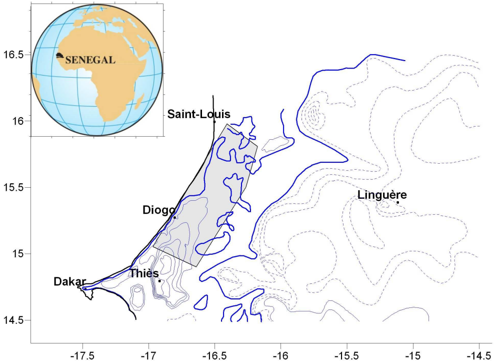
# Impact du régime climatique sur l'hydrologie d'hydrosystèmes côtiers refuges au Sénégal

Raphaël LEGER

LSCE

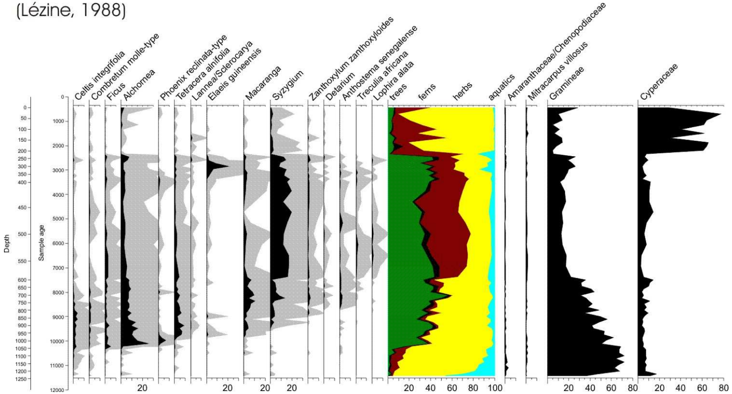
23 Septembre 2008

# Introduction



# Introduction

## Diogo 2 - 15,16N - 16,48W
(Lézine, 1988)




- Retard de 1500 / 2000 ans de l'installation (progressive) de la forêt guinéenne par rapport au début de la période humide africaine.
- Dégradation progressive de cette végétation après la fin de la période humide africaine (7500 BP).
- Une pulsation humide vers 3500 BP.
- Passage à une végétation sahélienne, avec reliques de forêt guinéenne à 2500 BP.

Objectifs :

- Déterminer le profil hydrogéologique passé de la région des Niayes.
- Comprendre les conditions du maintien de la végétation.

Stratégie :

- Calage du modèle sur la piézométrie de juillet 1975 (modèle permanent).
- Modification du forçage et simulations à 9000BP, 6000BP, 2000BP.

Outils :

- Eléments finis mixtes hybrides.
- Nouveau modèle de nappe libre.
- Cast3m.

# Plan

# Plan

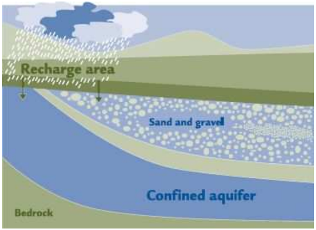
*Ecoulement d'une nappe.*

Ecoulement d'une nappe captive (hypothèse d'un aquifère saturé) :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -K_{\text{sat}} \nabla h \qquad \text{loi de Darcy,} \\ S_s \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = q \qquad \text{conservation de la masse,} \\ + \text{ CL} + \text{ CI,} \end{cases}$$

où $S_s = g \dfrac{d(\rho\omega)}{dp}$ est le coef. d'emmagasinement spécifique ($m^{-1}$).

$\boxed{\text{Equation linéaire}}$

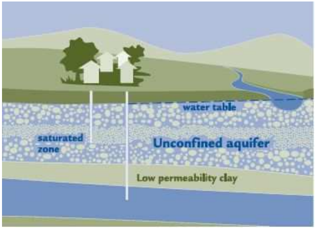


Ecoulement d'une nappe libre :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{K}(h)\nabla h \qquad \text{loi de Darcy,} \\ C(p)\dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u} = q \qquad \text{équation de Richards,} \\ + \text{ Conditions aux limites} + \text{ Conditions initiales,} \end{cases}$$

où $C(p) = \dfrac{d\theta}{dh}$ est la capacité capillaire $(m^{-1})$.

$$\boxed{\text{Equation non linéaire}}$$

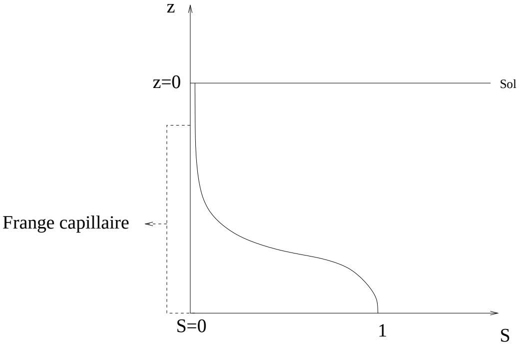


$\boxed{S = S(h)}$

- Van-Genuchten :

$$S(h) = \begin{cases} \left[1 + (h/h_e)^n\right]^{-m} \text{ si } h > 0, \\ 1 \text{ si } h \leq 0, \end{cases}$$

avec $m + n^{-1} = 1$ et $h_e$ le paramètre d'échelle de Van-Genuchten.



$\boxed{S = S(h)}$

- Van-Genuchten :

$$S(h) = \begin{cases} \left[1 + (h/h_e)^n\right]^{-m} \text{ si } h > 0, \\ 1 \text{ si } h \leq 0, \end{cases}$$

avec $m + n^{-1} = 1$ et $h_e$ le paramètre d'échelle de Van-Genuchten.

$\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{K}(S).}$

- Brooks & Corey :

$$K(S) = K_{sat}\,(S)^{\eta}\,,$$

où $\eta$ est un paramètre de forme compris entre 1 et 5.

- On définit la perméabilité résiduelle :

$$k_r = \frac{K}{K_{sat}}$$

*Eléments finis mixtes hybrides*

Formulation mixte.

- Ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ : $\Omega$, de frontière $\Gamma$, dont $\Gamma_n$ et $\Gamma_d$ forment une partition.
- On définit :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ pour } i = 1,2,3 \right\},$$

et

$$H(\mathrm{div},\Omega) = \left\{ \mathbf{q} \in \left( L^2(\Omega) \right)^3 / \mathrm{div}\, \mathbf{q} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On considère le problème fort :

Trouver $(\mathbf{u},h) \in L^2(0,T,H(\mathrm{div},\Omega)) \times L^2(0,T,H^1(\Omega))$ solution de :

$$\begin{cases} C\dfrac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\, \mathbf{u} = q, \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \nabla h = \mathbf{0}, \\ h = h_d \text{ sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{u}.\mathbf{n} = u_n \text{ sur } \Gamma_N, \\ h(0,.) = h_0. \end{cases}$$

Formulation variationnelle mixte

- Trouver $(\mathbf{u},h) \in L^2(0,T,H(\mathrm{div},\Omega)) \times L^2(0,T,L^2(\Omega))$ solution de :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega C\frac{\partial h}{\partial t}.\psi.d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{u}.\psi.d\mathbf{x} = \int_\Omega q.\psi.d\mathbf{x},\ \forall\psi \in L^2(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}.\varphi.d\mathbf{x} - \int_\Omega h.\mathrm{div}\,\varphi.d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_D} h_d.\varphi.\mathbf{n}.d\gamma = 0,\ \forall\varphi \in H_{\Gamma_n}(\mathrm{div},\Omega), \\ \mathbf{u}.\mathbf{n} = u_n \text{ sur } \Gamma_N, \\ h(0,.) = h_0. \end{cases}$$

Hybridation.

- On n'impose pas la continuité des champs de valeurs aux faces.
- Intégrations par parties sur chaque $T_i$ au lieu de $\Omega_h$.
- Nouvelle inconnue $Th$ (trace de charge).

Discrétisation spatiale :

- Soit une partition de $\Omega_h$ de $N_e$ éléments $T_i$, d'arêtes $A_h$ :

$$\Omega_h = \bigcup_{1 \leq i \leq N_e} T_i.$$

- On définit :

$$V_h = \{ v_h : \Omega_h \mapsto \mathbb{R} \ / \ v_h \text{ constant } \forall T_i \in \Omega_h \} ,$$

et

$$W_h = \left\{ \mathbf{w}_h : \Omega_h \mapsto \mathbb{R}^3 \ / \ \mathbf{w}_h . \mathbf{n}_i \text{ constant } \forall A_i \in A_h \right\} .$$

Problème discrétisé :

- Trouver le couple $(\mathbf{u}_h, h_h) \in W_h \times V_h$ solution de :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_h} C \frac{\partial h_h}{\partial t} . \psi_h . d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \mathrm{div}\, \mathbf{u}_h . \psi_h . d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} q_h . \psi_h . d\mathbf{x}, \ \forall \psi_h \in V_h, \\ \int_{\Omega_h} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h . \varphi_h . d\mathbf{x} - \int_{\Omega_h} h_h . \mathrm{div}\, \varphi_h . d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_D} h_d . \varphi_h . \mathbf{n} . d\gamma = 0, \ \forall \varphi_h \in W_{h,\Gamma_n}, \\ \mathbf{u}_h . \mathbf{n} = u_n \text{ sur } \Gamma_N, \\ h(0,.) = h_0. \end{cases}$$

*Th* (trace de charge), recherchée dans

$$N_h^* = \bigcup_{T_i} N_h^{T_i},$$

$$N_h^{T_i} = \{ f : \Gamma_{T_i} \mapsto \mathbb{R} \ / \ \forall A_j \in \Gamma_{T_i}, \ f \text{ restreint à } A_j \text{ est constant} \} .$$

$\mathbf{u}_h$ est recherché dans

$$W_h^* = \bigcup_{T_i} W_h^{T_i},$$

$$W_h^{T_i} = \left\{ \mathbf{q} : T_i \mapsto \mathbb{R}^3 \ / \ \forall A_j \in \Gamma_{T_i}, \ \mathbf{q}.\mathbf{n} \text{ restreint à } A_j \text{ est constant} \right\} .$$

Le problème EFMH discret s'écrit :

- Trouver $(\mathbf{u}_h, h_h, Th) \in W_h^* \times V_h \times N_h^*$ solution de :

$$
\begin{cases}
\int_{T_i} C\frac{\partial h_h}{\partial t}.\psi_h.d\mathbf{x} + \int_{T_i} \mathrm{div}\, \mathbf{u}_h.\psi_h.d\mathbf{x} = \int_{T_i} q_h.\psi_h.d\mathbf{x},\ \forall \psi_h \in V_h, \forall T_i \in \Omega_h, \\
\int_{T_i} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_h.\varphi_h.d\mathbf{x} - \int_{T_i} h_h.\mathrm{div}\, \varphi_h.d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{T_i}} Th.\varphi_h.\mathbf{n}_i.d\gamma = 0,\ \forall \varphi_h \in W_h^{T_i}, \forall T_i \\
\mathbf{u}_h.\mathbf{n} = u_n \text{ sur } \Gamma_N, \\
\mathbf{u}_{T_k}.\mathbf{n}_{j,T_k} + \mathbf{u}_{T_l}.\mathbf{n}_{j,T_l} = 0, \quad \forall A_j \in T_k \cap T_l \\
Th_{j,T_k} = Th_{j,T_l}, \quad \forall A_j \in T_k \cap T_l, \\
Th = h_d \text{ sur } \Gamma_D, \\
\mathbf{u}_h.\mathbf{n} = u_n \text{ sur } \Gamma_N, \\
h_h(0,.) = h_{h_0}.
\end{cases}
$$

Avantages des EFMH :

- Résolution conjointe de la loi de Darcy et de l'équation de conservation de la masse.
- Approximation simultanée de h et **u** avec le même ordre de convergence.
- Bilan de masse maille par maille adapté à la physique du problème.
- Une certaine robustesse face aux anisotropies et aux hétérogénéités.

Inconvénients :

- Les matrices sont plus pleines qu'en EF standards.
- Les matrices ne sont pas nécessairement définies positives (conditions sur la géométrie des mailles et le Fourier de maille).

*Traîtement des non linéarités* / Solveur itératif dit "de Picard".

- On dispose de $\mathbf{K}_i$ et $h_i$.
- On détermine $h_{i+1}$ en résolvant

$$\begin{cases} \mathrm{div}\left(-\mathbf{K}_i^r \nabla h_{i+1}\right) = q, \\ \; + \text{Conditions aux limites}, \end{cases}$$

  avec $\mathbf{K}_i^r = \alpha \mathbf{K}_{i-1} + (1-\alpha)\mathbf{K}_i$ (sous-relaxation).
- On détermine $S_{i+1}(h_{i+1})$ puis $\mathbf{K}_{i+1}(S_{i+1})$.
- Critères de précision et de convergence :

$$|\mathrm{div}\left(-\mathbf{K}_{i+1} \nabla h_{i+1}\right) - q| \leq \epsilon_1, \text{ avec } \epsilon_1 \text{ fixé.}$$

  et

$$|h_{i+1} - h_i| \leq \epsilon_2, \text{ avec } \epsilon_2 \text{ fixé.}$$

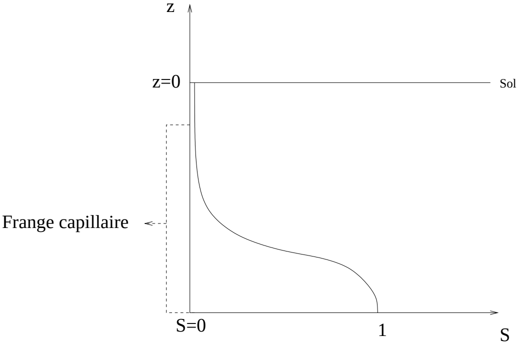
- Si oui, on a la solution. Si non,

$$\mathbf{K}_i \leftarrow \mathbf{K}_{i+1},$$

$$h_i \leftarrow h_{i+1}.$$

# Plan

*Motivations.*

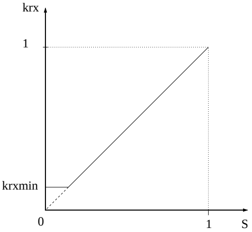



- Problèmes :
  - Méconnaissance du profil ?
  - Epaisseur de la frange capillaire petite devant les dimensions de l'aquifère ?
- Une solution : Transition sur une maille verticale

## *Lois de perméabilité relative*

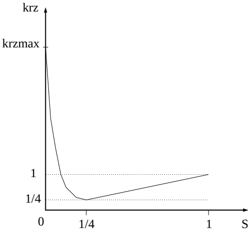
Modèle anisotrope.

Perméabilité relative horizontale.




$$\boxed{kr_x^{min} = 10^{-3}}$$

Perméabilité relative verticale.



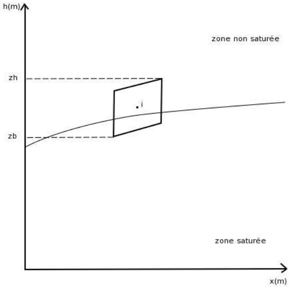

$$\boxed{kr_z^{max} = 10^{3}}$$

- Comportement linéaire.
- $kr_{min}$ pour que le tenseur de perméabilité soit inversible.
- Transition cubique vers $kr^z_{max}$ aux faibles saturations pour permettre à l'eau de s'écouler au travers de la zone désaturée.

*Evaluation de la saturation*

Méthode "centrée".

- On affecte au centre de chaque maille sa fraction mouillée.



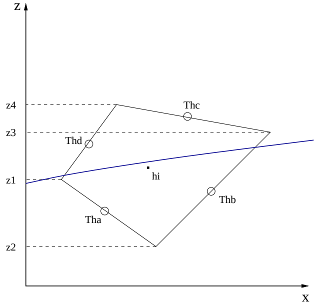

$$\boxed{S_i = \max\left(0; \min\left(1; \frac{h_i - zb}{zh - zb}\right)\right),}$$

où $h_i$ est la charge au centre.

$$\boxed{kr_i = kr(S_i).}$$

Méthodes "décentrées".

- On affecte à chaque face sa fraction mouillée.




$$\boxed{S_j = \frac{Th_j - z_b^j}{z_h^j - z_b^j},}$$

où $Th_j$ est la trace de charge sur la face $j$.

- Puis on moyenne.
  - Moyenne arithmétique :

$$kr_i = \frac{1}{4}\sum_j kr(S_j),$$

  - Moyenne harmonique,

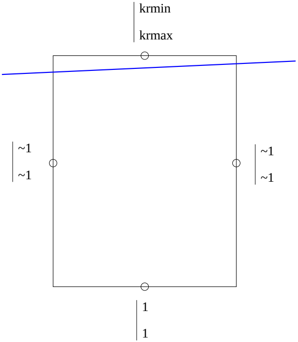
$$kr_i = 4\left(\sum_j \frac{1}{kr(S_j)}\right)^{-1},$$

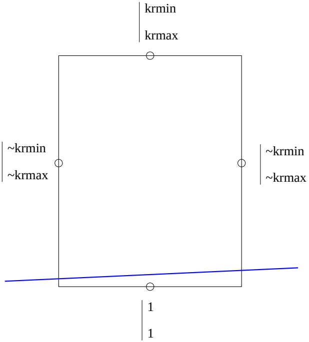
  - Moyenne géométrique :

$$kr_i = \left(\prod_j kr(S_j)\right)^{1/4}.$$

## Problèmes liés aux méthodes décentrées. (i)

- Aux saturations extremes, mauvaise estimation de $k_r$ due à l'opération de moyenne.




- Solution 1 : moyenne sur les faces non saturées uniquement ("Libre NS").
- Solution 2 : moyenne sur les faces non totalement désaturées en $x$ et non saturées en $z$ ("Libre S/NS").

Problèmes liés aux méthodes décentrées. (ii)

| | Maille quasi-saturée | | Maille quasi-désaturée | |
|---|---|---|---|---|
| | $k_{rx}^c$ | $k_{rz}^c$ | $k_{rx}^c$ | $k_{rz}^c$ |
| (ii) Moyenne arithmétique | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4} k_{rz}^{max}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4} k_{rz}^{max}$ |
| (iii) Moyenne harmonique | $4 k_{rx}^{min}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3} k_{rx}^{min}$ | $4$ |
| (iv) Moyenne géométrique | $\left(k_{rx}^{min}\right)^{1/4}$ | $\left(k_{rz}^{max}\right)^{1/4}$ | $\left(k_{rx}^{min}\right)^{3/4}$ | $\left(k_{rz}^{max}\right)^{3/4}$ |
| (v) Moyenne "Libre NS" | $\sim \frac{2}{3}$ | $\sim \frac{2}{3} k_{rz}^{max}$ | $\sim k_{rx}^{min}$ | $\sim k_{rz}^{max}$ |
| (vi) Moyenne "Libre S/NS" | $\sim 1$ | $\sim \frac{2}{3} k_{rz}^{max}$ | $\sim \frac{1}{3}$ | $\sim k_{rz}^{max}$ |
| Estimation attendue | $\sim 1$ | $\sim 1$ | $\sim k_{rx}^{min}$ | $\sim k_{rz}^{max}$ |

- Erreurs d'approximation de plusieurs ordres de grandeurs (rouge).

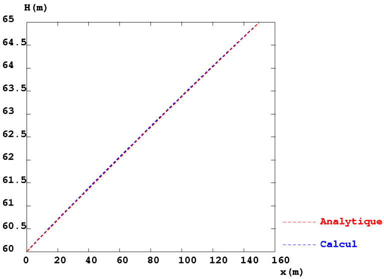
*Validation sur un cas test.*

- Massif rectangulaire 2D (150m $\times$ 100m).
- Charge fixée sur les bords verticaux.
- Flux imposé sur la surface.
- Maillage rectangulaire à faces horizontales.
- Solution analytique de Dupuit (pas de flux verticaux, écoulement unidimensionnel) :

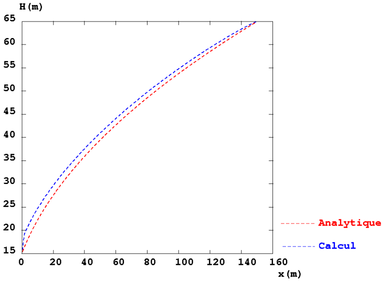
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T(h)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right) = 0, \\ h(0) = h_g, \\ h(L) = h_d. \end{cases}$$

$$h(x) = \left[\left(\frac{h_d^2 - h_g^2}{L}\right)x + h_g^2\right]^{1/2}.$$

Pertinence de la solution analytique de Dupuit.




OK si les gradients sont faibles.

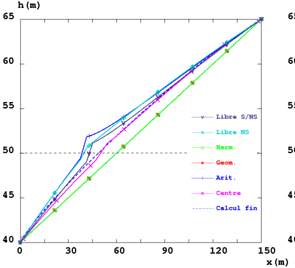



Pas OK sinon.

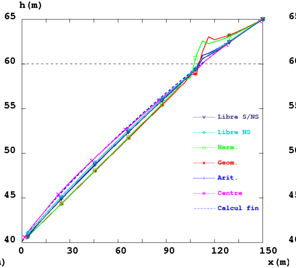
- La solution de Dupuit ne tient pas compte d'éventuels apports verticaux à l'écoulement. Elle perd en validité dès l'apparition de gradients verticaux significatifs.

## Effet du type de moyenne. (i)

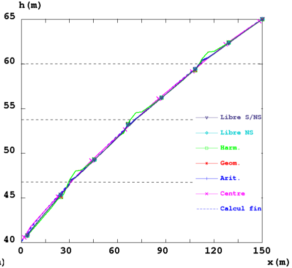
- $q_{surface} = 0$.




2 mailles verticales.




5 mailles verticales.

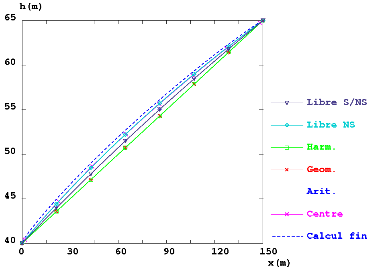


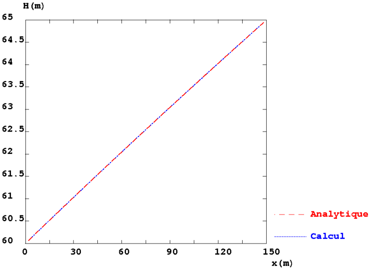

15 mailles verticales.

| | **Calc. Fin** | Centre | Arit. | Géom. | Harmo. | Libre "NS" | Libre "S/NS" |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_g$ | $3{,}0646.10^{-4}$ | $3{,}0644.10^{-4}$ | $3{,}0932.10^{-4}$ | $2{,}4649.10^{-4}$ | $2{,}4842.10^{-4}$ | $2{,}8861.10^{-4}$ | $3{,}2850.10^{-4}$ |
| Erreur | - | $\sim$ 0% | $\sim$ 0% | 18% | 19% | 6% | 7% |

## Effet du type de moyenne. (ii)

- $q_{surface} = 0$ (une maille verticale)

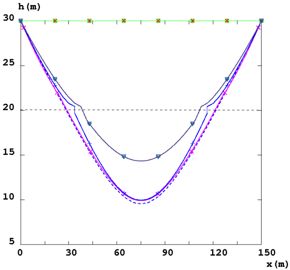


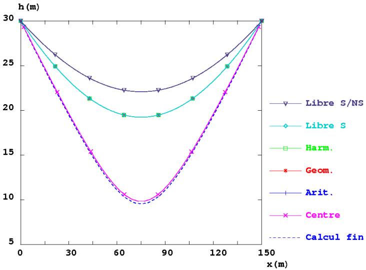

| | **Calc. Fin** | Centre | Arit. | Géom. | Harmo. | Libre "NS" | Libre "S/NS" |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_g$ | $3{,}0646.10^{-4}$ | $3{,}0423.10^{-4}$ | $2{,}9762.10^{-4}$ | $5{,}8333.10^{-7}$ | $5{,}8333.10^{-7}$ | $2{,}0132.10^{-4}$ | $3{,}9683.10^{-4}$ |
| Erreur | - | $\sim$ 0% | $\sim$ 2% | $>$ 100% | $>$ 100% | 34% | 29% |

## Effet du type de moyenne. (iii)

- $q_{surface} \neq 0$.



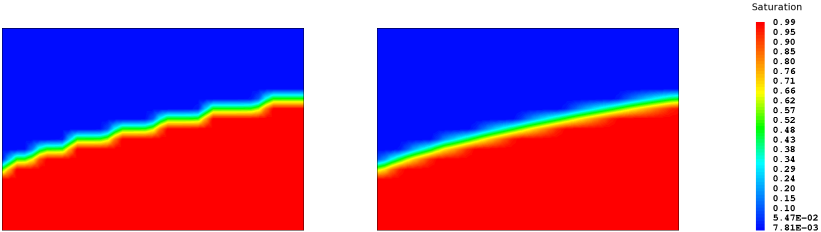

5 mailles verticales.




1 maille verticale.

- Comportement satisfaisant de la méthode centrée (lié à la nature du maillage : rectangulaire à faces horizontales).
- Les moyennes géométriques et harmoniques sont disqualifiées.

Comparaison avec le modèle de Van-Genuchten.




*(a)* *(b)*

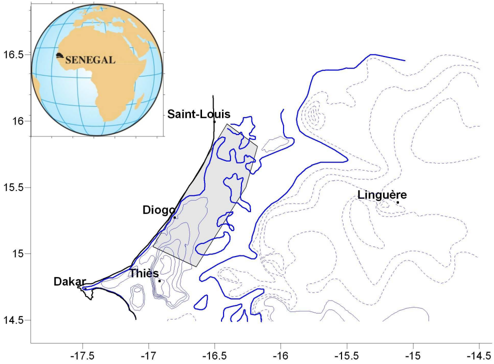
Profil de saturation

- (a) Van-Genuchten,
- (b) notre modèle de nappe libre.

# Plan

1. Rappels
   - Ecoulement d'une nappe
   - Eléments finis mixtes hybrides (EFMH)
   - Traîtement des non linéarités
2. Un nouveau modèle de nappe libre
   - Motivations
   - Evaluation de $(S = S(p))$ et $(K = K(S))$
   - Validation sur un cas test
3. Application à l'étude de l'hydrogéologie des Niayes
   - Construction du modèle
   - Résultats
   - Conclusion

*Construction du modèle*

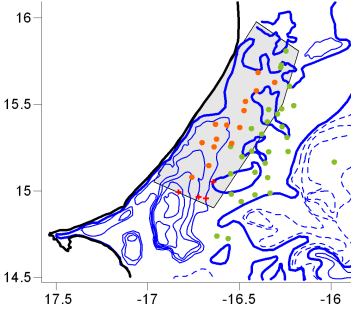


Conditions aux limites.

- Sur la côte, à l'est, à l'ouest : $h = 0$.
- Au sud : $\dfrac{\partial h}{\partial n} = 0$ (crête piézométrique).
- Sur la topographie : flux dus aux pompages agricoles et à l'infiltration.
  - Pompages agricoles : $132L/s$, répartis uniformément sur la nappe, cf BRGM 1986.
  - Infiltration fixée entre $-1mm/an$ (au nord) et $6.8mm/an$ (au sud), cf thèse S.FAYE 1995.
- Sur la topographie : condition de suintement : $h \leq z_{topo}$.

Perméabilité.

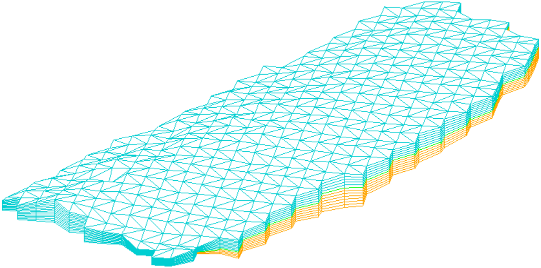
- 14 mesures pour les sables (orange) + *4 points de calage (rouge)*.
- 29 mesures pour les calcaires (vert).



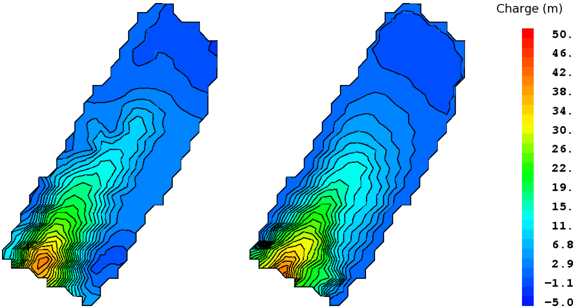

| | Sables | Calcaires |
|---|---|---|
| K (m/s) | $\sim 10^{-4}/10^{-5}$ | $\sim 10^{-3}/10^{-4}$ |

## Maillage

- $\sim$ 9000 prismes.
- 12 mailles verticales.



Résultat du calage (juillet 1975).



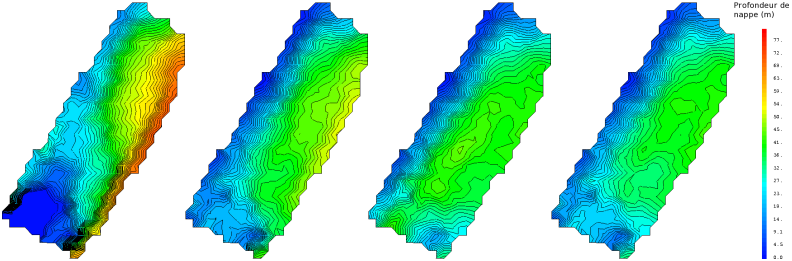

Piézométrie observée. Calage du modèle.

Modifications du forçage.

| | Infiltration | Niveau de la mer | Charge orientale |
|---|---|---|---|
| 9000 BP | $\sim$ Actuelle $\times 2$ | -30m | -30m |
| 6000 BP | Actuelle | +2m | -10m |
| 2000 BP | $\sim$ Actuelle / 2 | +1m | 0m |
| Actuel | Actuelle | 0m | 0m |

## Résultats. (i)

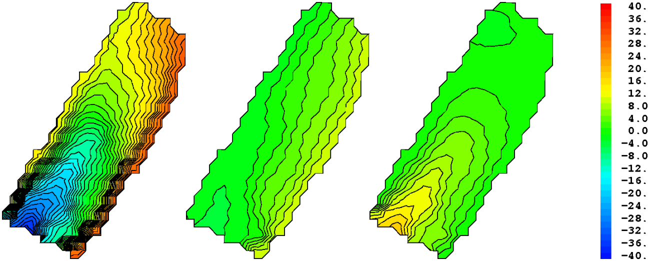
- Profondeur de nappe.




9000BP 6000BP 2000BP Actuelle

## Résultats. (ii)

- Différence de pofondeur de nappe.




9000BP 6000BP 2000BP

*Conclusion*

- Sur le retard de l'installation de la forêt guinéenne (9500 BP) : la nappe phréatique est trop profonde et les précipitations à elles seules ne sont pas suffisantes.
- La végétation a pu se conserver sous forme relique malgré la baisse des précipitations, grâce à le remontée du niveau marin (9000 BP - 2500 BP).
- La végétation sahélienne s'installe suite à une baisse des précipitations rédhibitoire (2500 BP).
- L'affleurement de la nappe ne suffit pas à conserver la végétation humide installée à l'occasion de la pulsation humide de 4000 BP - 2500 BP.

*Perspectives*

- Modélisation à l'échelle d'une Niaye.
- Raffinement du maillage aux abords des Niayes.
- Modélisation transitoire, de 9000BP à aujourd'hui ou sur une année.

Merci !