
 $\nu=0.2$   
 $G_f=50$  N/m  
 $f_t=2.4$  MPa  
 thickness=10 mm



# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]

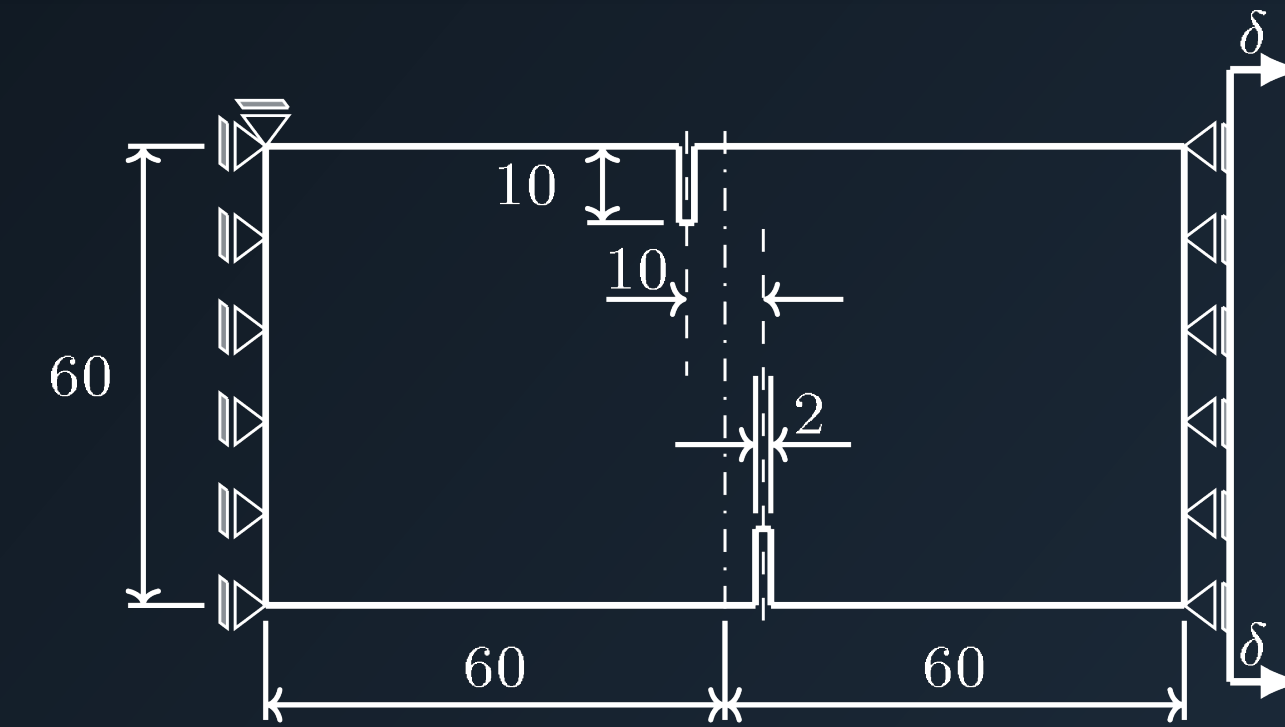
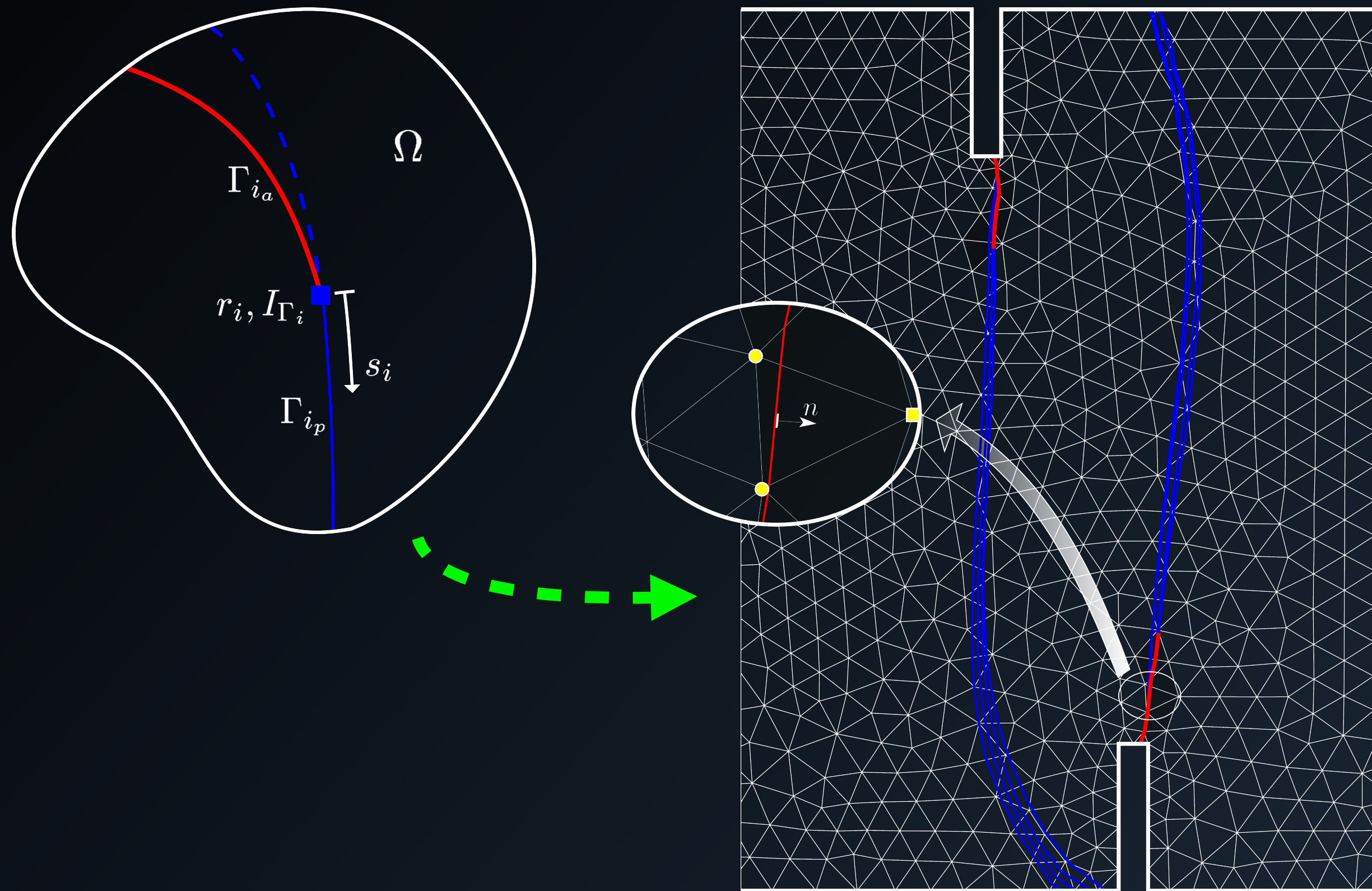


Sans actualisation

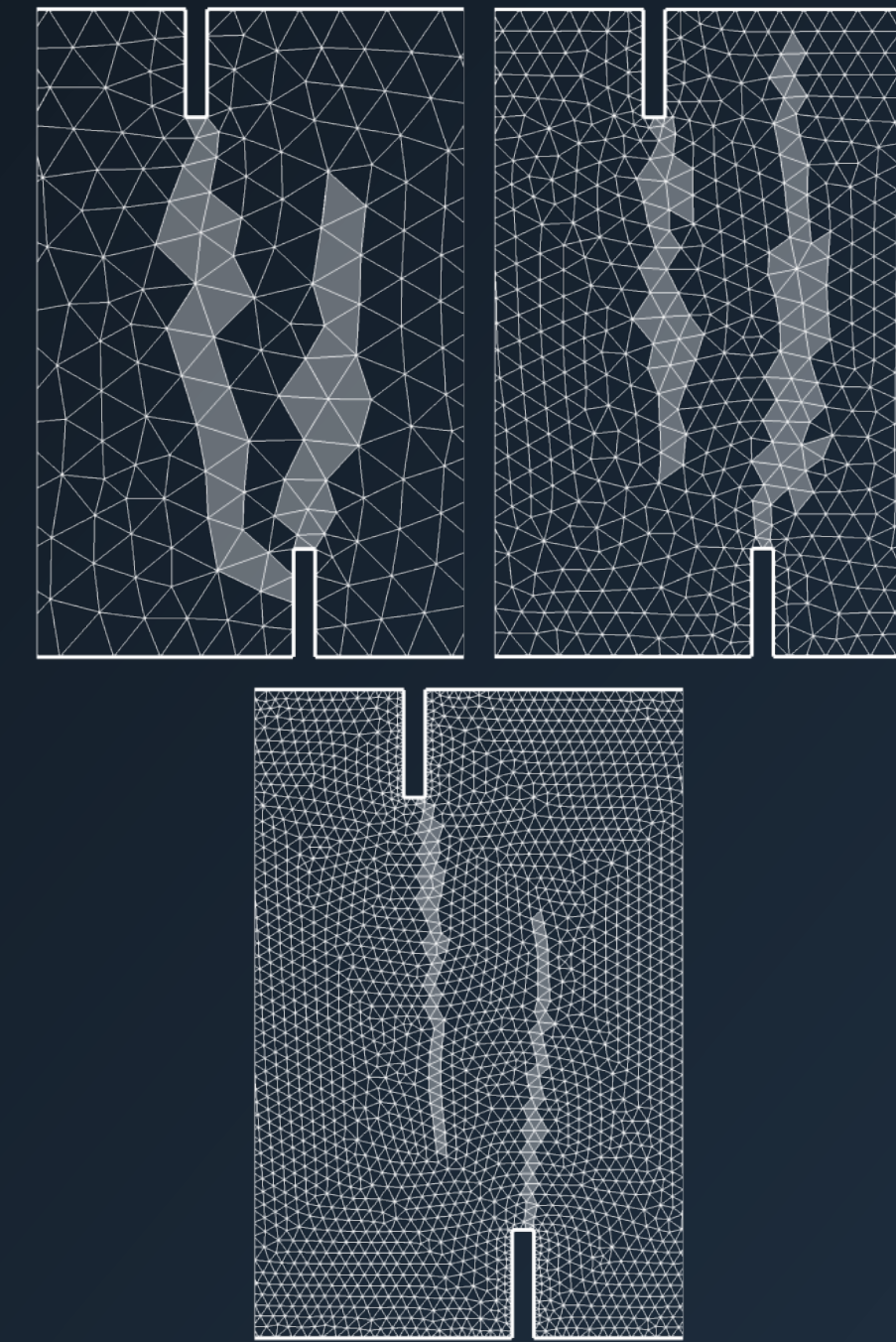
# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]



$E=24$  GPa  
 $\nu=0.2$   
 $G_f=50$  N/m  
 $f_t=2.4$  MPa  
thickness=10 mm

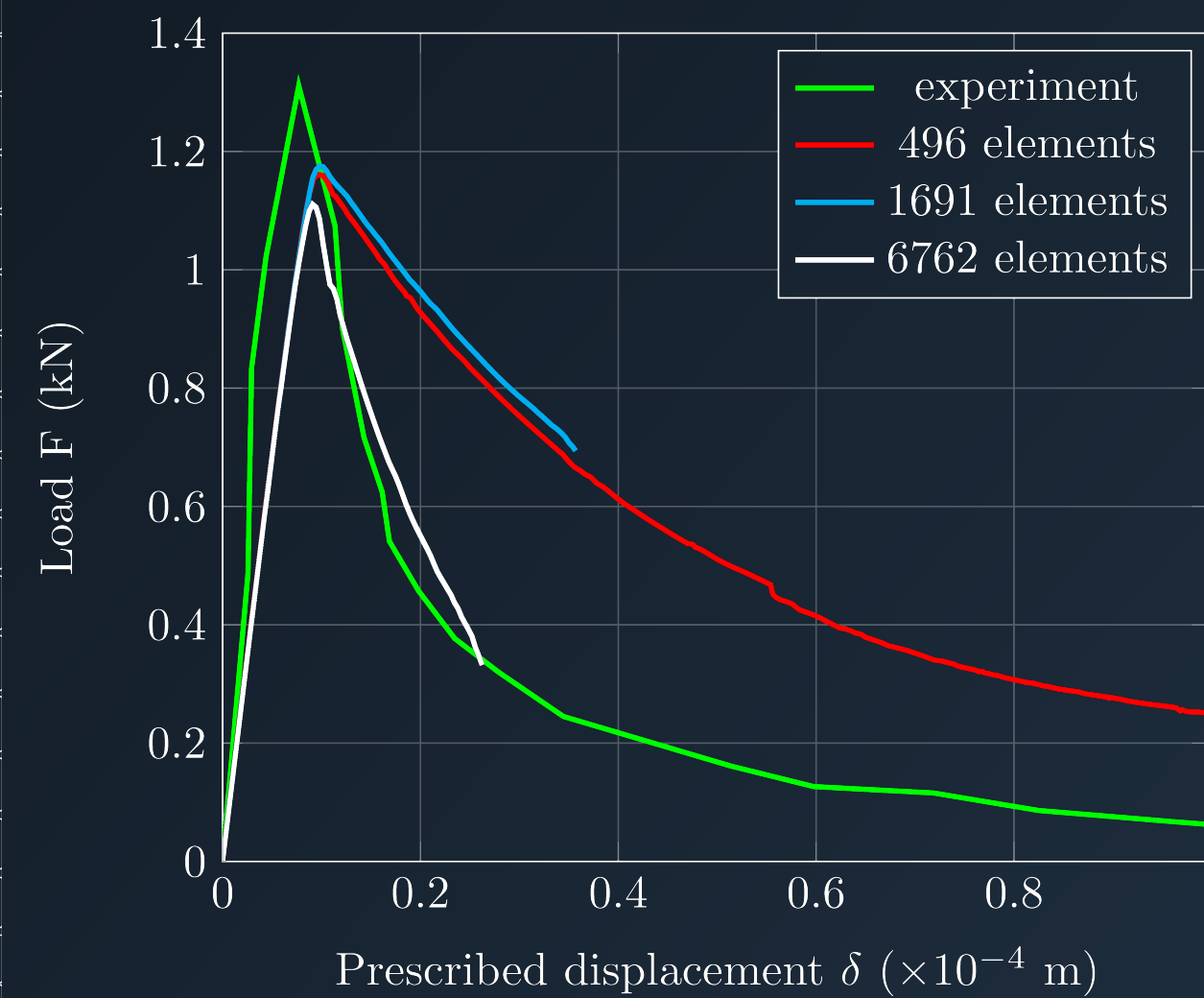
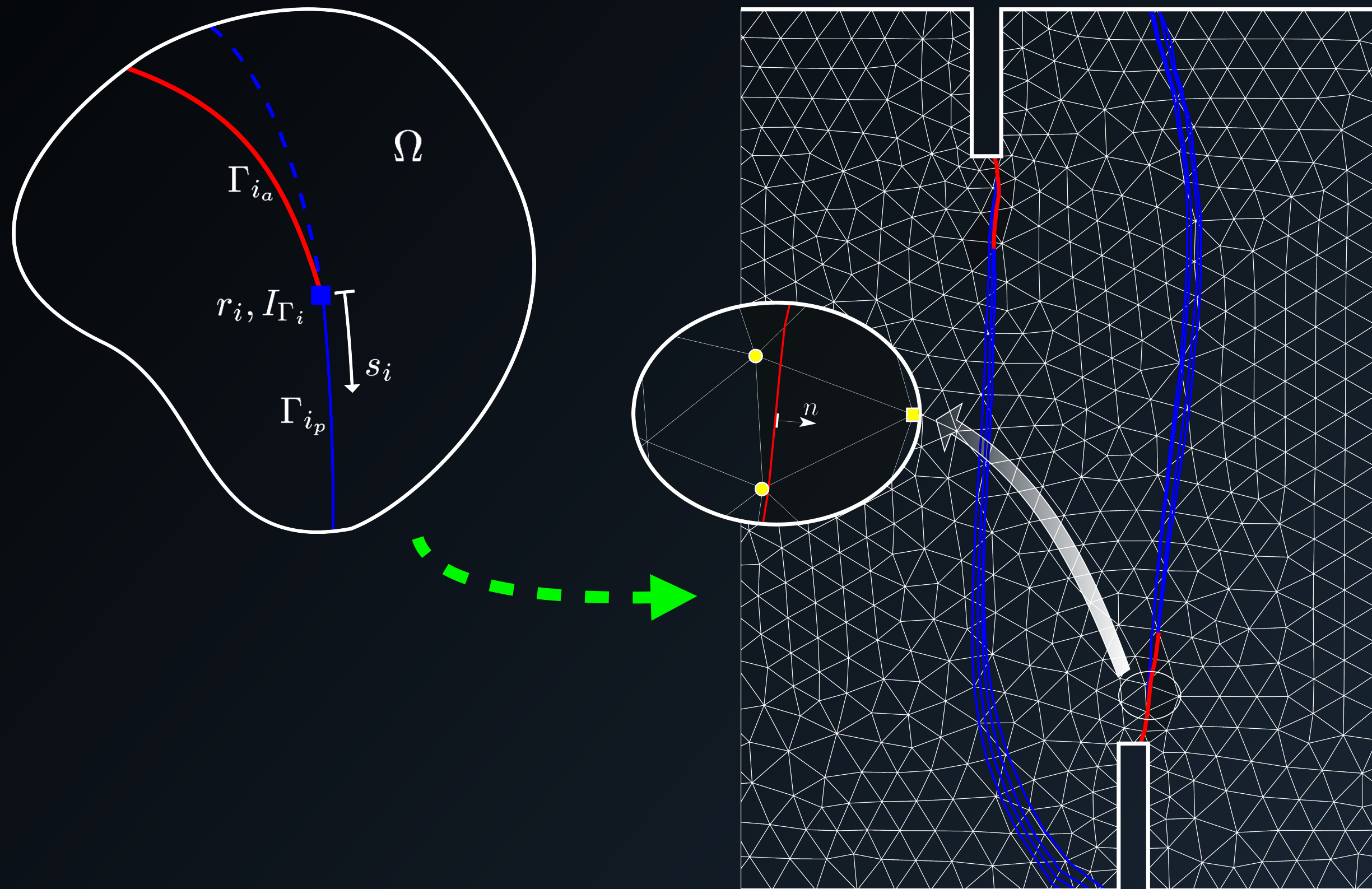
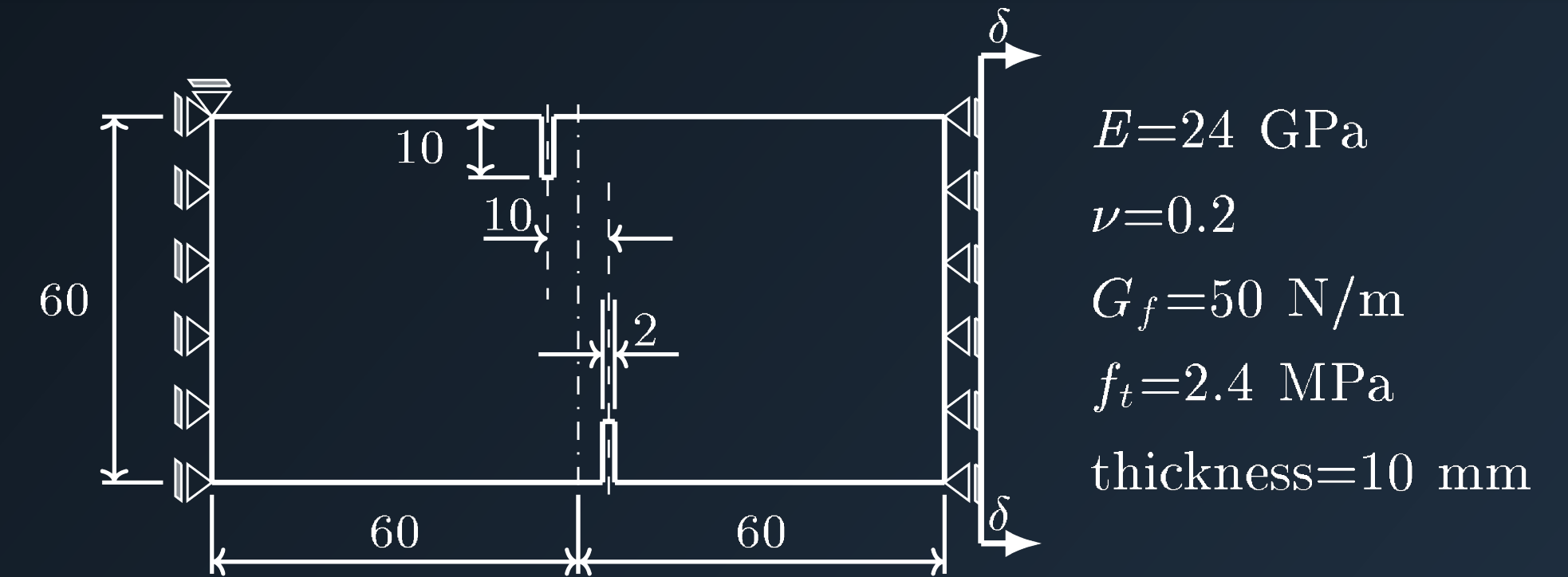


Sans actualisation

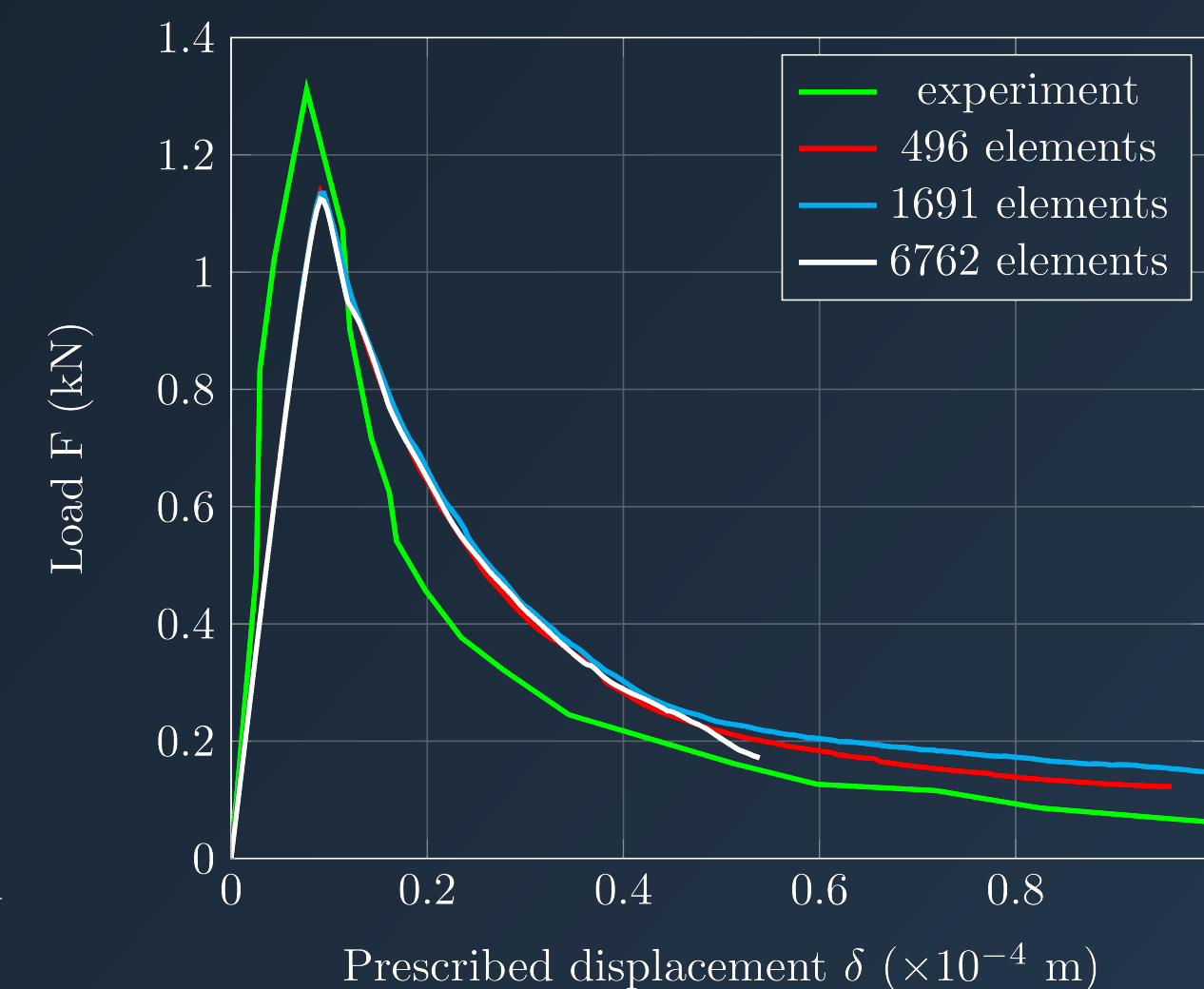
# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]



Sans actualisation

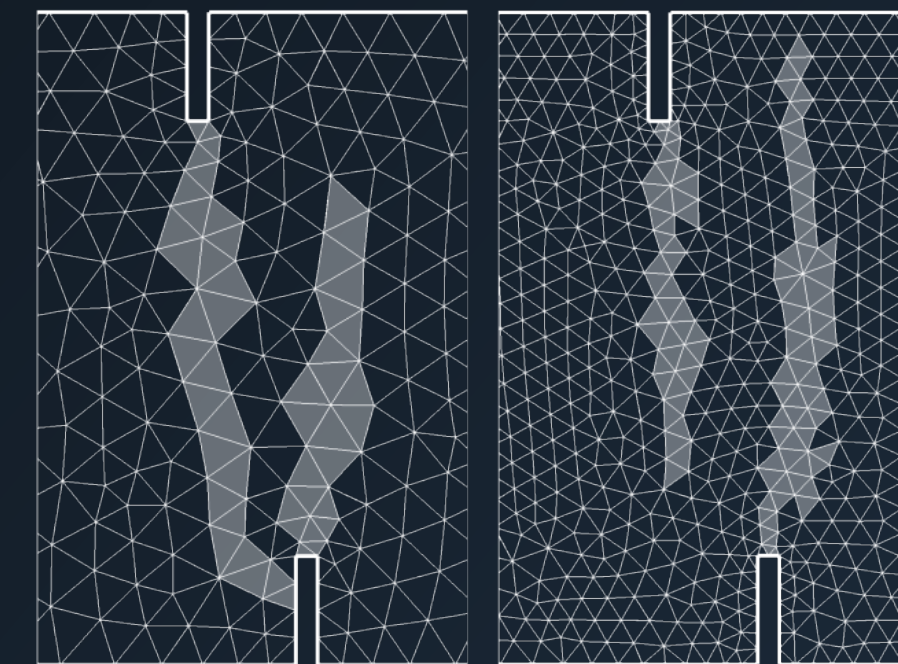
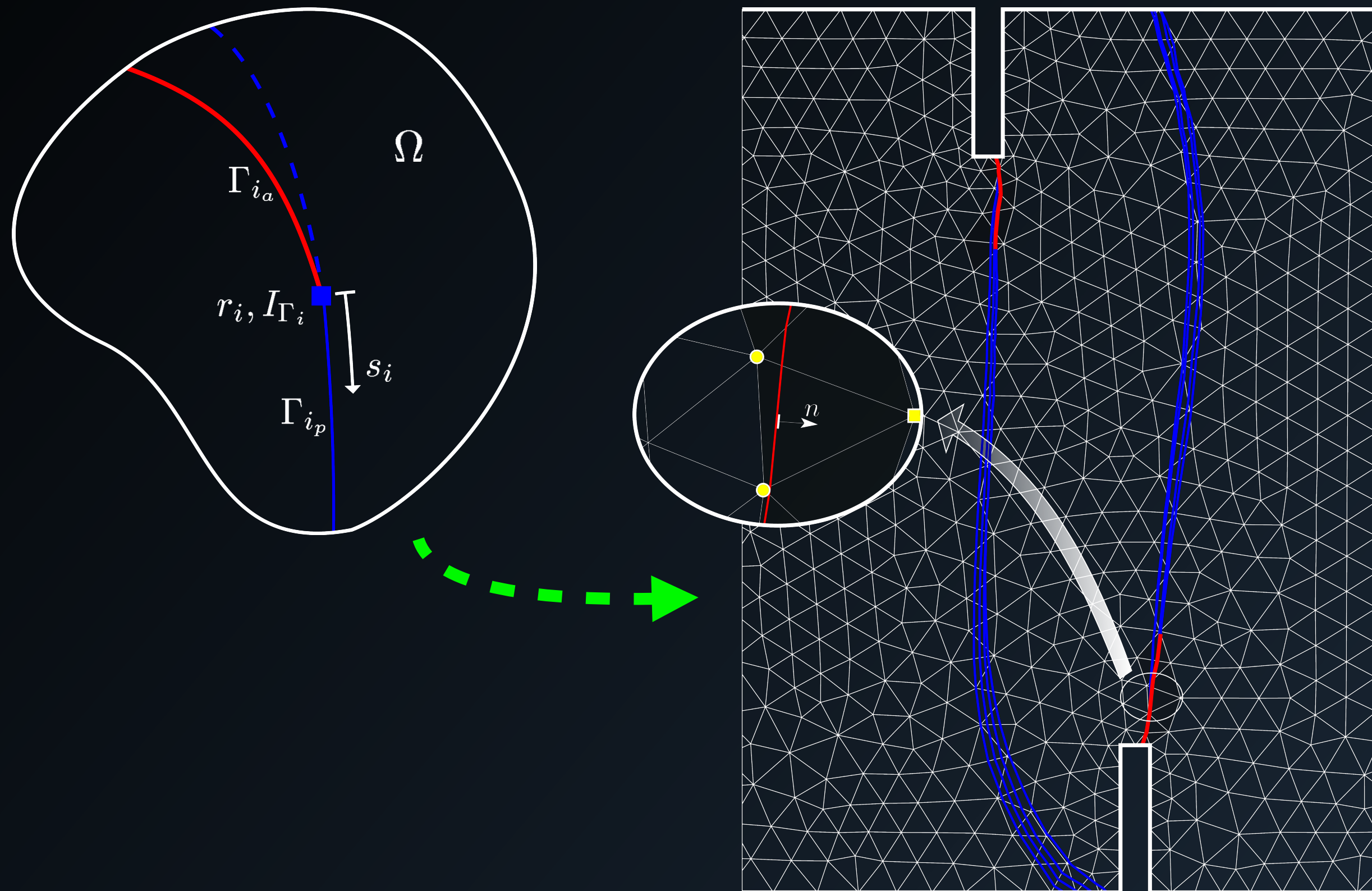
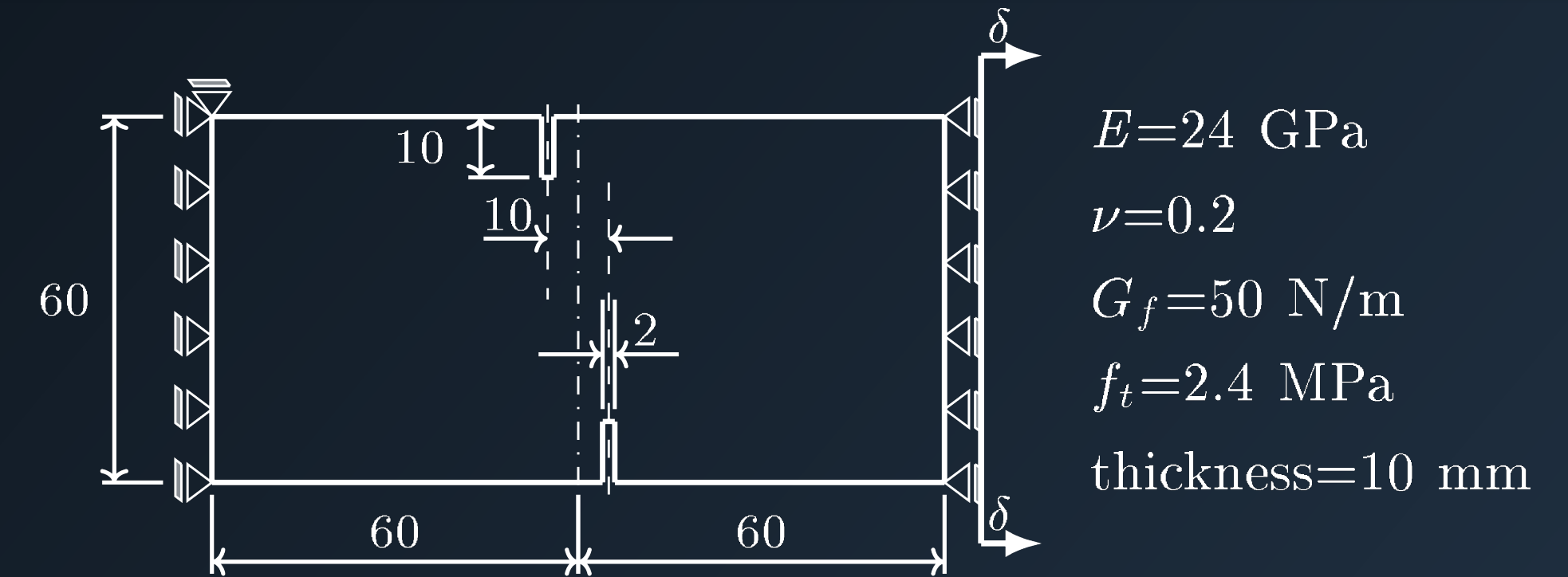


Avec actualisation

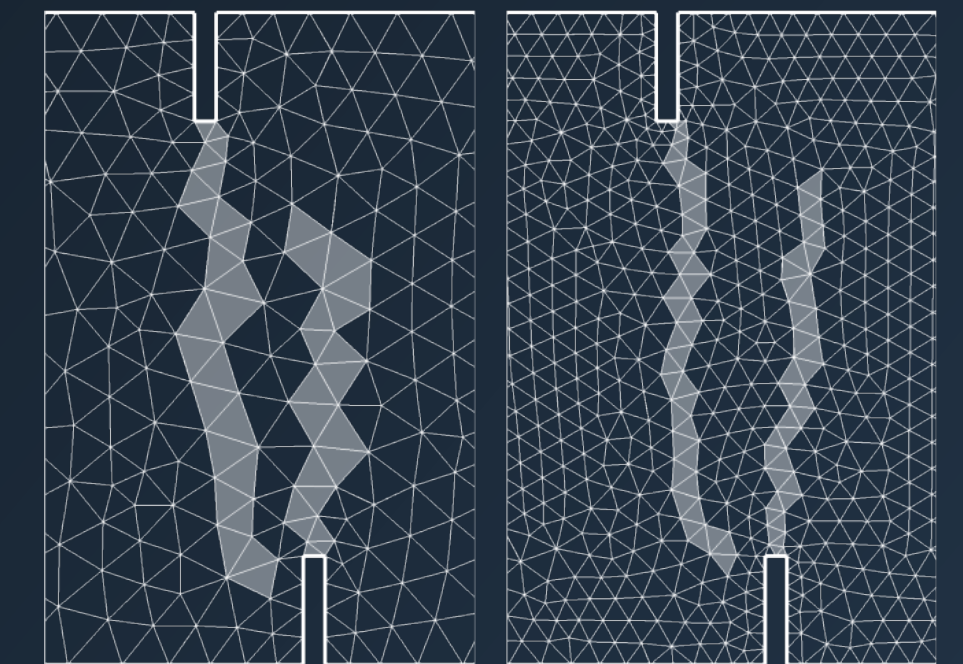
# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]



Sans actualisation

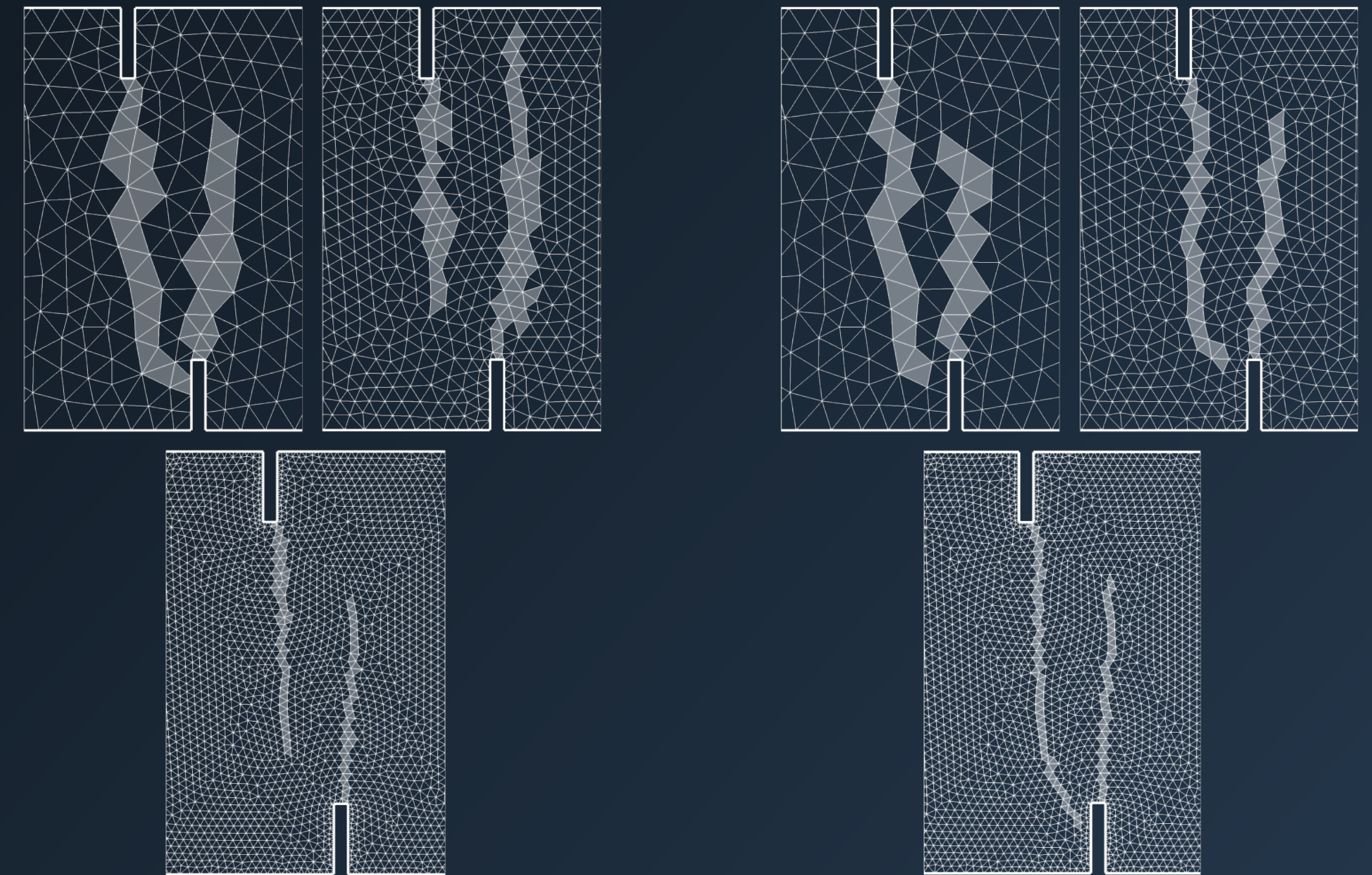
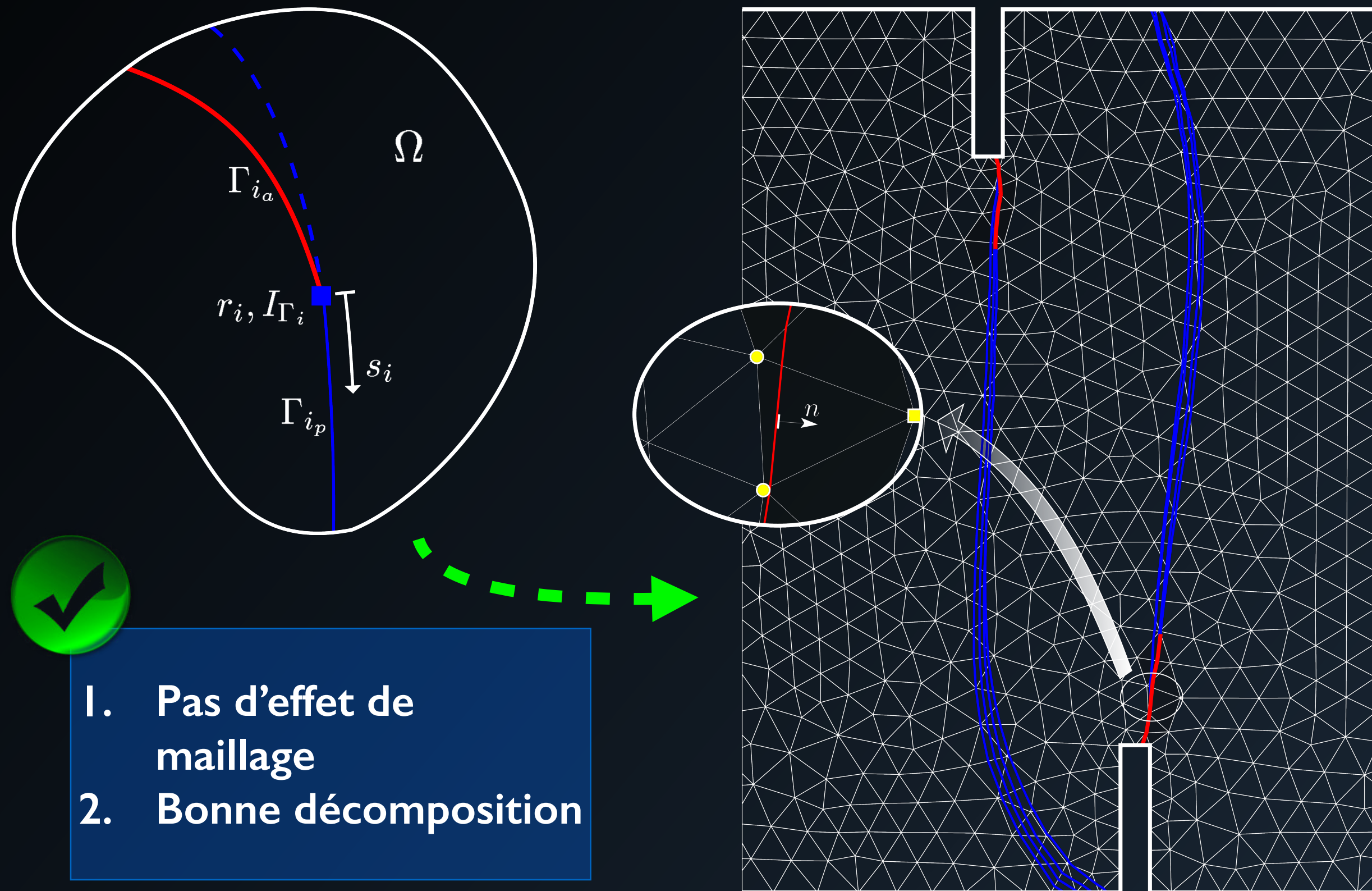
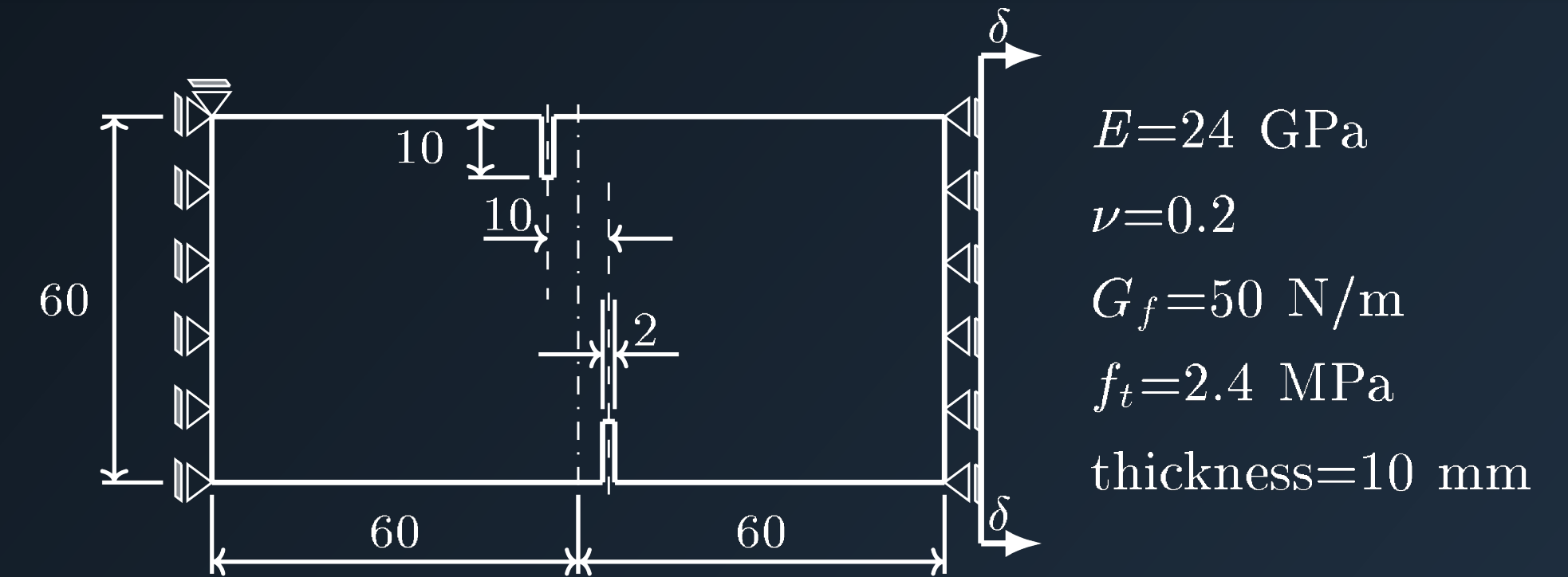


Avec actualisation

# Continuité du trajet de fissuration

Actualisation « online » de la position de la pointe de fissure

[Riccardi et al, 2016]



Sans actualisation

Avec actualisation

# Bilan

## Bilan

- Une approche à **cinématique enrichie**, complémentaire à X-FEM
- Une **loi discrète** construite à partir d'une loi d'endommagement anisotrope
- Une méthode de « tracking » global pour assurer la **continuité de la fissure**



## Bilan

- Une approche à **cinématique enrichie**, complémentaire à X-FEM
- Une **loi discrète** construite à partir d'une loi d'endommagement anisotrope
- Une méthode de « tracking » global pour assurer la **continuité de la fissure**



## Perspectives (liste non exhaustive)

- **Multi-fissuration**
  - ★ Plusieurs fissures par élément ?
- Description des **mécanismes dissipatifs fins**
  - ★ Glissement frottant
- Stratégie de « **tracking** » en cas de multi-fissuration ?
- Prise en compte d'une **vitesse et d'une accélération du saut de déplacement** ?





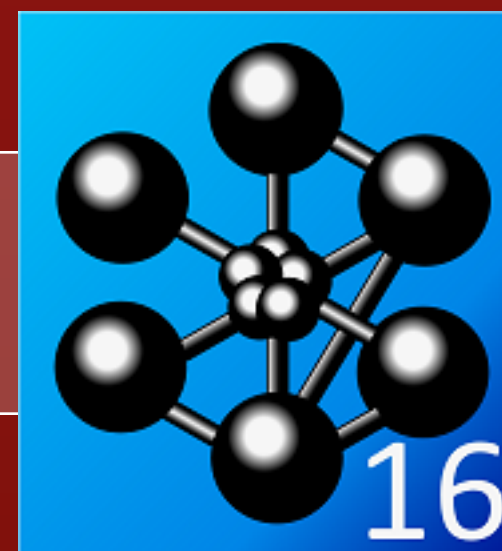
**Merci**

**Job Opportunity !**

**12 mois de postdoc  
E-FEM**

**[benjamin.richard@cea.fr](mailto:benjamin.richard@cea.fr)**

**<http://www-cast3m.cea.fr>**



**[www.cea.fr](http://www.cea.fr)**

Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives  
Centre de Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cedex  
T. +33 (0)1 69 08 76 74 - F. +33 (0)1 69 08 83 31  
Établissement public à caractère industriel et commercial  
RCS Paris B 775 685 019

Direction de l'Énergie Nucléaire  
Département de Modélisation des Systèmes et des Structures  
Service d'Études Mécaniques et Thermiques  
Laboratoire d'Études de Mécanique Sismique