

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



Club Cast3M 2015

Étude numérique pour analyse paramétrique directe des systèmes tournants en dynamiques non-linéaires

Présentée par : Lihan XIE

Thèse CEA Saclay (DEN/DM2S/SEMT/DYN)

Directeur de thèse : R. DUFOUR (LaMCoS)

Encadrant : S. BAGUET (LaMCoS)

Encadrant CEA : B. PRABEL

www.cea.fr



Contexte industriel d'études des machines tournantes:

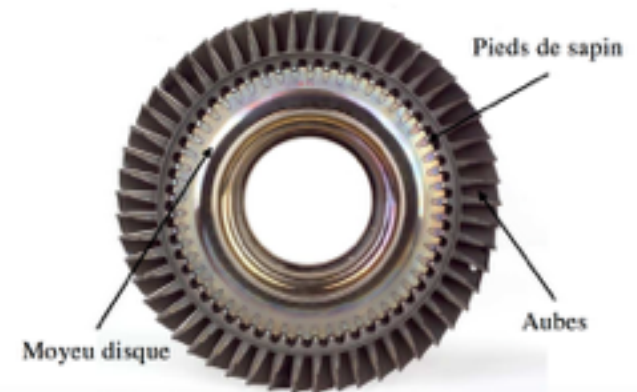
- Investissements financiers importants
- Impact majeur sur la sûreté des installations...

En prenant en compte les non-linéarités dans les machines :

- Non-linéarités présentes: fissure, contact rotor-stator, paliers hydrodynamiques
- Phénomènes complexes: saut d'amplitudes, cycle d'hystéresis, **instabilités**...

Bifurcation

- Changement de stabilité, mutation de régime
- Étude paramétrique



Objectif :

Mise en oeuvre de techniques efficaces dans **Cast3M** pour étudier le comportement non-linéaire des machines tournantes dans le cadre de la modélisation élément fini tri-dimensionnelle.

- Réponse forcée au balourd, en régime établi
- Méthodes de résolution : Méthode de la Balance Harmonique (HBM) [CAM89]
- Analyse de stabilité par la théorie de Floquet
- Détection et localisation des bifurcations dans le cadre de HBM

- I. Introduction et Objectif
- II. Courbe de réponse par la HBM
- III. Analyse de stabilité
- IV. Bifurcation
- V. Applications numériques
- VI. Perspective

Courbe de réponse

- Méthode de la Balance Harmonique (HBM)

Rotor **linéaire** modélisé par des éléments 3D dans le repère mobile :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{C}_{cor})\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + \Omega^2(\mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{cen}))\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(\omega, t) - \mathbf{F}_l$$

Effet de Coriolis

Effet centrifuge

Équation de mouvement d'un rotor non-linéaire :

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) + \underbrace{f_{nl}(x, \dot{x})}_{\text{Forces NL}} = \underbrace{p_0 \cos \omega t}_{\text{Efforts ext.}}$$

Dépl. Forces NL Efforts ext.

Décomposition en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^H a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$



En fréquentiel :

$$X = (a_0^t, a_1^t, b_1^t, \dots, a_H^t, b_H^t)^t$$

DFT : $x(t) = \Gamma(\omega t)X \quad X = \Gamma^{-1}(\omega t)x(t)$

$$\Gamma(\omega \vec{t}) = [\vec{\mathbf{1}} \otimes \mathbf{I}_n \quad \cos(\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \sin(\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \dots \quad \cos(H\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \sin(H\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n] \quad \mathbf{t} = t_1, t_2, \dots, t_N$$

$$\Gamma^{-1}(\omega \vec{t}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\vec{\mathbf{1}}}{2} \otimes \mathbf{I}_n \quad \cos(\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \sin(\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \dots \quad \cos(H\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \quad \sin(H\omega \vec{t}) \otimes \mathbf{I}_n \right]^t$$

$$N = 2H + 1$$

Courbe de réponse

- Méthode de la Balance Harmonique (HBM)

Rotor **linéaire** modélisé par des éléments 3D dans le repère mobile :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{C}_{cor})\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + \Omega^2(\mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{cen}))\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(\omega, t) - \mathbf{F}_l$$

Effet de Coriolis

Effet centrifuge

Équation de mouvement d'un rotor non-linéaire :

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) + \underbrace{f_{nl}(x, \dot{x})}_{\text{Forces NL}} = \underbrace{p_0 \cos \omega t}_{\text{Efforts ext.}}$$

Dépl. Forces NL Efforts ext.

Décomposition en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^H a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$



En fréquentiel :

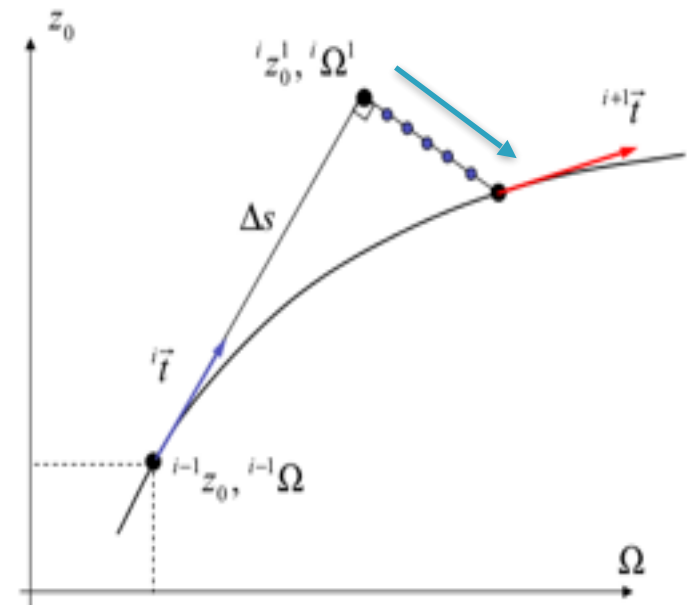
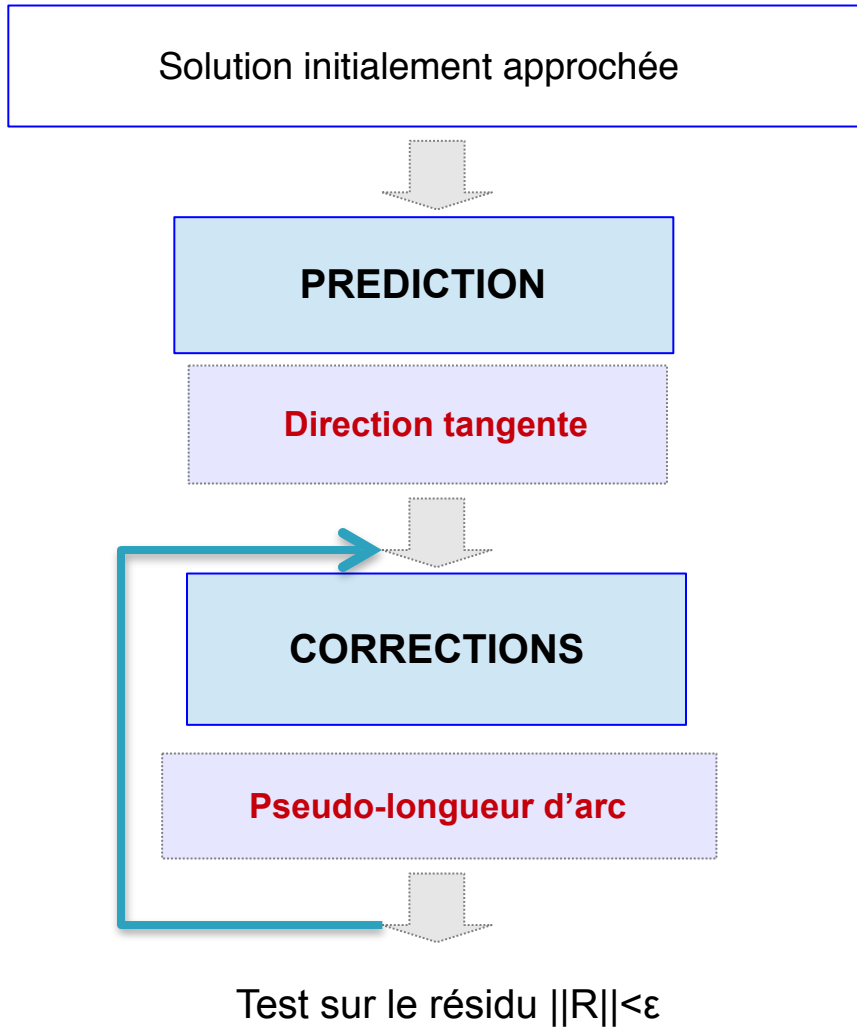
$$X = (a_0^t, a_1^t, b_1^t, \dots, a_H^t, b_H^t)^t$$

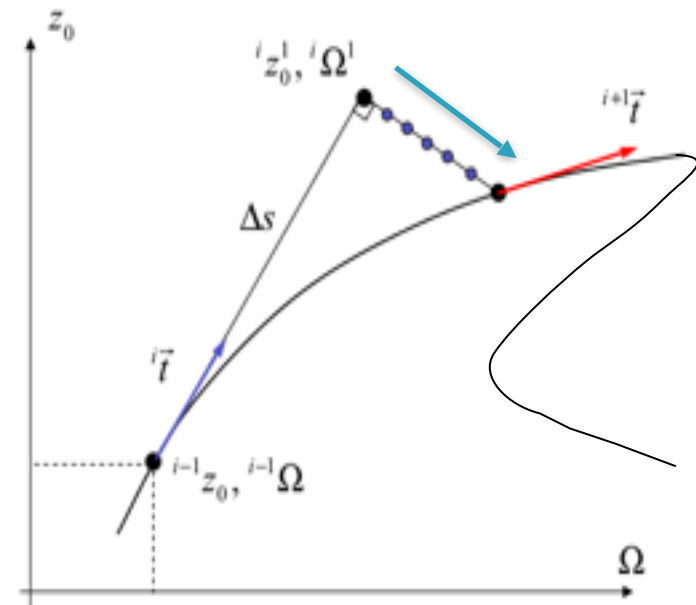
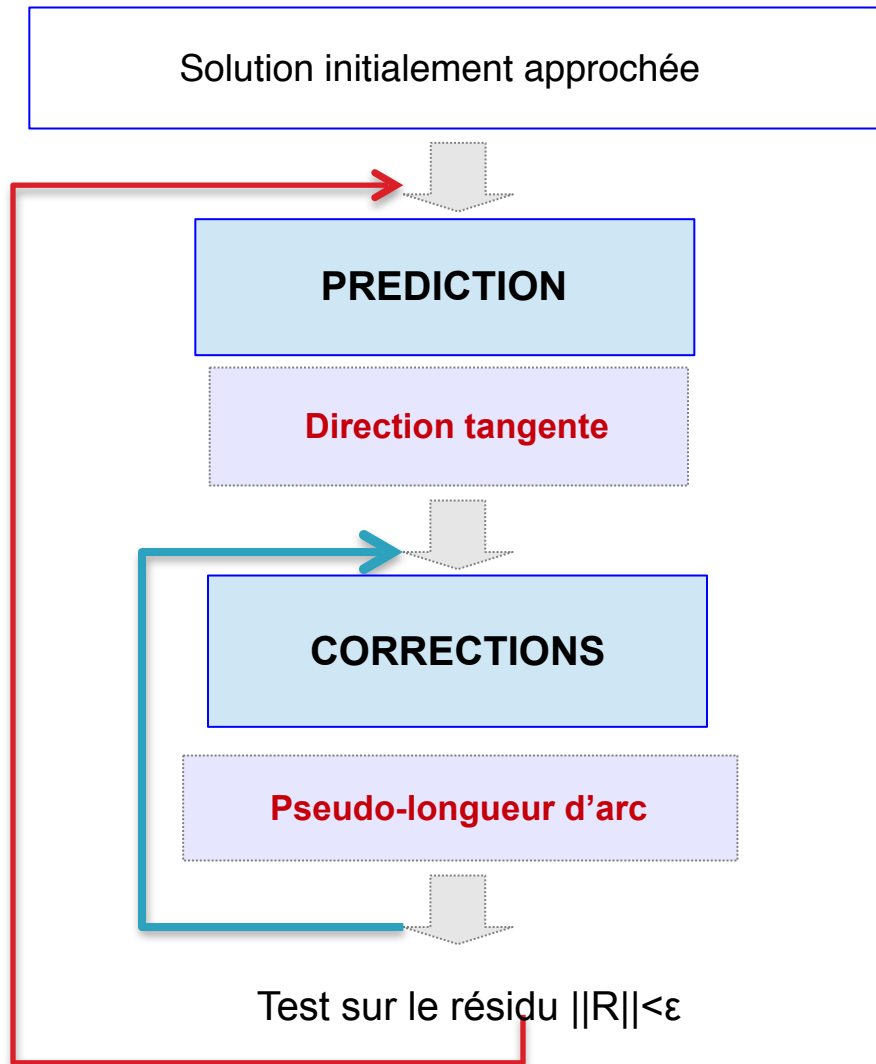
DFT : $x(t) = \Gamma(\omega t)X \quad X = \Gamma^{-1}(\omega t)x(t)$

$$\dot{x}(t) = \omega\Gamma(\omega t)\nabla X \quad \nabla = k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x}(t) = \omega^2\Gamma(\omega t)\nabla^2 X \quad \nabla^2 = -k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

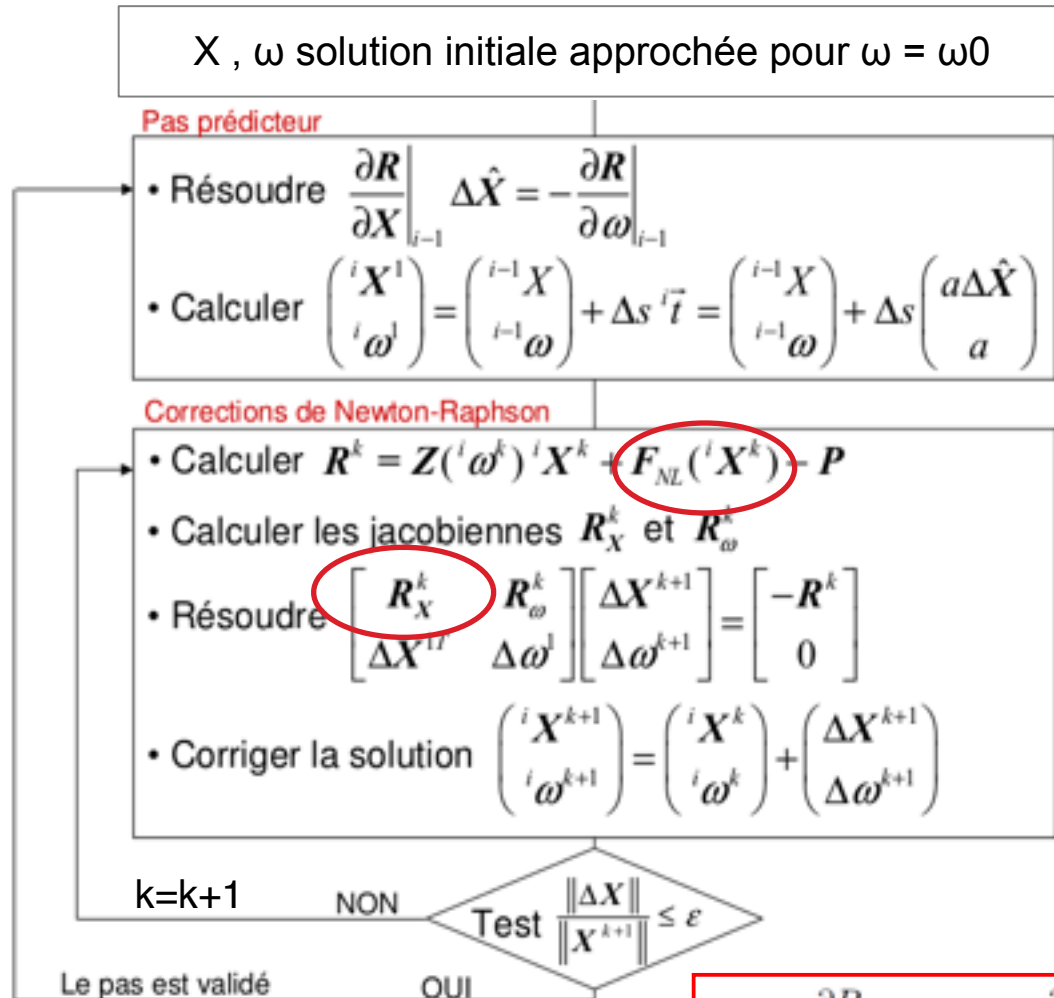
$$\mathbf{R}(X, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)X + \mathbf{F}_{NL}(X) - \mathbf{P} = \mathbf{0}$$





✓ nous permet de suivre la courbe de réponse

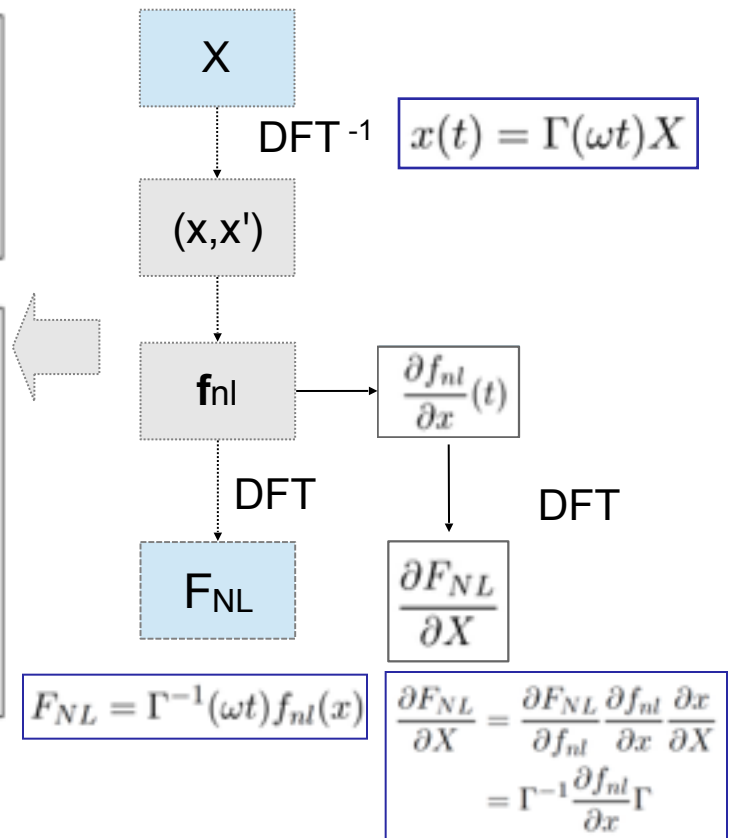
Algorithme HBM + Continuation :



$$R_X = \frac{\partial R}{\partial X} = Z(\omega) + \frac{\partial F_{NL}}{\partial X}$$

Calcul des termes non linéaires

AFT (Alternating frequency-time)



HBM : $R(X, \omega) = Z(\omega)X + F_{NL}(X) - P = 0$ + Petite perturbation

➔ Système quadratique des valeurs propres:

$$(\mathbf{R}_X + \Lambda \Delta_1 + \Lambda^2 \Delta_2) \mathbf{y} = 0$$

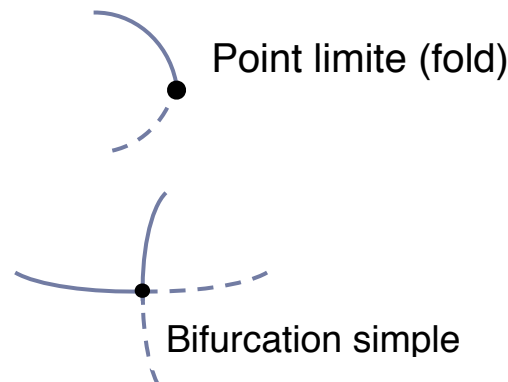
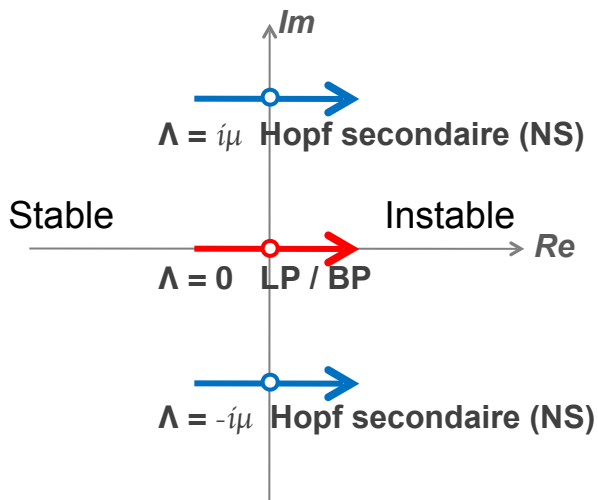
$$R_X = \frac{\partial R}{\partial X}$$

$$\Delta_1 = \text{diag} \left(\mathbf{C}, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2m_1\omega\mathbf{M} \\ -2m_1\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2m_N\omega\mathbf{M} \\ -2m_N\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right)$$

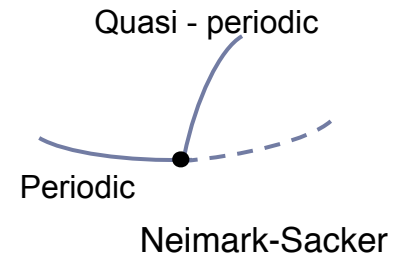
$$\Delta_2 = \text{diag} \left(\mathbf{M}, \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \right)$$

Analyse de stabilité des solutions périodiques dans le domaine fréquentiel :

Valeurs propres complexes $\Lambda = \text{Exposants de Floquet}$ ➔ Stabilité et Bifurcations



Points singuliers



- Points singuliers (LP ou BP)

$$\Lambda = 0 \iff \det(\mathbf{R}_X) = 0$$

$$R_X = \frac{\partial R}{\partial X}$$



$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X & \mathbf{R}_\omega \\ \Delta \mathbf{X}_i^T & \Delta \omega_i \end{bmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Point limite}$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X & \mathbf{R}_\omega \\ \Delta \mathbf{X}_i^T & \Delta \omega_i \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Bifurcation simple}$$

Caractérisation des points singuliers : $(\mathbf{R}_X + \Lambda \Delta_1 + \Lambda^2 \Delta_2) \mathbf{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{R}_X \mathbf{y} = 0}$

- Points singuliers (LP ou BP)

$$\Lambda = 0 \iff \det(\mathbf{R}_X) = 0$$

$$R_X = \frac{\partial R}{\partial X}$$



$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X & \mathbf{R}_\omega \\ \Delta \mathbf{X}_i^T & \Delta \omega_i \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Point limite}$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X & \mathbf{R}_\omega \\ \Delta \mathbf{X}_i^T & \Delta \omega_i \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{Bifurcation simple}$$

Caractérisation des points singuliers : $(\mathbf{R}_X + \Lambda \Delta_1 + \Lambda^2 \Delta_2) \mathbf{y} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_X \mathbf{y} = 0$

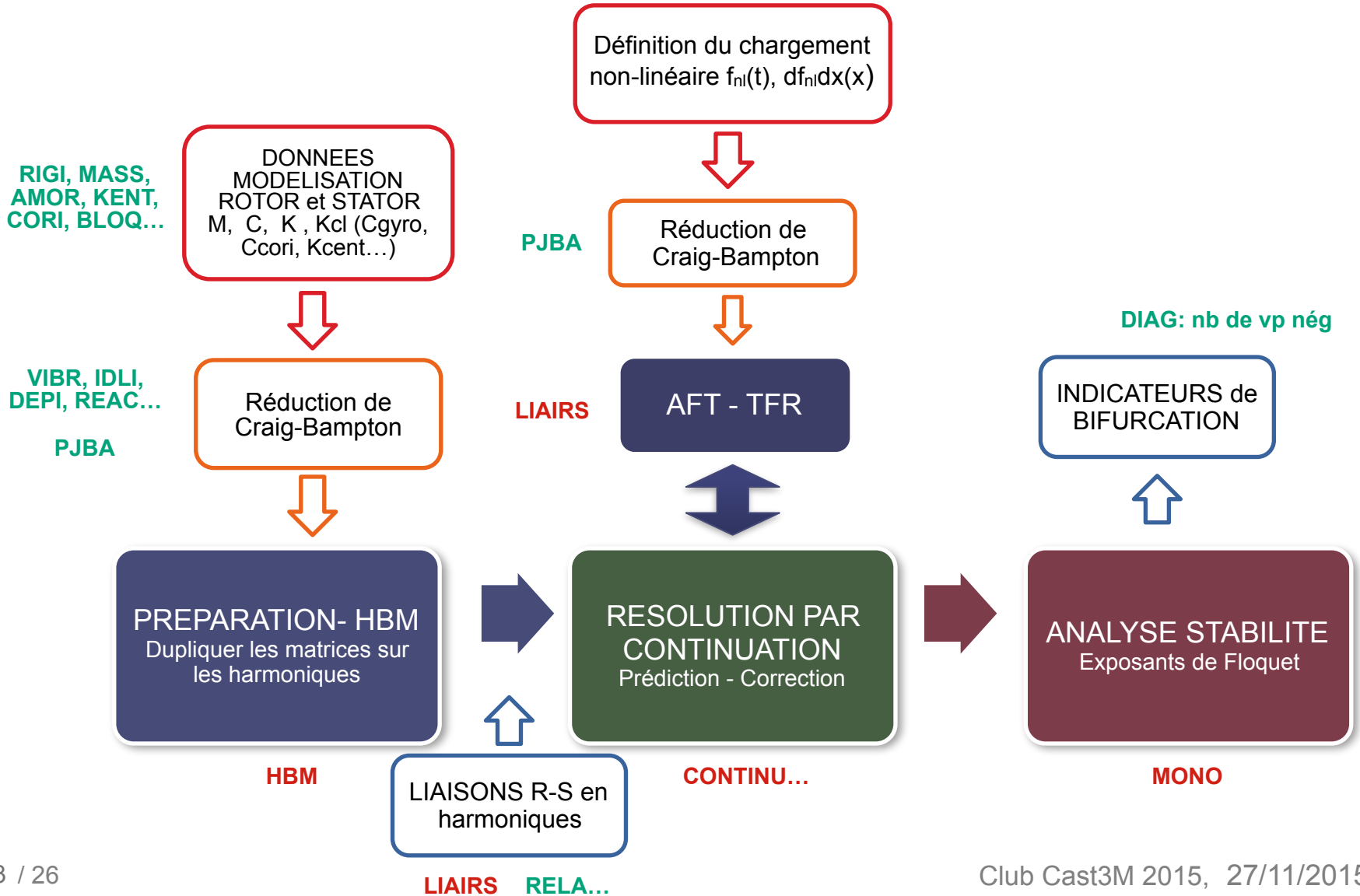
- Bifurcation de Neimark-Sacker (NS) — hopf simple $\Lambda = \pm i\mu$

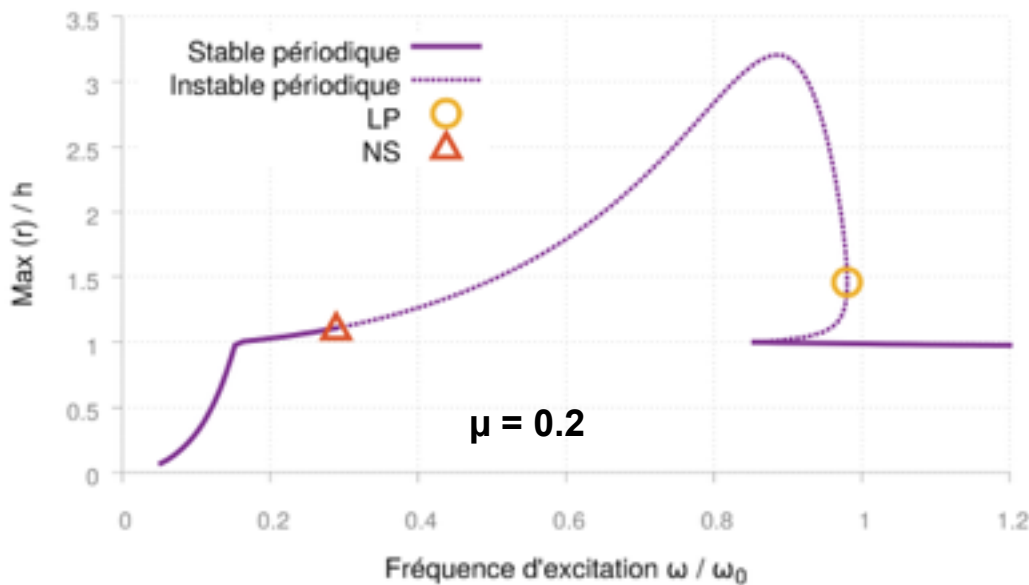
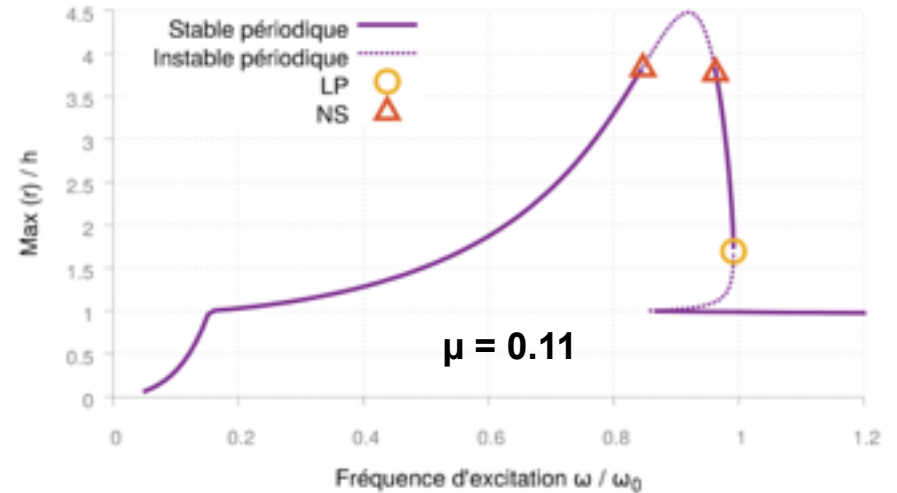
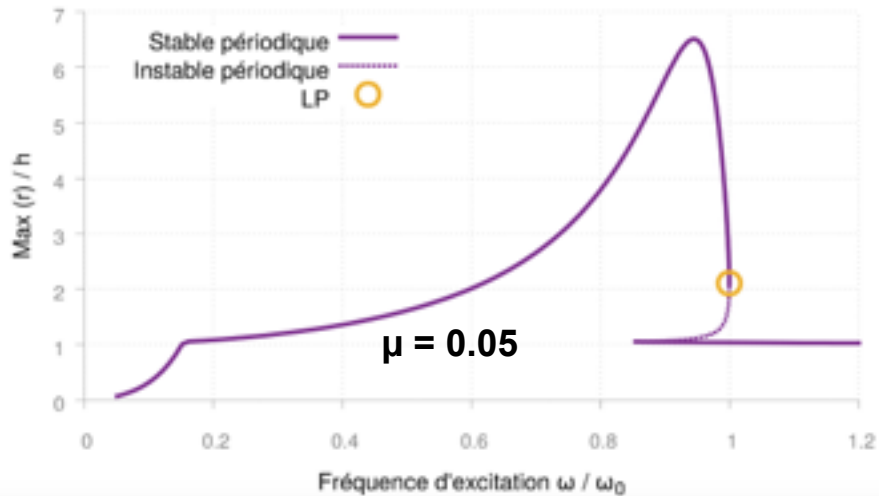
$$\prod_{1 \leq j \leq i \leq n} (\Lambda_i + \Lambda_j) = 0$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y}_1 \pm i\mathbf{y}_2$$

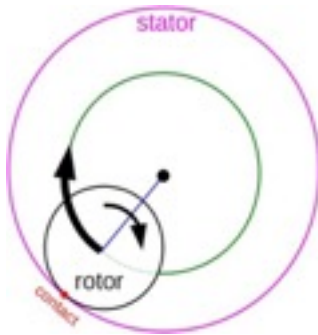
$$\begin{cases} \mathbf{R}_X \mathbf{y}_1 + \mu \Delta_1 \mathbf{y}_2 - \mu^2 \Delta_2 \mathbf{y}_1 = 0 \\ \mathbf{R}_X \mathbf{y}_2 - \mu \Delta_1 \mathbf{y}_1 - \mu^2 \Delta_2 \mathbf{y}_2 = 0 \end{cases}$$

A. Griewank, G. Reddien
The calculation of Hopf points by a direct method
IMA J. Numer. Anal., 3 (1983), pp. 295–303

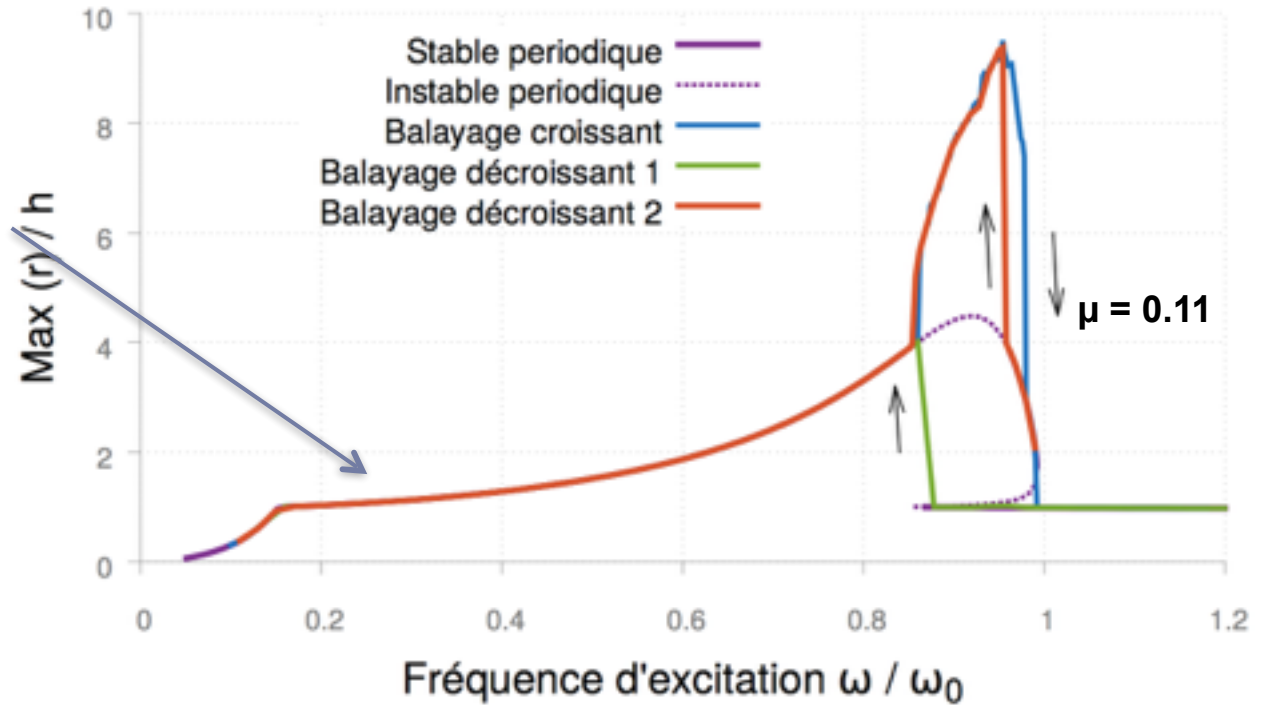




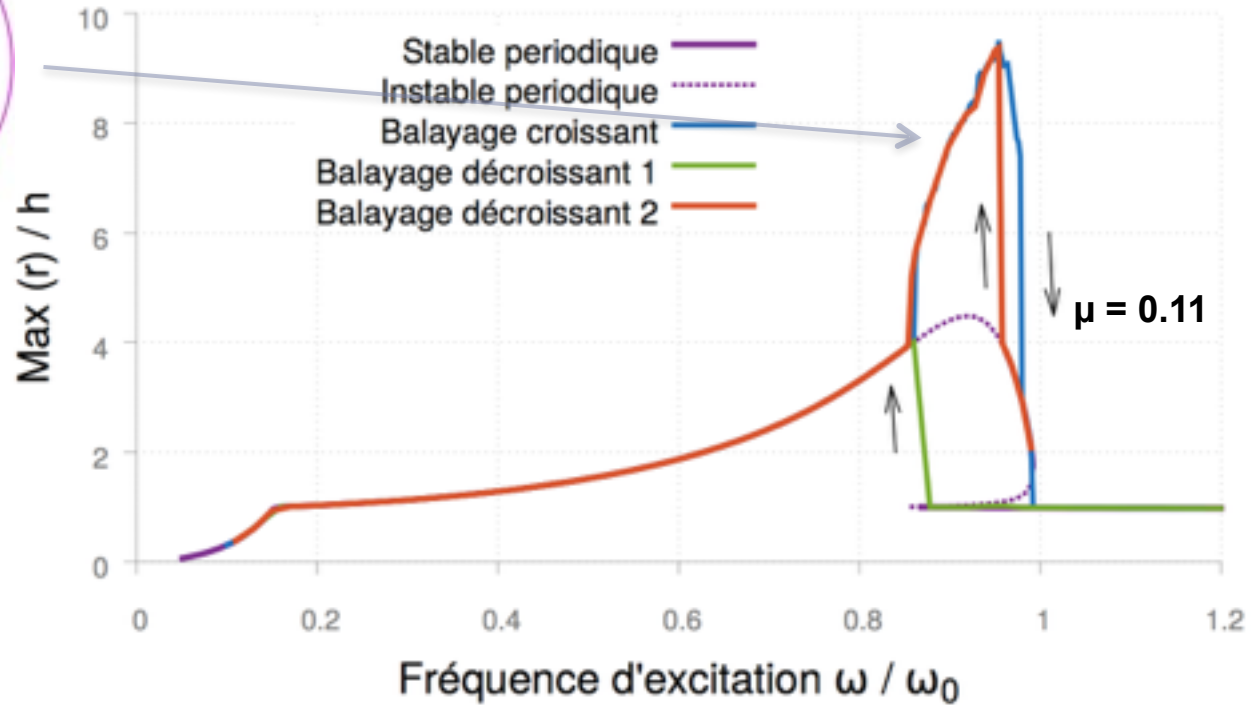
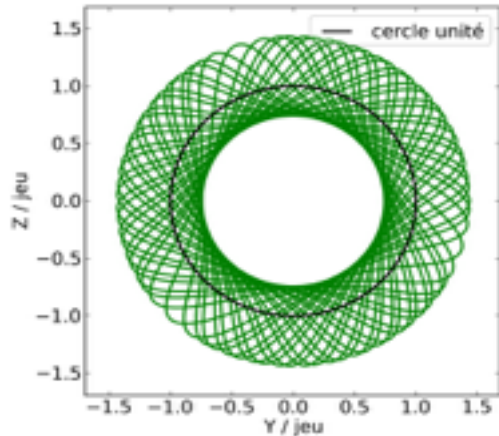
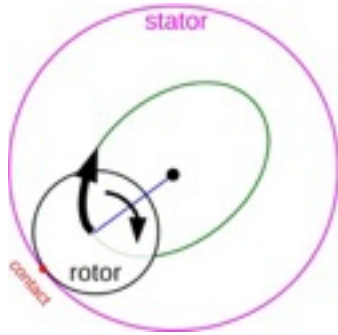
Contact annulaire



Solution périodique



Contact
partiel avec
du rebond



Solution quasi-périodique

Application numérique

- Rotor à 3 disques avec contact rotor-stator

$$\mathbf{f}_c(t) = \mathbf{f}_n(t) + \mathbf{f}_t(t) = -k\delta(t) - \mu \|k\delta(t)\| \frac{\mathbf{v}_{\text{rel}}(t)}{\|\mathbf{v}_{\text{rel}}(t)\|} \quad \text{avec} \quad \delta(t) = \begin{cases} (r(t) - \delta_0) \mathbf{n}_{\text{norm}}(t) & \text{si } r > \delta_0, \\ [0, 0]^T & \text{sinon.} \end{cases}$$

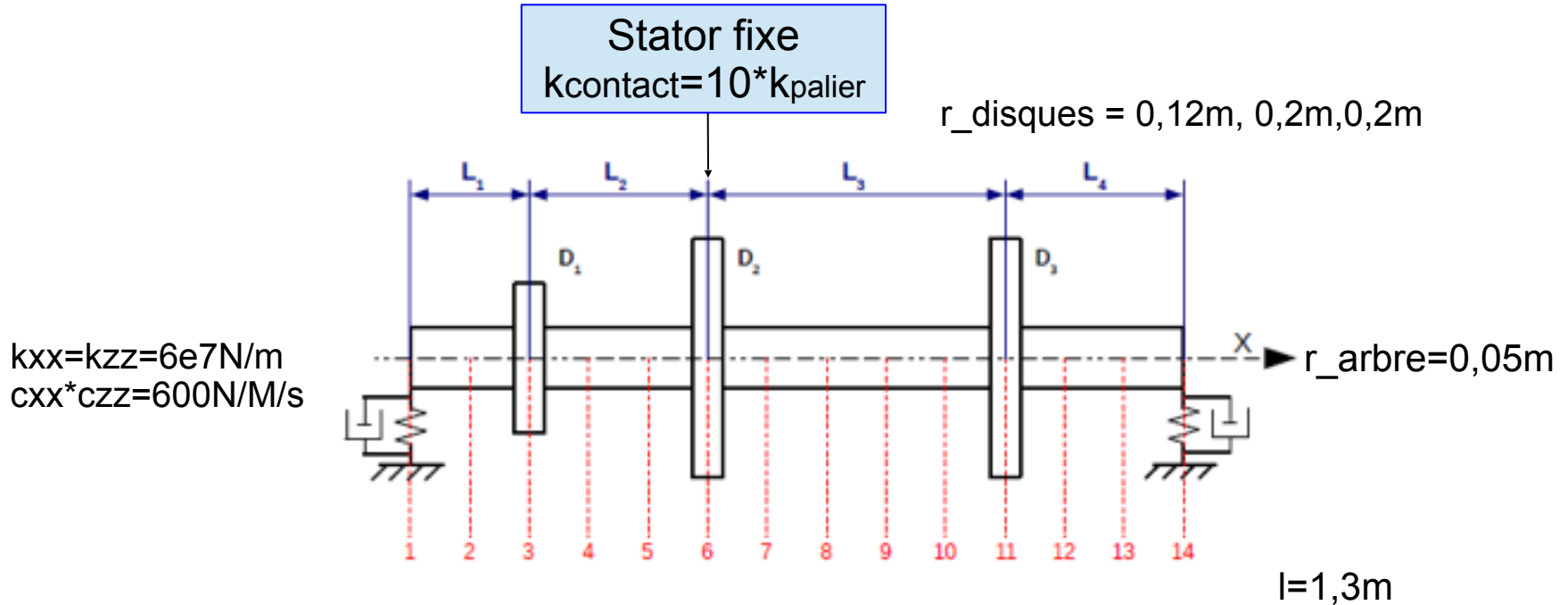
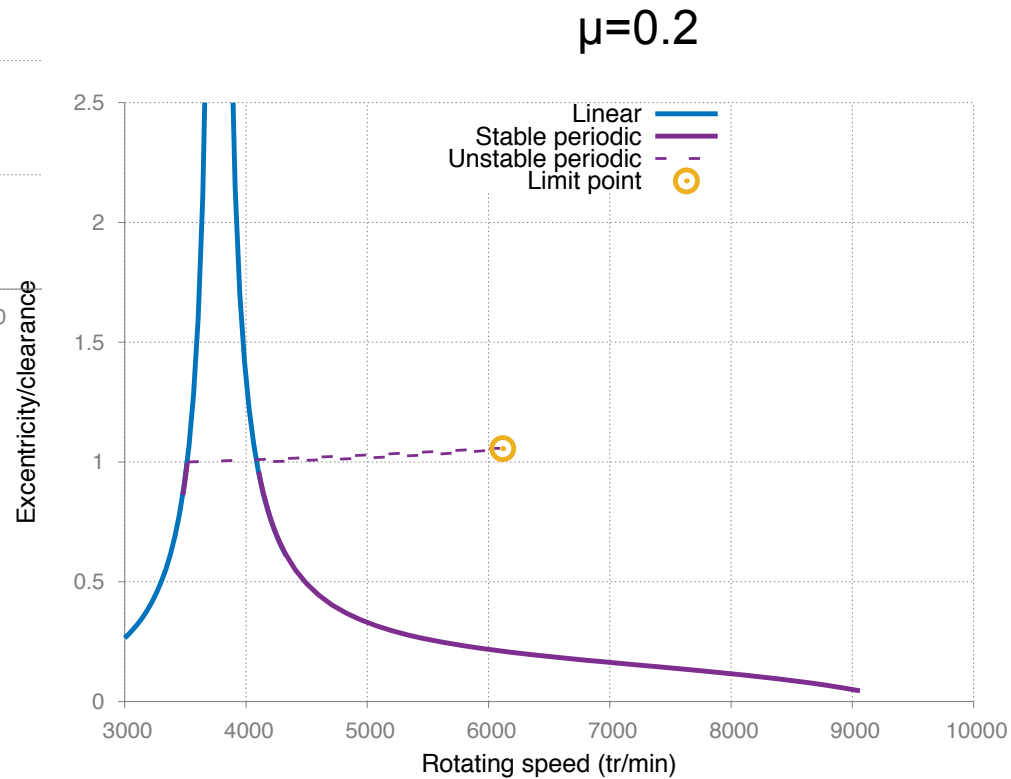
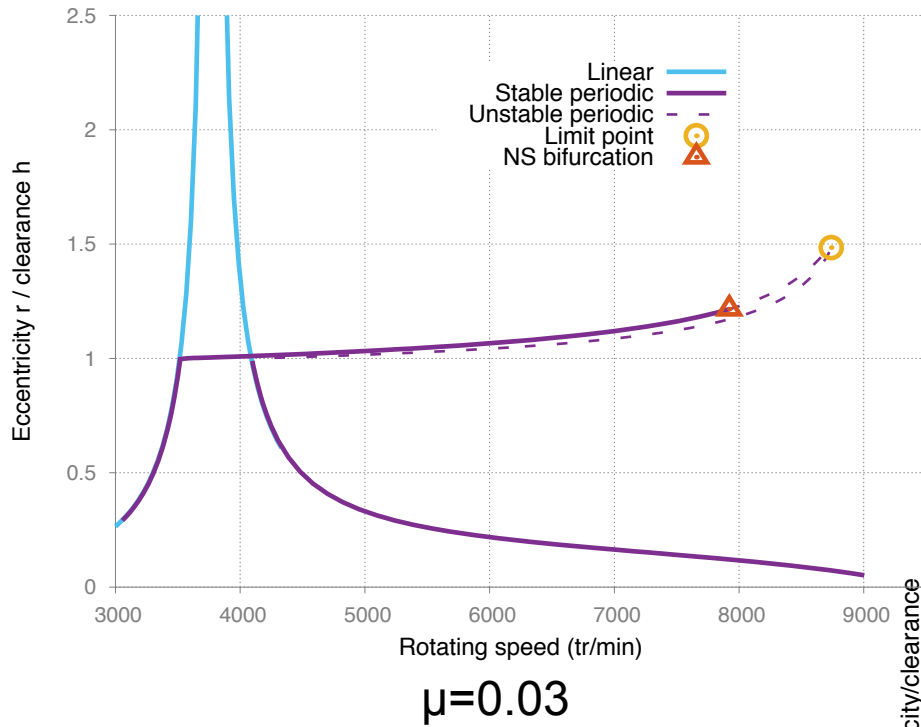
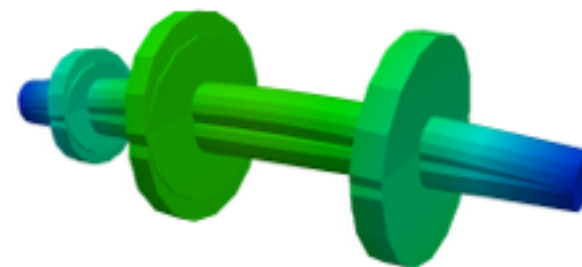
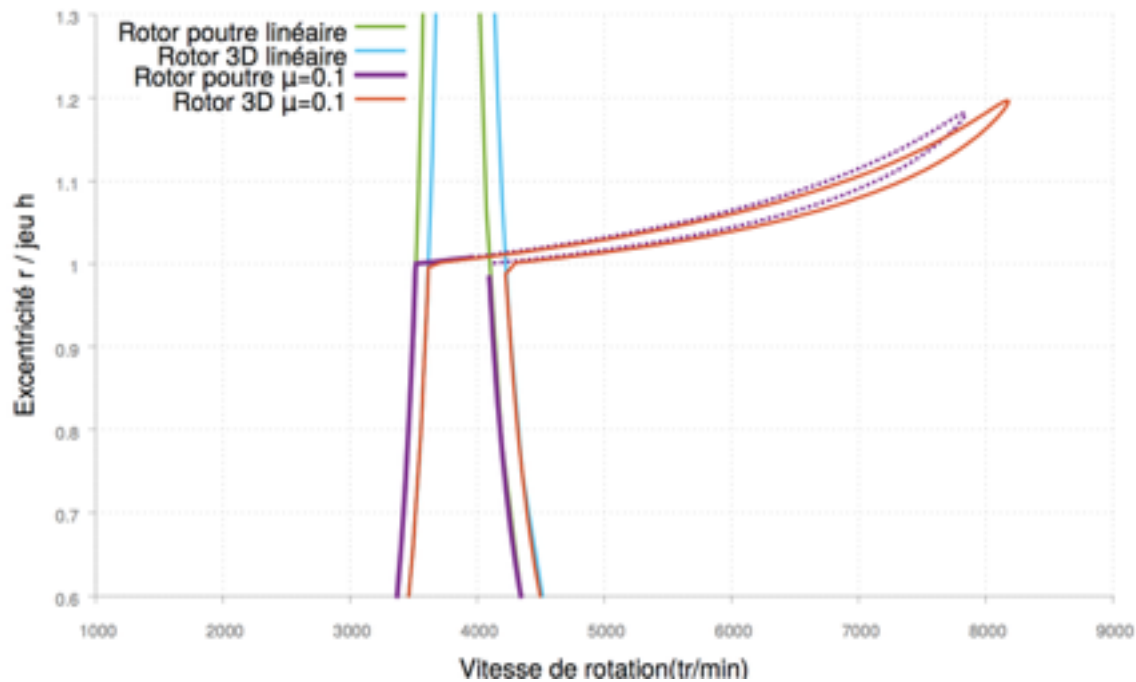


FIGURE 1 : Modèle de rotor éléments finis [LAL 98]



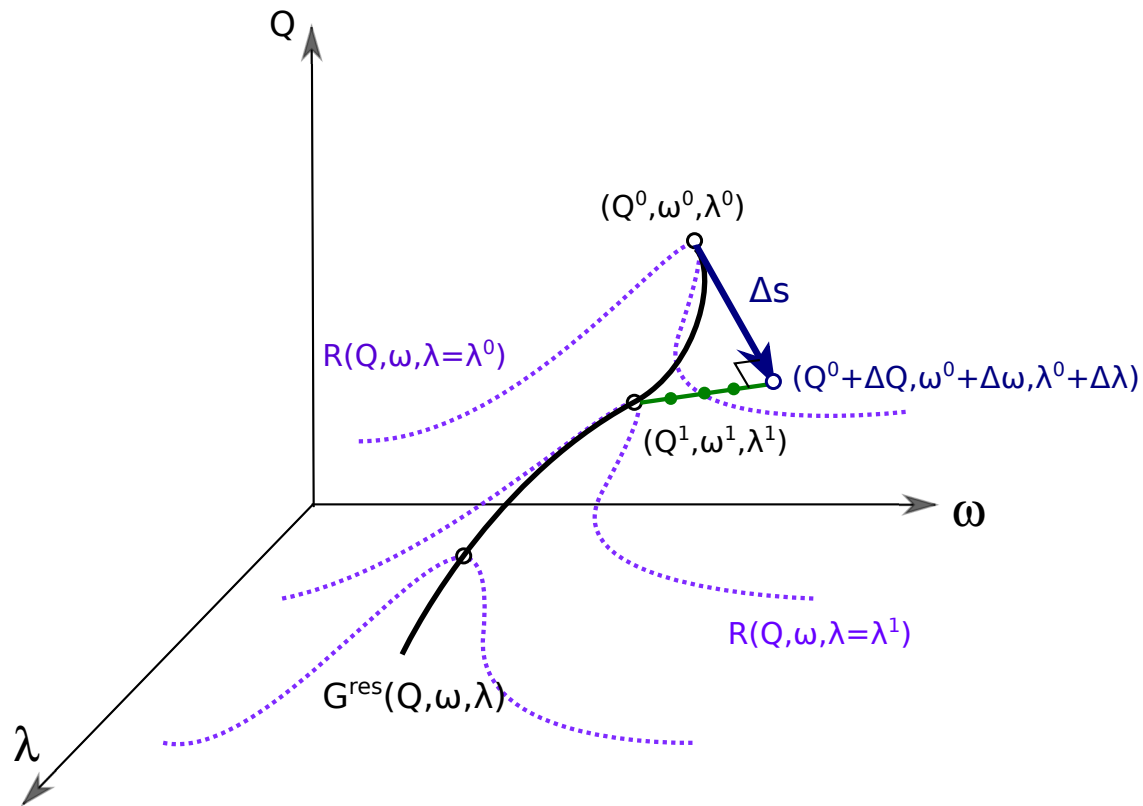
Application numérique

- Rotor à 3 disques avec contact rotor-stator en 3D (CU20)

 $\mu=0.1$


- **Modélisation 3D du rotor et stator, réduction de modèle**
- **Mise en œuvre de la Méthode de la Balance Harmonique, de l'analyse de stabilité au sein de CAST3M**
- **Etude du comportement des rotors appliqués à différents types de non-linéarité, analyse de la stabilité des solutions périodiques**
- **Détection de point limite où le changement de stabilité est indiqué, de bifurcation simple, et de bifurcation du régime périodique vers le régime quasi-périodique**

- Etude paramétrique des bifurcations du système non-linéaire



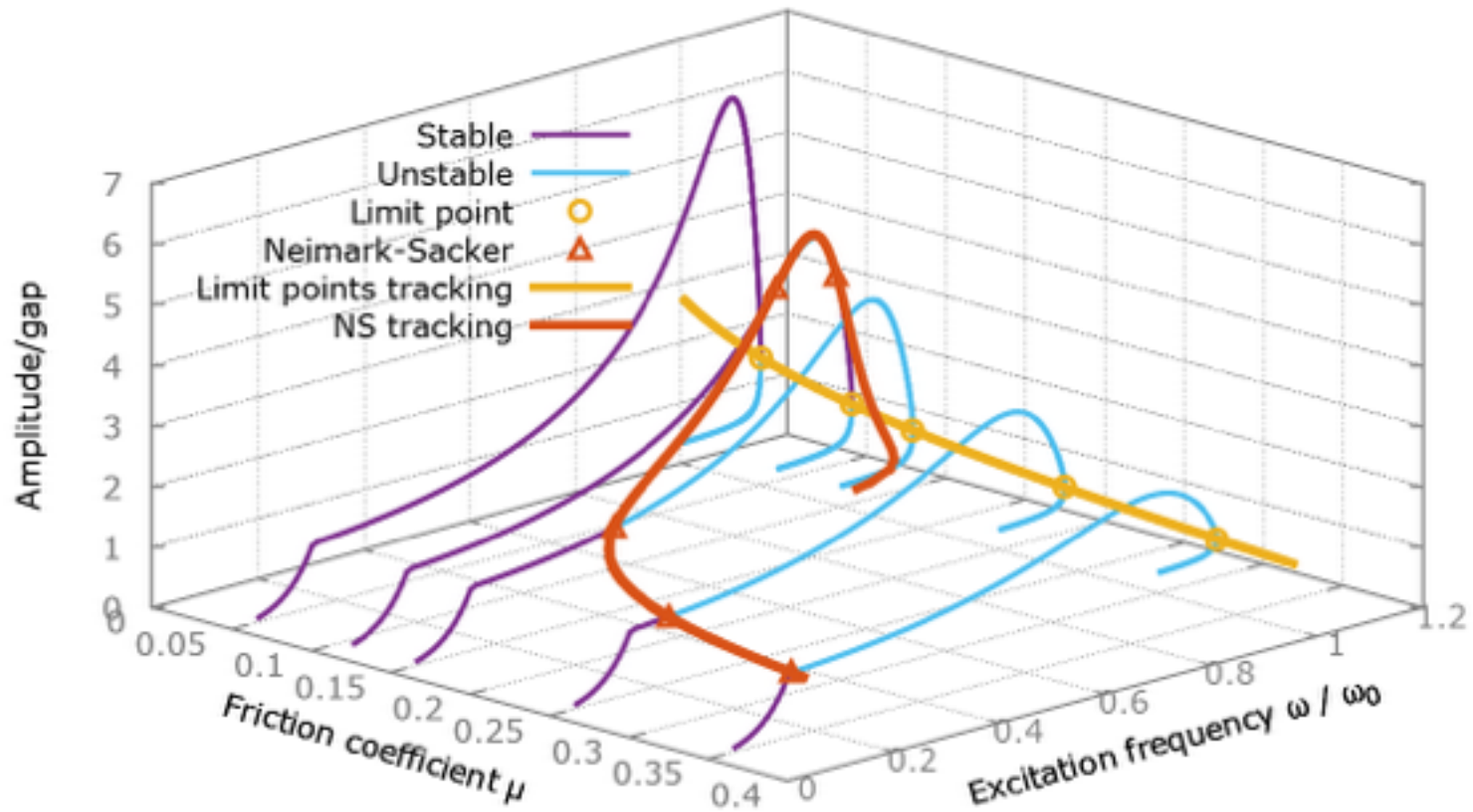
Limit points tracking (LP): λ : additional parameter

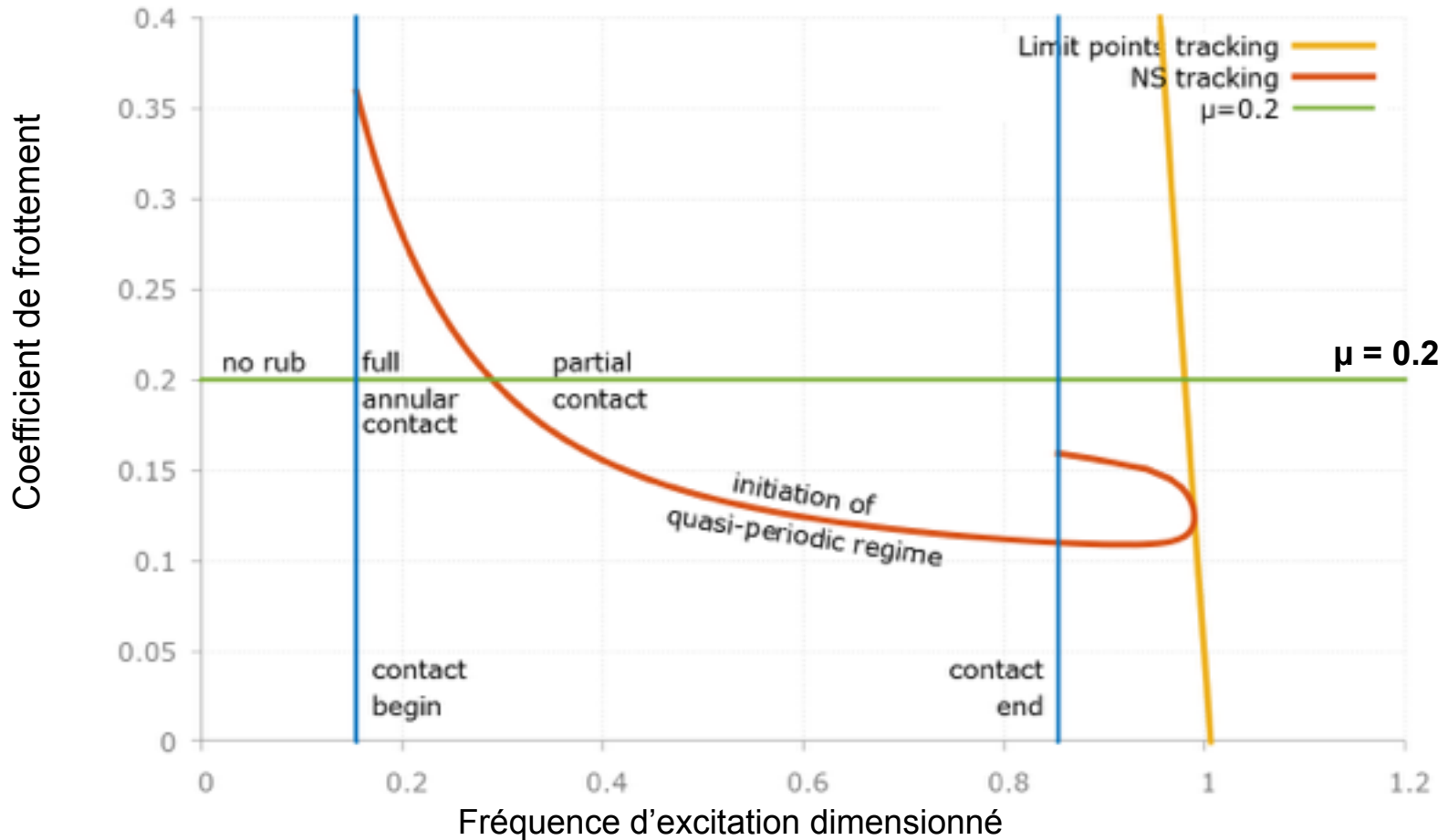
$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(X, \omega, \lambda) &= 0 && : \text{equilibrium} \\
 \mathbf{R}_{X\mathbf{y}} &= 0 && : \text{characterization of limit points} \\
 \mathbf{y}^T \mathbf{y} &= 1 && : \text{normalization} \\
 r_2 &= 0 && : \text{path following}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X & \mathbf{0} & \mathbf{R}_\omega & \mathbf{R}_\lambda \\ (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_X & \mathbf{R}_X & (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_\omega & (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_\lambda \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \Delta\omega & \Delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X} \\ \delta\mathbf{y} \\ \delta\omega \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_{X\mathbf{y}} \\ \|\mathbf{y}\|^2 - 1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_X &= \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{R}_\omega &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega} & \mathbf{R}_\lambda &= \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda} \\
 (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_X &= \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}^2} \mathbf{y} & (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_\omega &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{y} & (\mathbf{R}_{X\mathbf{y}})_\lambda &= \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X} \partial \lambda} \mathbf{y} \quad \text{with} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X} \partial \lambda} = \Gamma^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{x} \partial \lambda} \Gamma
 \end{aligned}$$





- Etude paramétrique des bifurcations du système non-linéaire
- Détermination des seuils de stabilité, et des frontières de changement de régime du système en dynamique non-linéaire

[CAM 89] CAMERON T.M., GRIFFIN J.H. *An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems*. Journal of Applied Mechanics, vol. 56, n°1, 1989, p. 149-154, ASME.

[PEL13] PELETAN L., BAGUET S., TORKHANI M., JACQUET-RICHARDET G. A *Comparison of Stability Computational Methods for Periodic Solution of Nonlinear Problems With Application to Rotordynamics*. Nonlin. Dyn. 72, 671-682, 2013

[JIA 09] JIANG J., *Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact*, Nonlinear Dynamics, 2009, 57, 351-361

[GRI 83] GRIEWANK A., REDDIEN G. *The calculation of Hopf points by a direct method*, IMA J. Numer. Anal., 3 (1983), pp. 295–303



MERCI DE VOTRE ATTENTION !



Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Centre de Saclay | 91191 Gif-sur-Yvette Cedex
T. +33 (0)1 XX XX XX XX | F. +33 (0)1 XX XX XX XX
Etablissement public à caractère industriel et commercial |

Direction de l'Energie Nucléaire
Direction déléguée aux Activités Nucléaires de Saclay
Département de Modélisation des Systèmes et Structures
Service
Laboratoire

RCS Paris B 775 685 019