



CEA Saclay  
DEN/DM2S/SEMT/LISN

INSA de Lyon  
LaMCoS/MSE



---

# **Interprétation d'essais de rupture fragile par la méthode X-FEM en dynamique non linéaire**

---

Club Castem 2006

Authors: Benoit Prabel, Alain Combescure,  
Anthony Gravouil, Stéphane Marie

[Benoit.Prabel@insa-lyon.fr](mailto:Benoit.Prabel@insa-lyon.fr)

---

# **Plan :**

## **I. Contexte**

## **II. Modèle mécanique**

## **III. Méthodes numériques**

## **IV. Support expérimental**

## **V. Interprétation d'essais**

---

# Plan :

## **I. Contexte**

## II. Modèle mécanique

## III. Méthodes numériques

## IV. Support expérimental

## V. Interprétation d'essais

---

## Contexte:

"Propagation dynamique et arrêt de fissure  
dans un acier de cuve"

Benoit Prabel

Thèse CFR encadrée par:

Alain Combescure de l'INSA Lyon (LAMCOS),  
et Stéphane Marie du CEA Saclay (SEMT/LISN).

---

## **Contexte:**

### Objectif :

Appréhender les phénomènes liés à la propagation et à l'arrêt de fissure en rupture par clivage dans un acier.

1. Réalisation d'expérience de rupture fragile sous chargement thermo-mécanique.
2. Interprétation des expériences :
  - Développement d'outils numériques capable de modéliser la propagation et l'arrêt de fissure en dynamique non linéaire = Intégration d'éléments X-FEM dans Cast3M.
  - Tester les critères de propagation habituels et définir celui qui est le plus pertinent.

---

# Plan :

I. Contexte

**II. Modèle mécanique**

III. Méthodes numériques

IV. Support expérimental

V. Interprétation d'essais

---

# Modèle mécanique:

Hypothèse de petites perturbations.

Il s'agit de trouver  $\underline{\sigma}, \underline{u}$  vérifiant :

- l'équilibre dynamique,
- les conditions aux limites,
- les conditions initiales,
- les équations constitutives.

Les équations constitutives sont :

- Décomposition de la déformation en une partie élastique et inélastique,
- Critère de plastification de Von Mises avec écrouissage isotrope,
- Loi d'écoulement associée.

---

# Plan :

I. Contexte

II. Modèle mécanique

**III. Méthodes numériques**

IV. Support expérimental

V. Interprétation d'essais



---

## **III. Méthodes numériques**

**1. Représentation de fissure par la méthode des fonctions de niveau (Level Set method)**

**2. Introduction d'un élément fini étendu (X-FEM) dans Cast3m**

**3. Validation des méthodes numériques**

---

## III. Méthodes numériques

### 1. Représentation de fissure par la méthode des fonctions de niveau (Level Set method)

### 2. Introduction d'un élément fini étendu (X-FEM) dans Cast3m

### 3. Validation des méthodes numériques

## Level set:

### Méthode des fonctions de niveau (Level Set method)

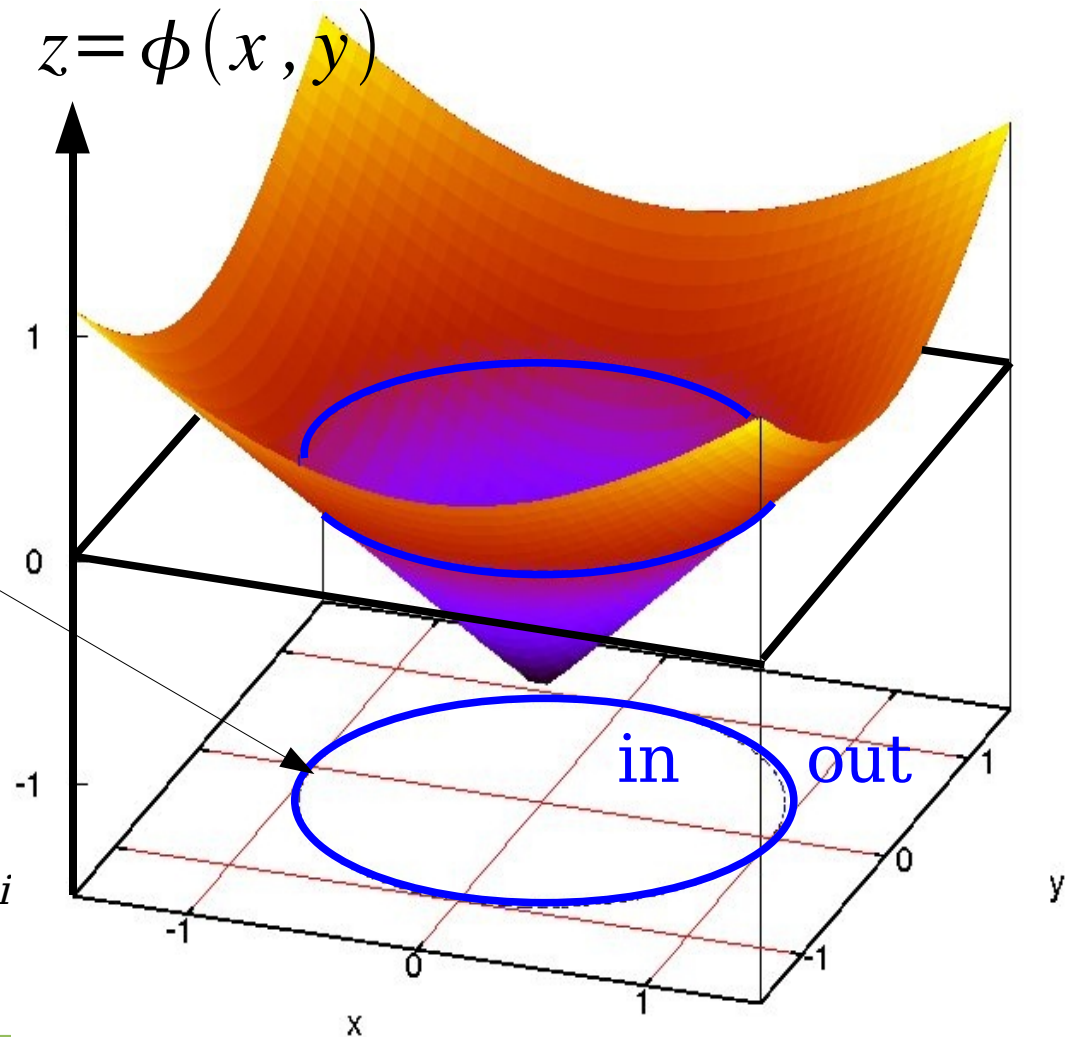
=méthode eulérienne pour suivre l'évolution d'interfaces en mouvement

Fonction de niveau  $\phi(\underline{x})$   
= distance signée  
à une interface  $\Gamma$

$$\Gamma = \{ \underline{x}, \phi(\underline{x}) = 0 \}$$

$$\|\nabla \phi\| = 1$$

*Osher, S. & Sethian, J. A. . "Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations". Journal of Computational Physics 79:12-49 (1988).*



# Level set:

## Représentation des fissures

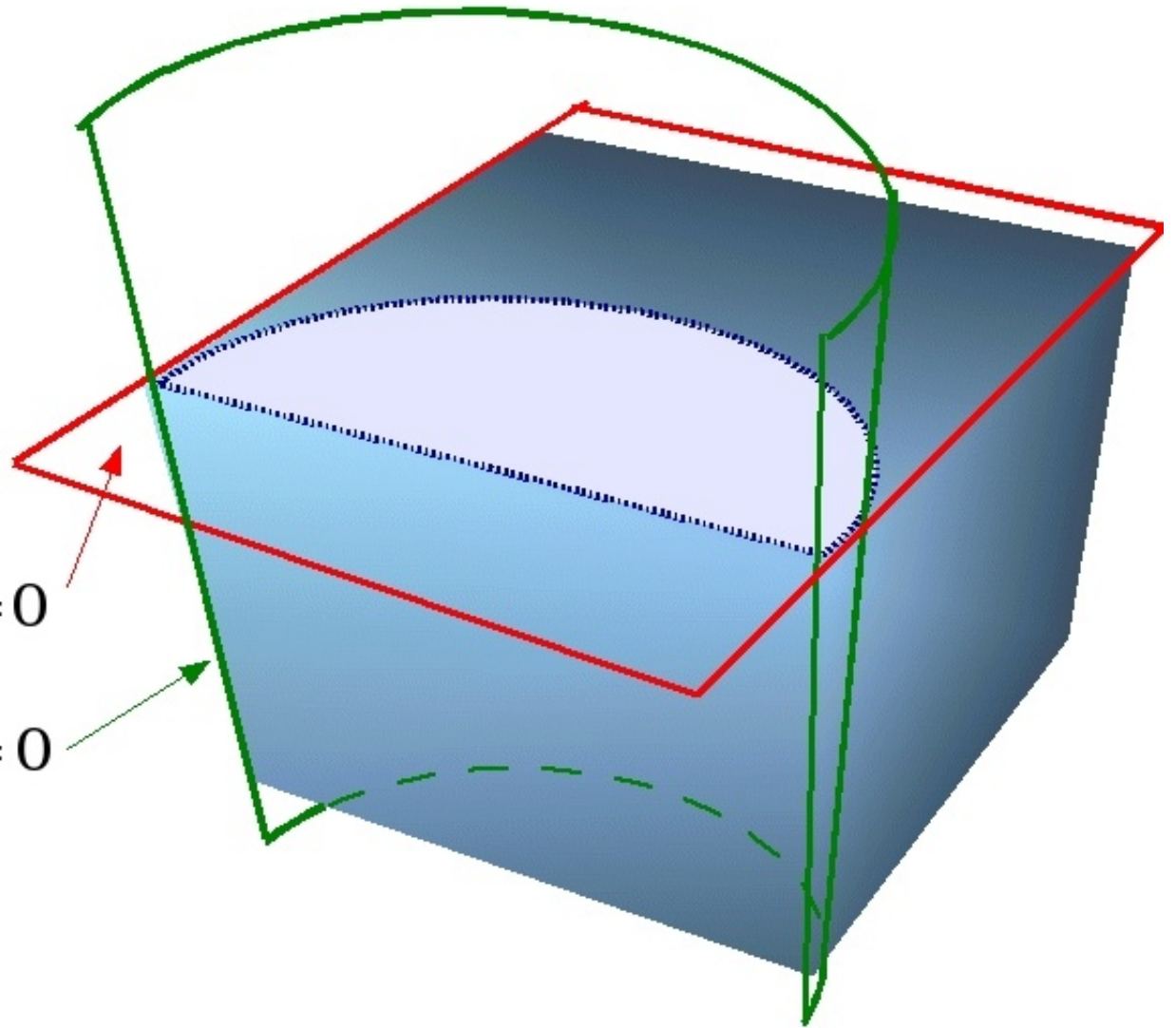
Utilisation de 2  
fonction de niveau  
orthogonales

Plan de fissure :

$$\phi = 0$$

Front de fissure :

$$\psi = 0$$



---

## Level set:

Méthodes des fonctions de niveau mal adaptée à des maillages irrégulier.

### Alternative proposée :

Introduction d'une grille auxiliaire indépendante du maillage de la structure pour actualiser les fonctions de niveau.

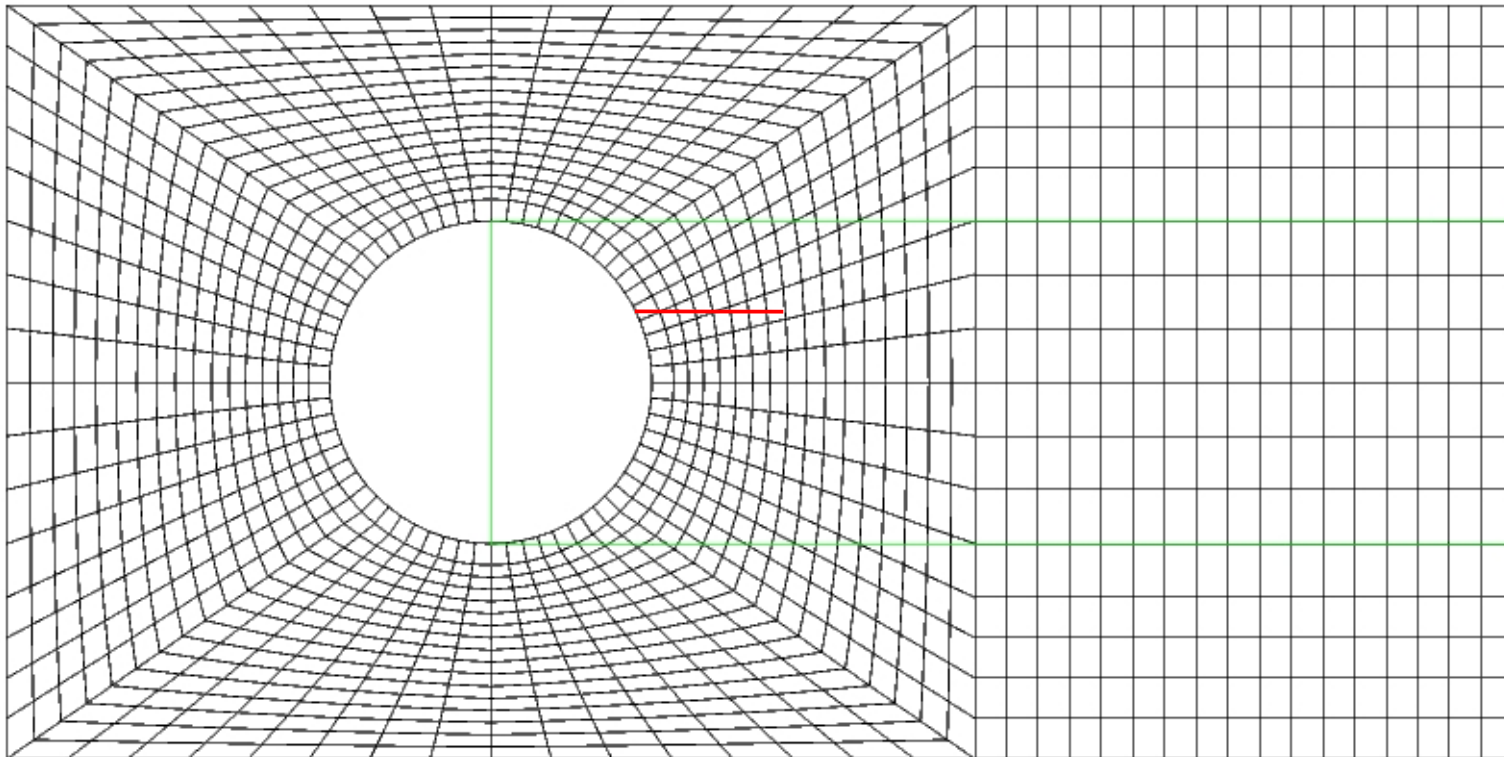
- Découplage des géométries de la fissure et de la structure
- La grille auxiliaire ne couvre que la zone de propagation de la fissure.
- Utilisation d'un algorithme d'actualisation efficace et facile à implanter (basé sur les différences finies).

## Level set:

Utilisation d'une grille auxiliaire:

Introduction d'une grille auxiliaire indépendante du maillage de la structure pour actualiser les fonctions de niveau.

Exemple : maillage de structure irrégulier



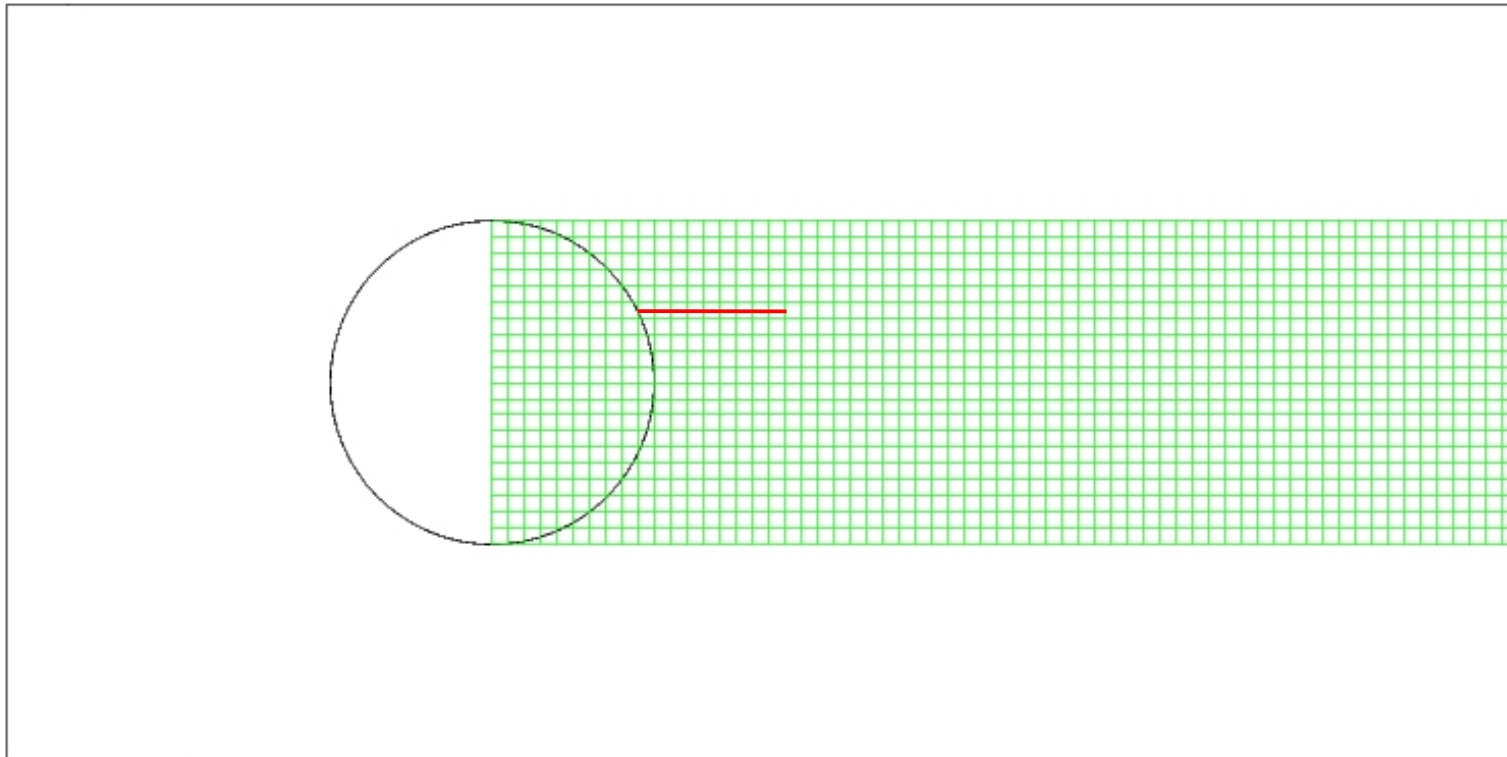
---

## Level set:

### Utilisation d'une grille auxiliaire:

Introduction d'une grille auxiliaire indépendante du maillage de la structure pour actualiser les fonctions de niveau.

Exemple : grille auxiliaire



---

## III. Méthodes numériques

1. Représentation de fissure par la méthode des fonctions de niveau (Level Set method)

**2. Introduction d'un élément fini étendu (X-FEM) dans Cast3m**

3. Validation des méthodes numériques



# X-FEM : Approximation du déplacement

Approximation temporelle:

Pas de limitation.

Ici, schéma de Newmark implicite  $\left( \gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4} \right)$

Approximation spatiale:

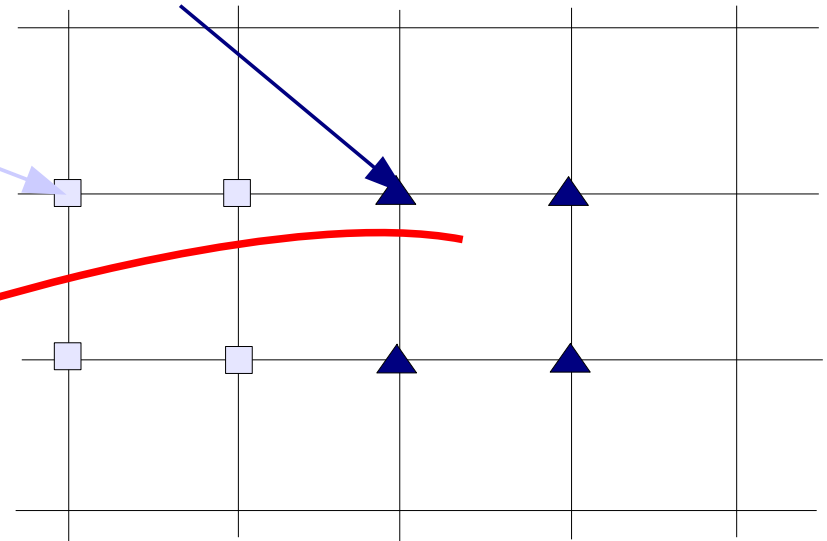
Cinématique X-FEM avec les fonctions discontinues (H) et singulières (F).

$$\underline{u}(\underline{x}) \simeq \sum_i N_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in I_H} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}_i) \underline{a}_i + \sum_{i \in I_F} N_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1, \dots, 4} F_j(\underline{x}_i) \underline{b}_{i,j} \right)$$

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -1 & \text{si } \phi < 0 \end{cases}$$

$$F_j(\underline{x}) = \sqrt{r} \begin{cases} \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \sin(\theta) \\ \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \sin(\theta) \end{cases}$$

crack



# X-FEM : Technique d'intégration

Particularité du champ de déplacement:

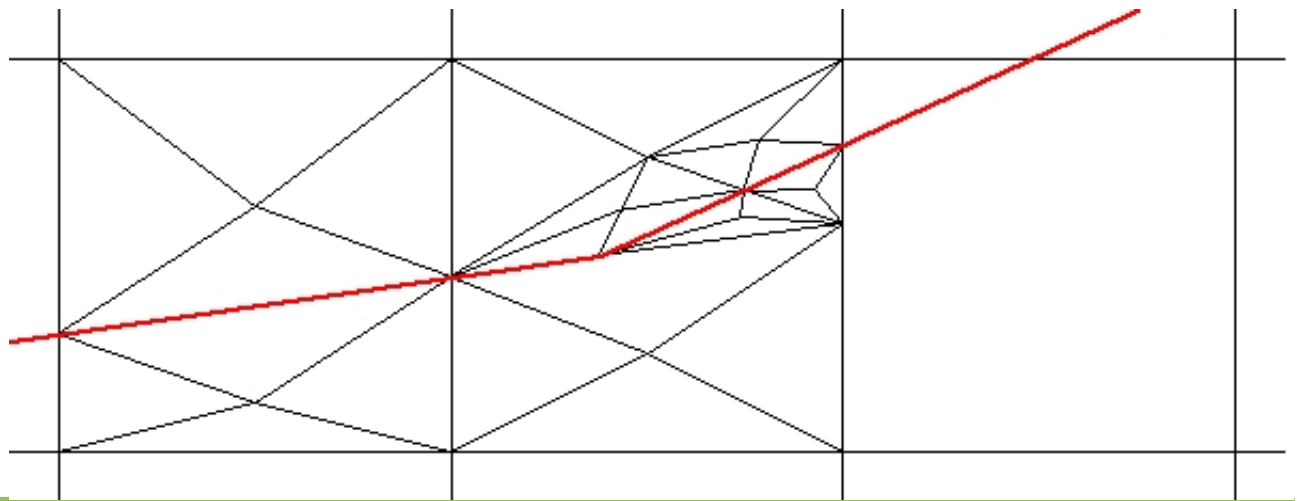
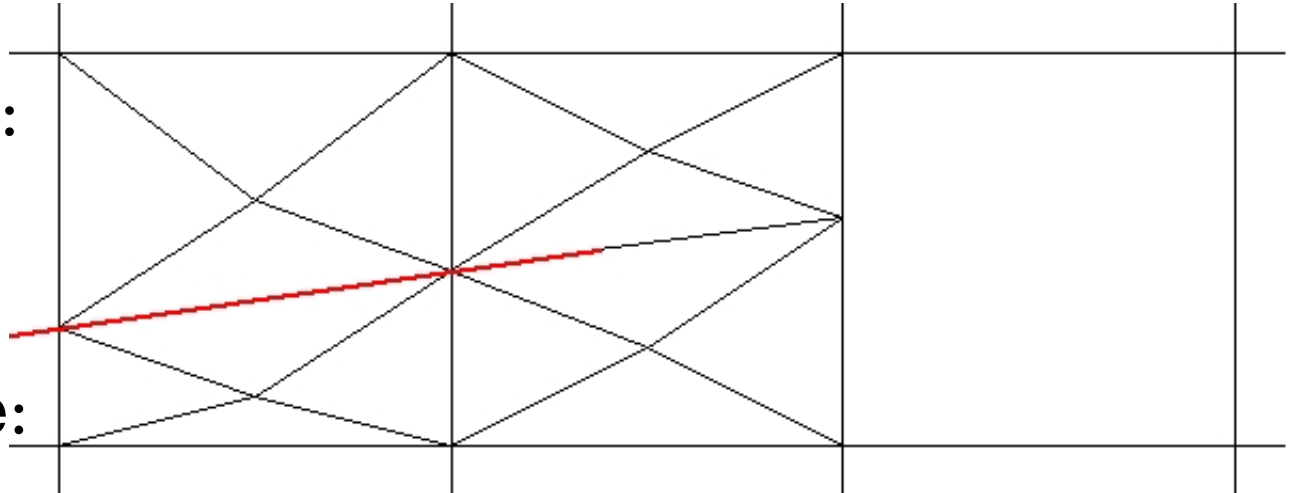
- Fonctions non polynômiales.

Utilisé fréquemment:

- Sous découpage en triangle.

Alternative proposée:

- Sous découpage non conforme.



*T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics", Computer methods in applied mechanics and engineering, 195, 501-515 (2006)*

# X-FEM : Technique d'intégration

Particularité du champ de déplacement:

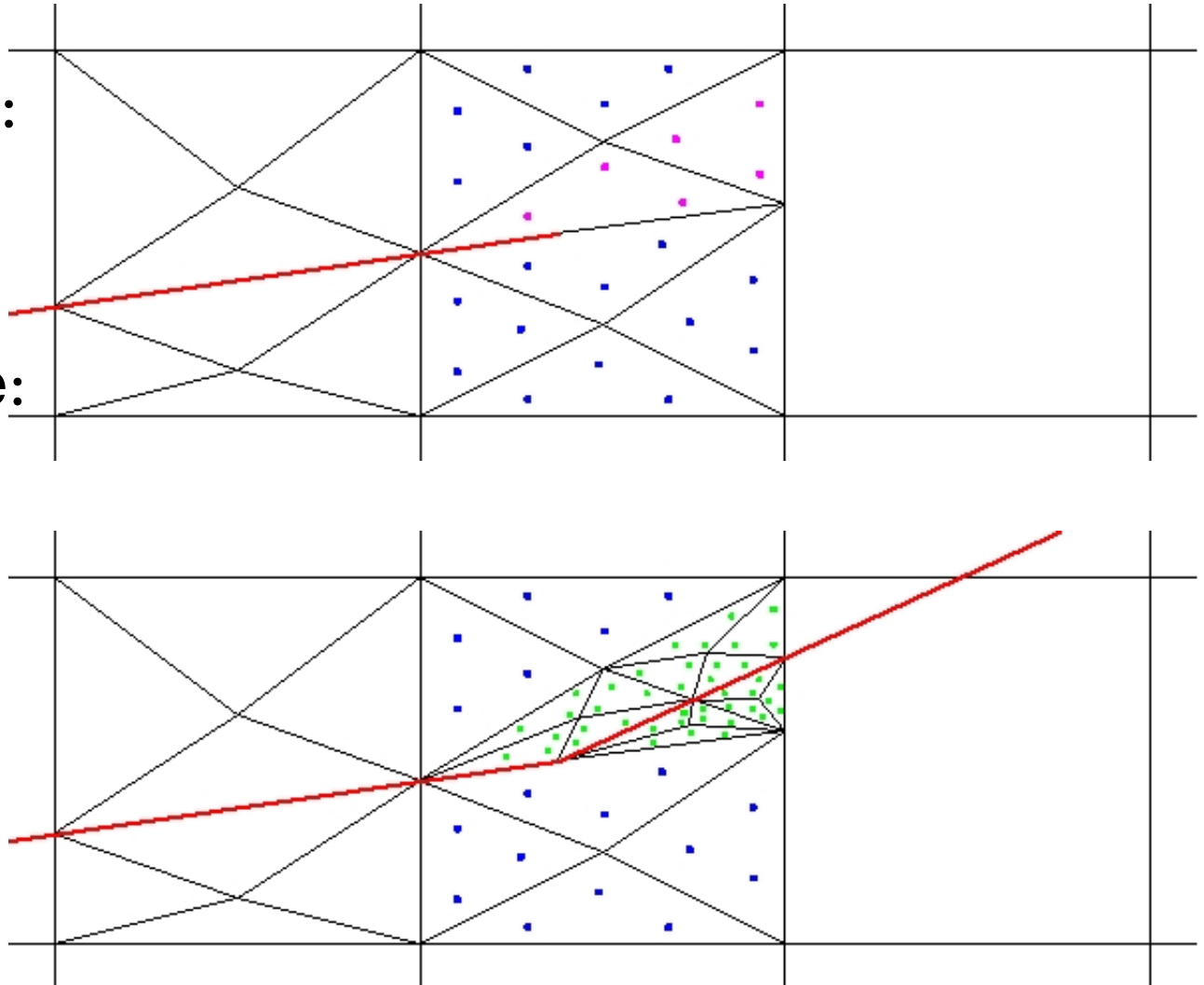
- Fonctions non polynômiales.

Utilisé fréquemment:

- Sous découpage en triangle.

Alternative proposée:

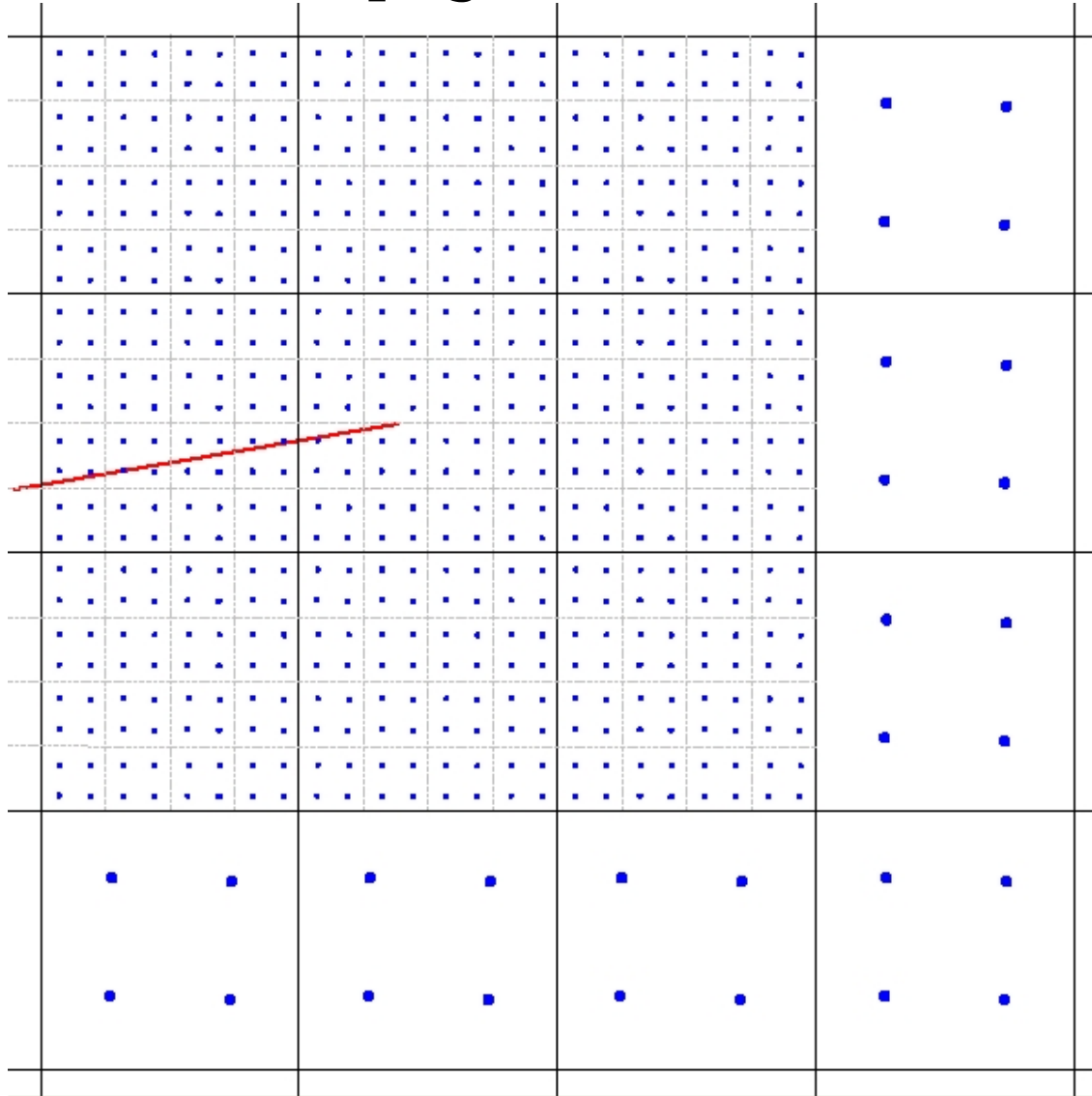
- Sous découpage non conforme.



*T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics", Computer methods in applied mechanics and engineering, 195, 501-515 (2006)*

# X-FEM : Technique d'intégration

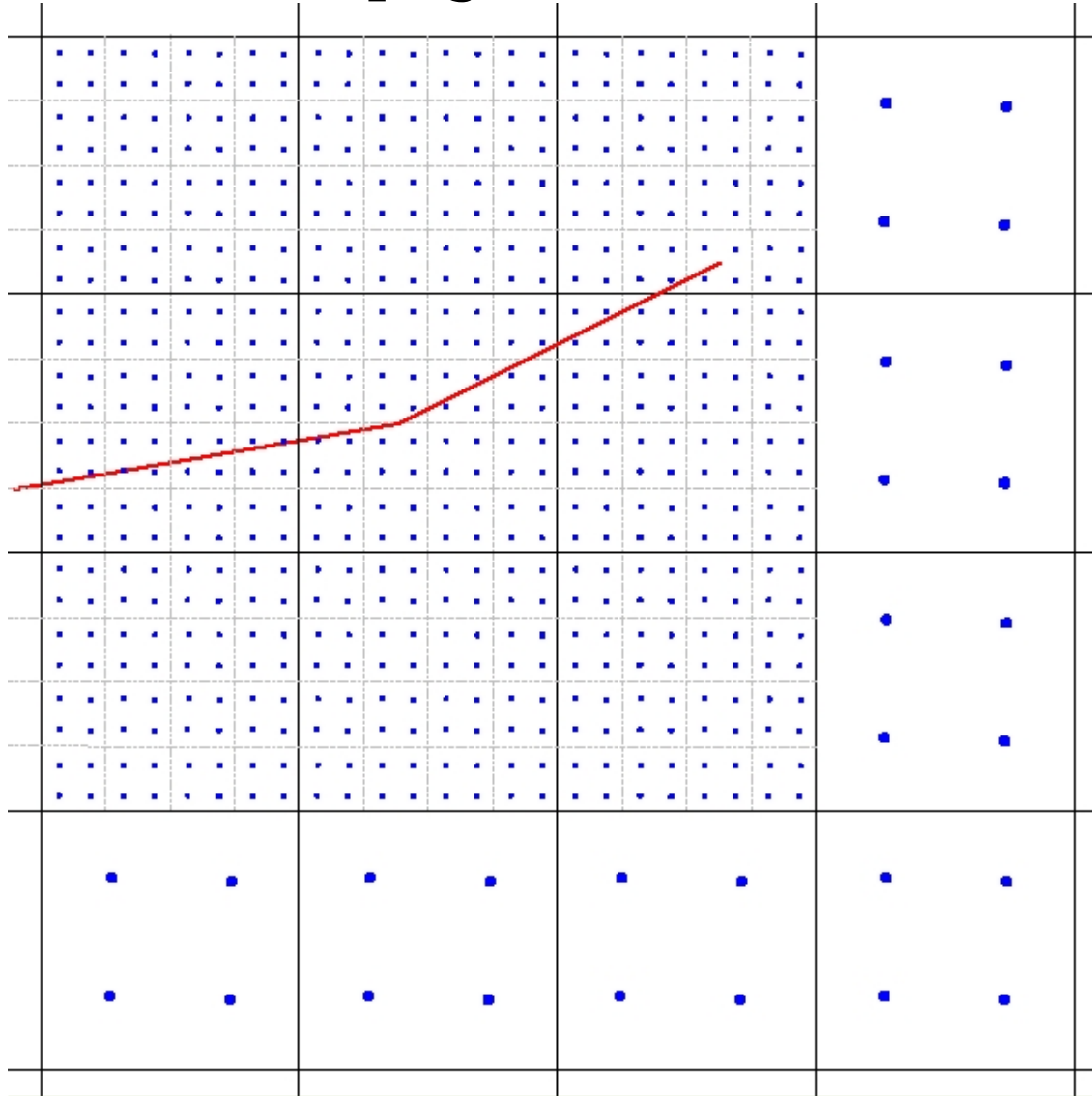
Sous découpage non conforme:



Utilisation d'un grand nombre de points d'intégration (environ 64 en 2D), dont la position est fixe durant la propagation.

# X-FEM : Technique d'intégration

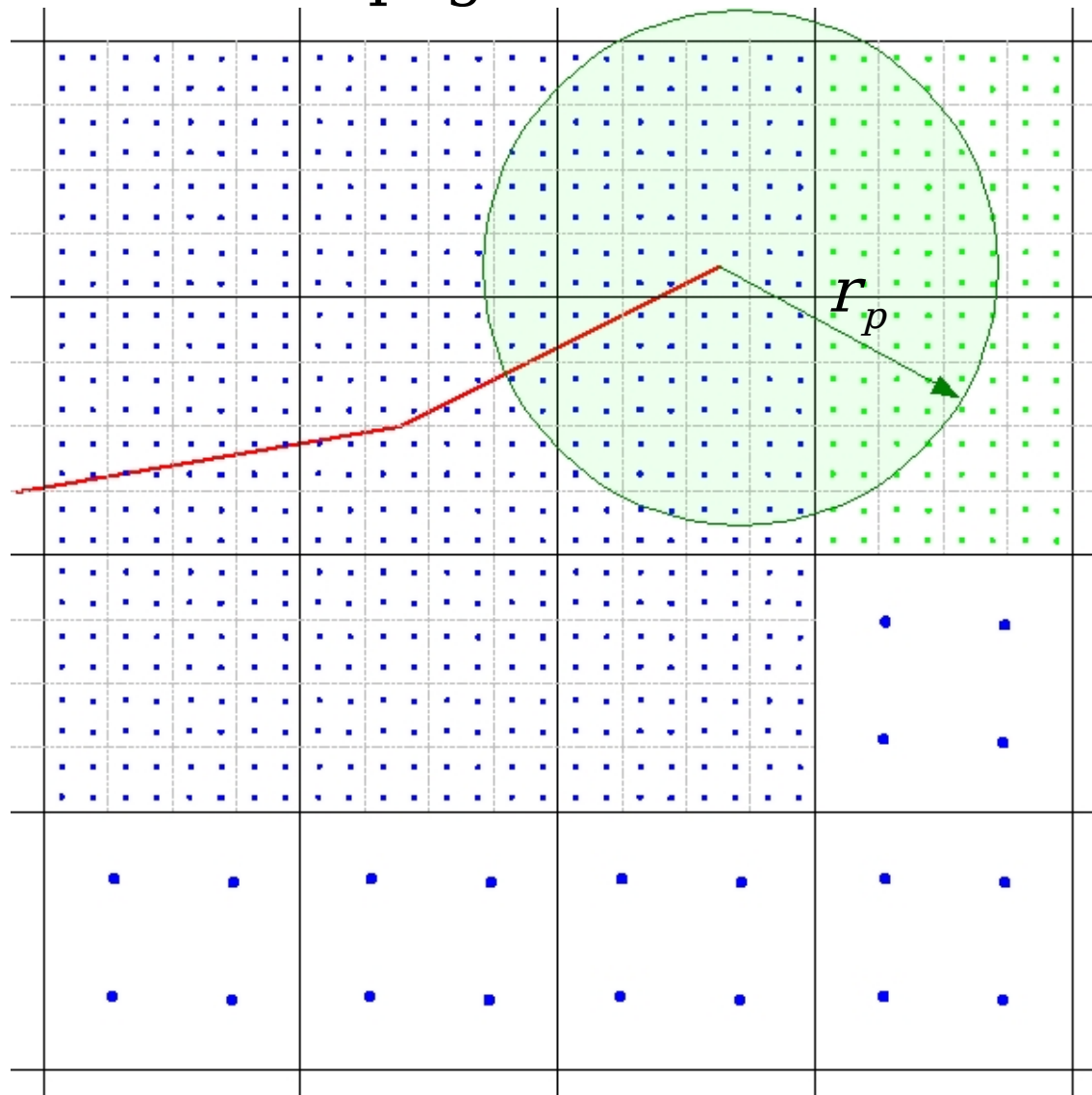
Sous découpage non conforme:



La transition d'un élément à 4 points d'intégration vers un élément à 64 points d'intégration anticipe l'arrivée de la pointe de fissure.

# X-FEM : Technique d'intégration

## Sous découpage non conforme:



Le sous découpage est réalisé dans la zone active en avant du front de fissure (estimée avec  $r_p$ ) car dans la zone élastique, les variables internes sont nulles et les champs à projeter ont un faible gradient.

---

## **III. Méthodes numériques**

1. Représentation de fissure par la méthode des fonctions de niveau (Level Set method)

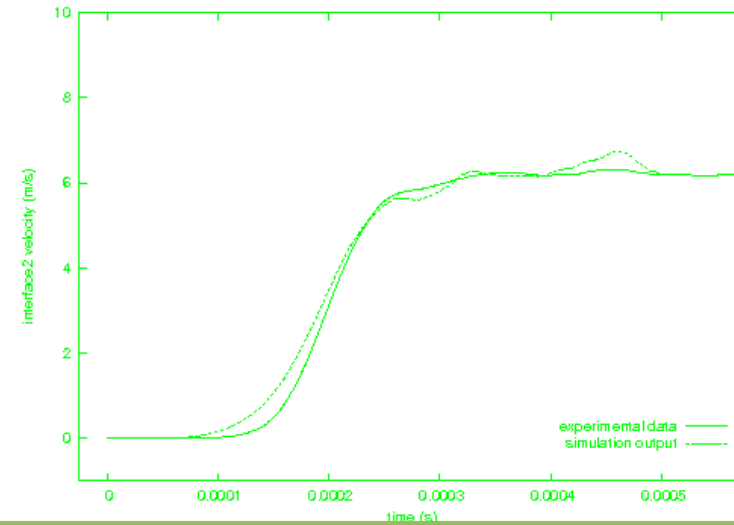
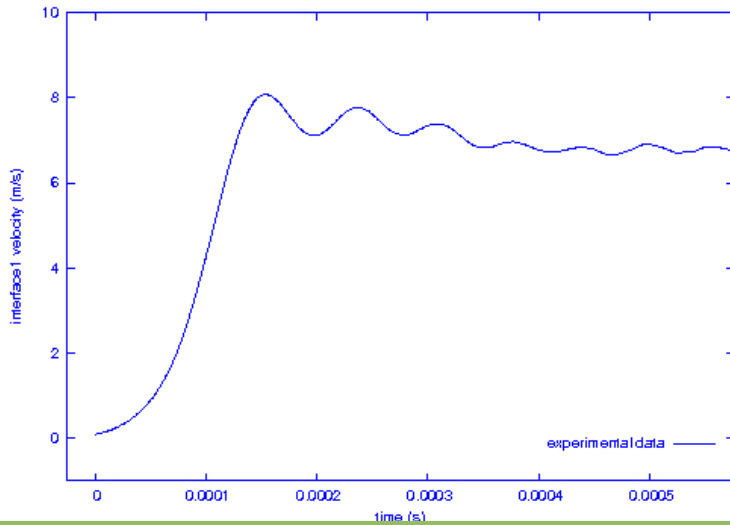
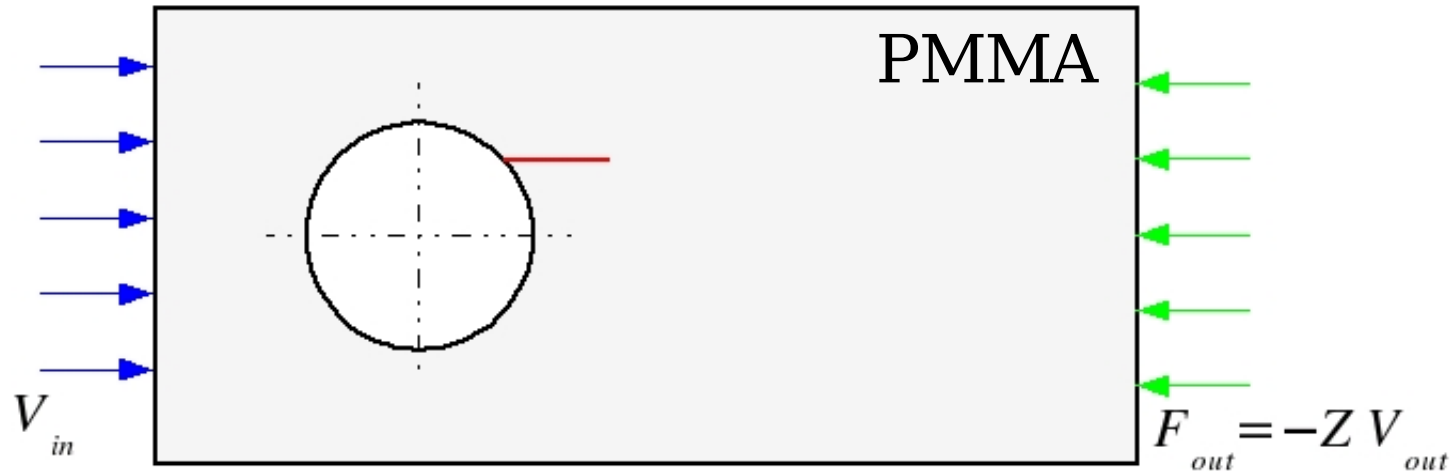
2. Introduction d'un élément fini étendu (X-FEM) dans Cast3m

**3. Validation des méthodes numériques**

# Validation des méthodes numériques

Expériences originales de :

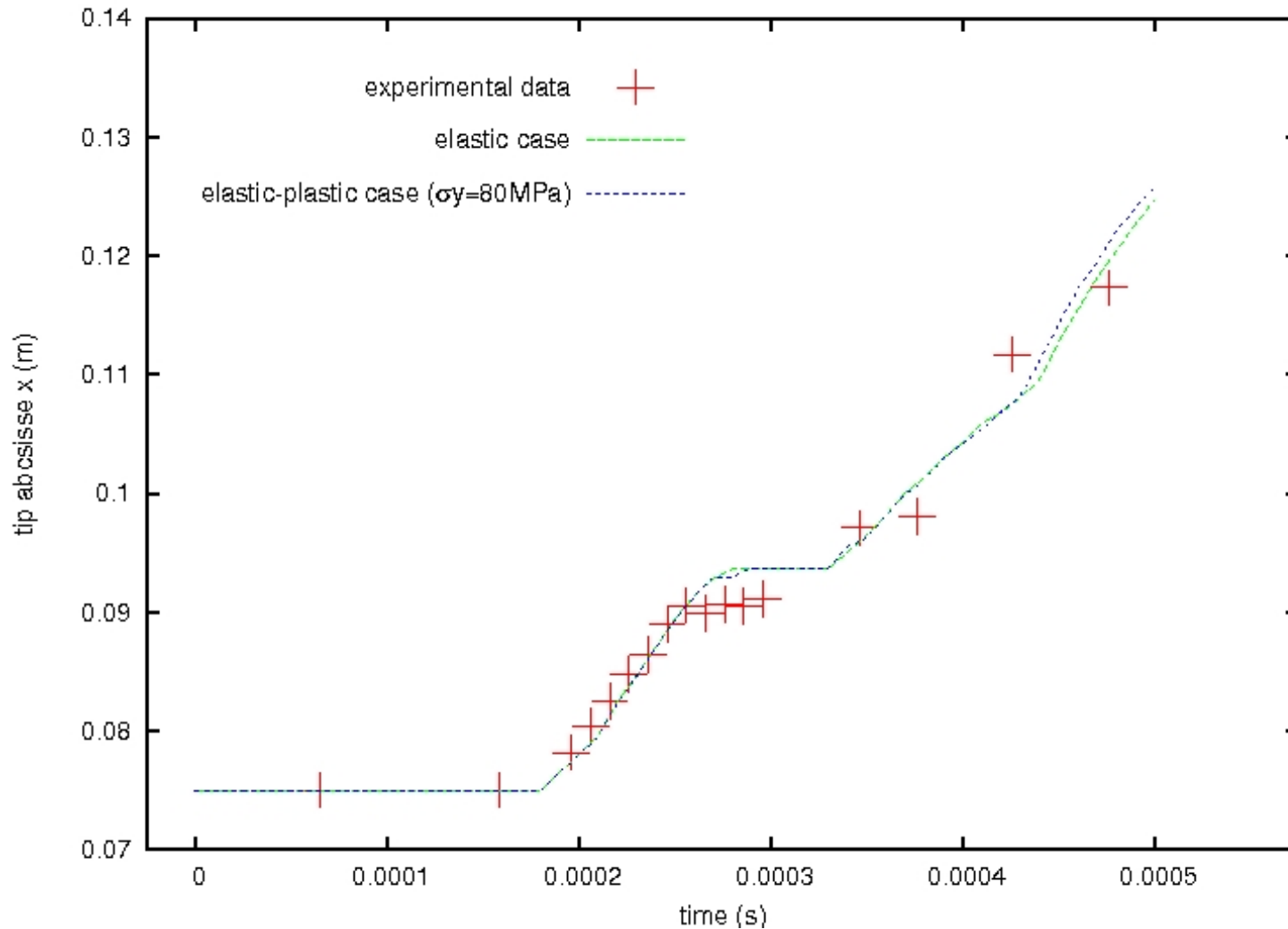
*"D. Gregoire, H. Maigre, J. Rethore. "Dynamic crack propagation under mixed loading - Comparison of experiments with X-FEM simulations". submitted to International Journal of Solids and Structures"*





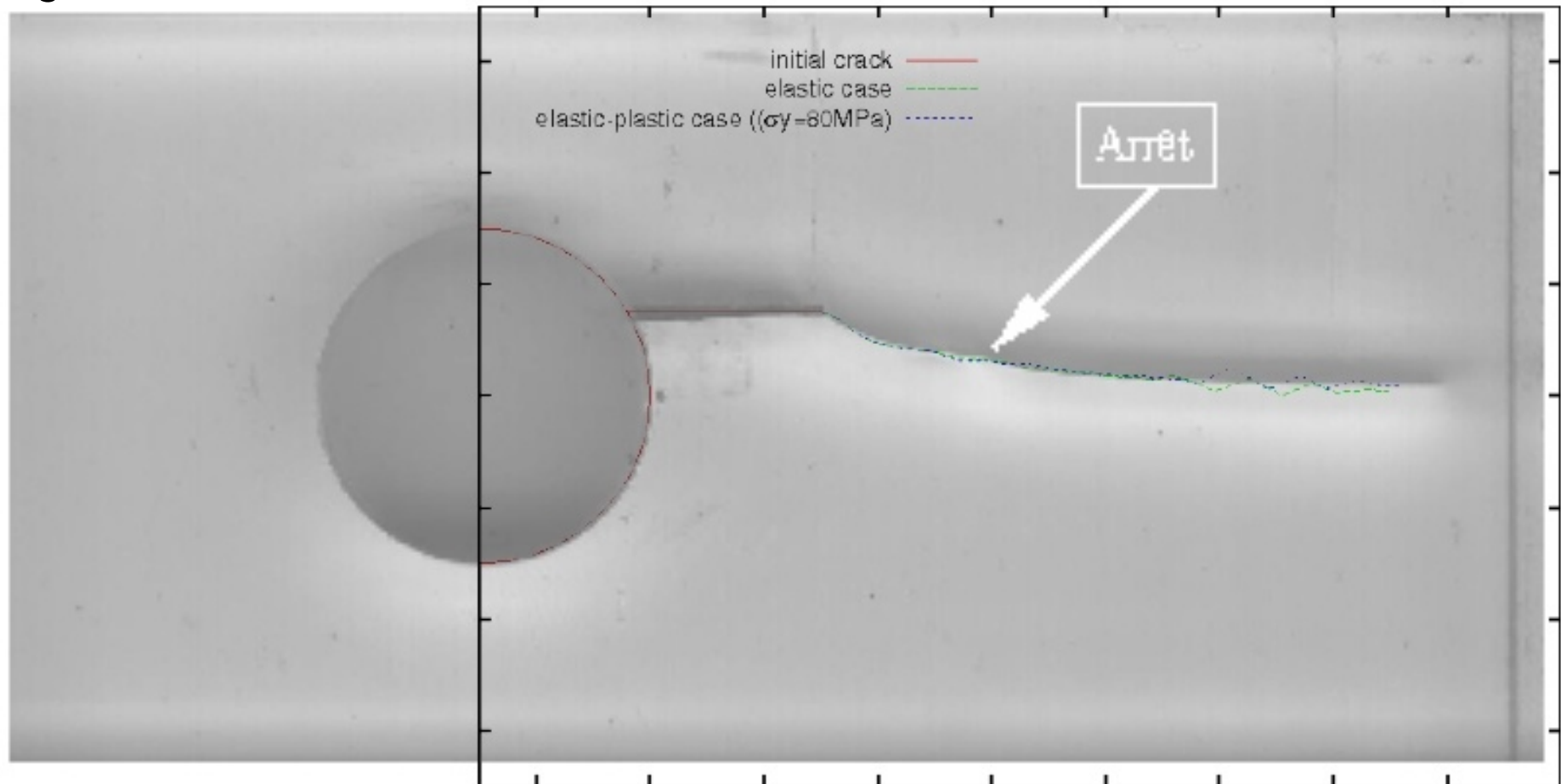
# Validation des méthodes numériques

Evolution de la longueur de fissure avec le temps:



# Validation des méthodes numériques

Trajet de fissure:



*B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, S. Marie, "Level set X-FEM non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media", International Journal of Numerical Method in Engineering, Published Online: 31 Jul 2006.*

---

# Plan :

I. Contexte

II. Modèle mécanique

III. Méthodes numériques

**IV. Support expérimental**

V. Interprétation d'essais

---

## Support expérimental:

Caractérisation de l'acier de cuve 16MND5 en grande vitesse de déformation et à basse température.

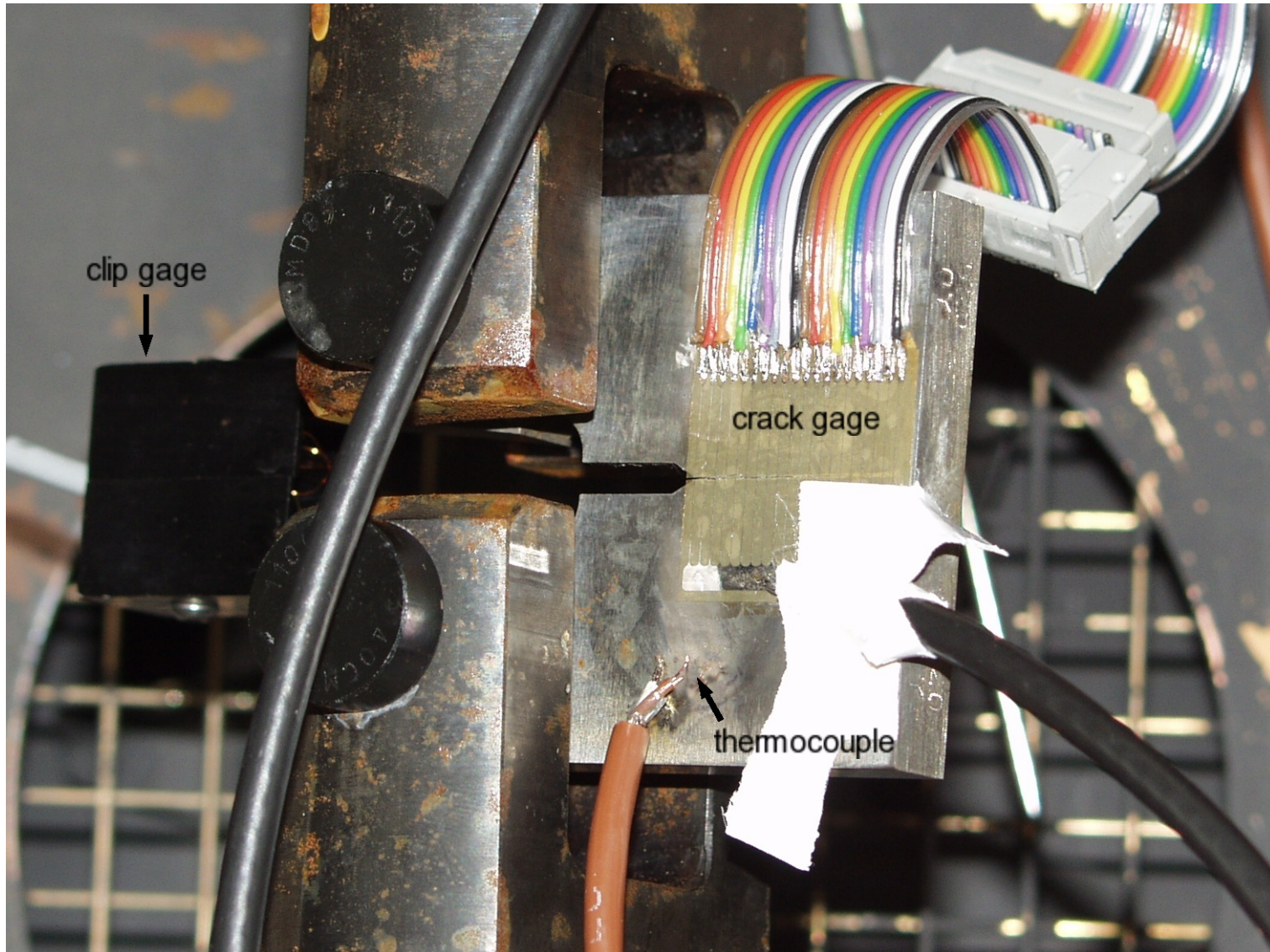
3 types d'essais de rupture fragile :

- Essais isothermes sur CT.
- Essais isothermes sur petits anneaux (chargement uniquement mécanique).
- Essais de choc thermique sur anneaux (avec ou sans précharge mécanique).

Mesures des sollicitations et de la vitesse de propagation.

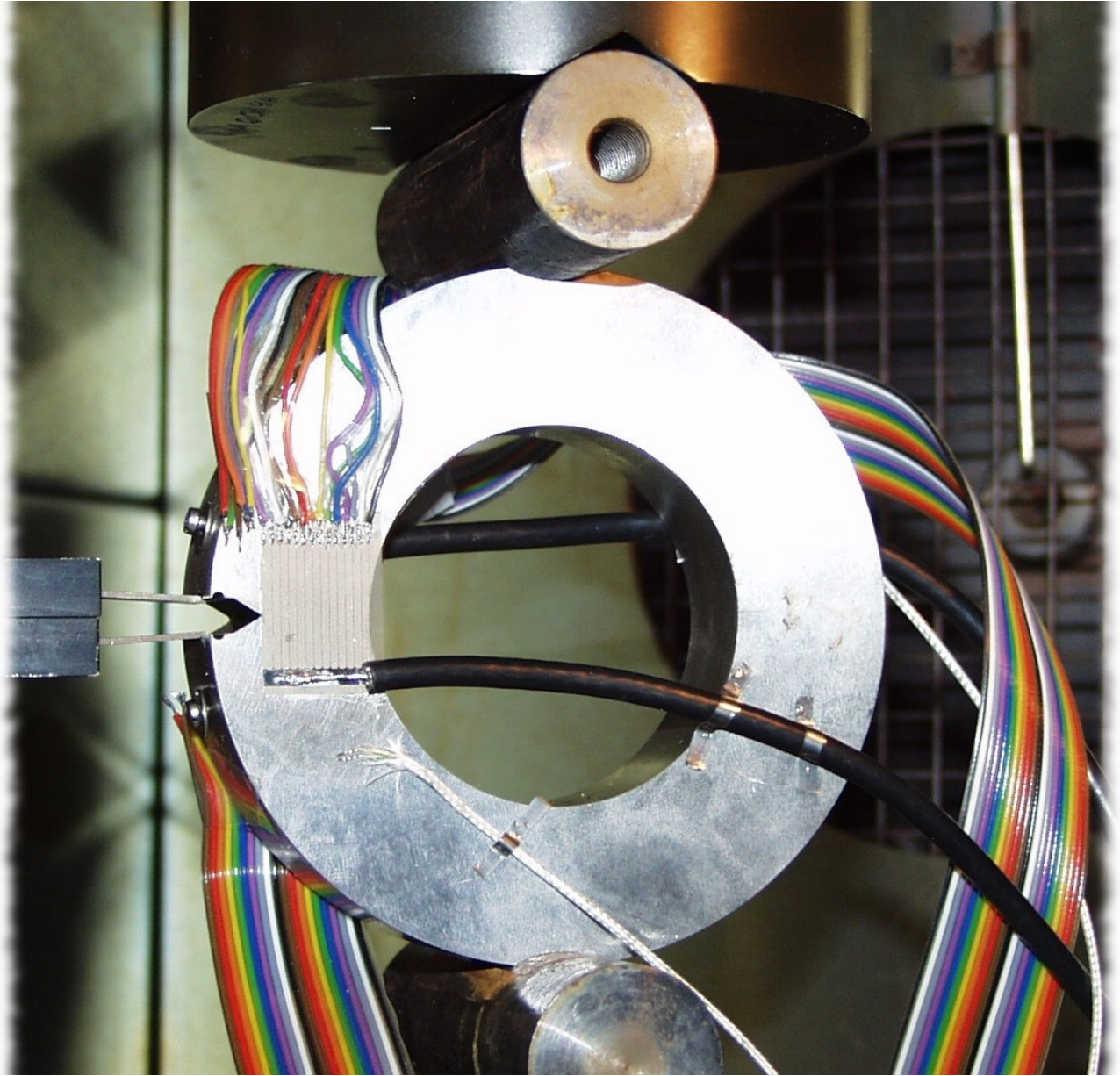
# Support expérimental:

Essais isothermes sur CT:



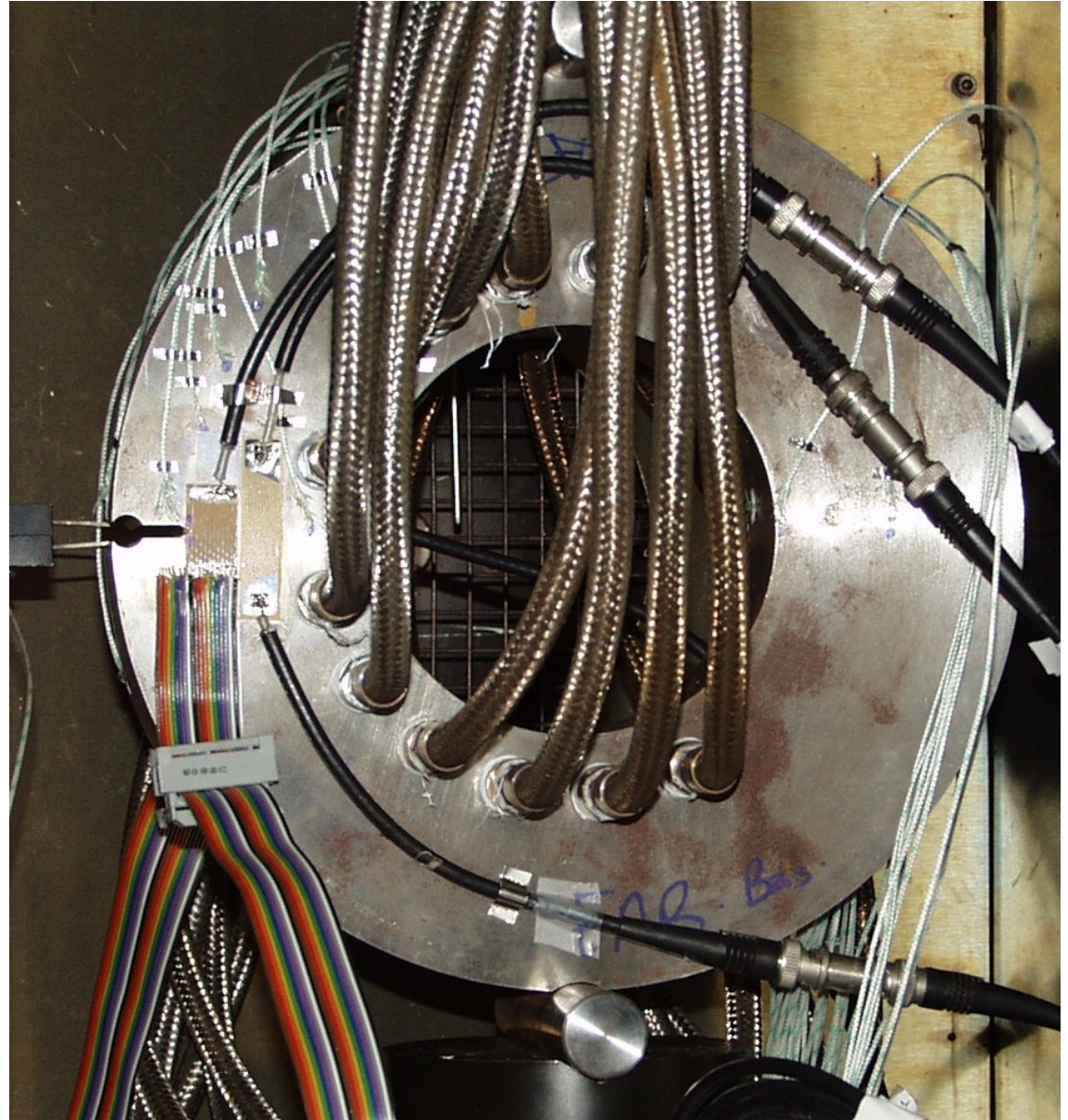
# Support expérimental:

Essais isothermes  
sur anneaux :



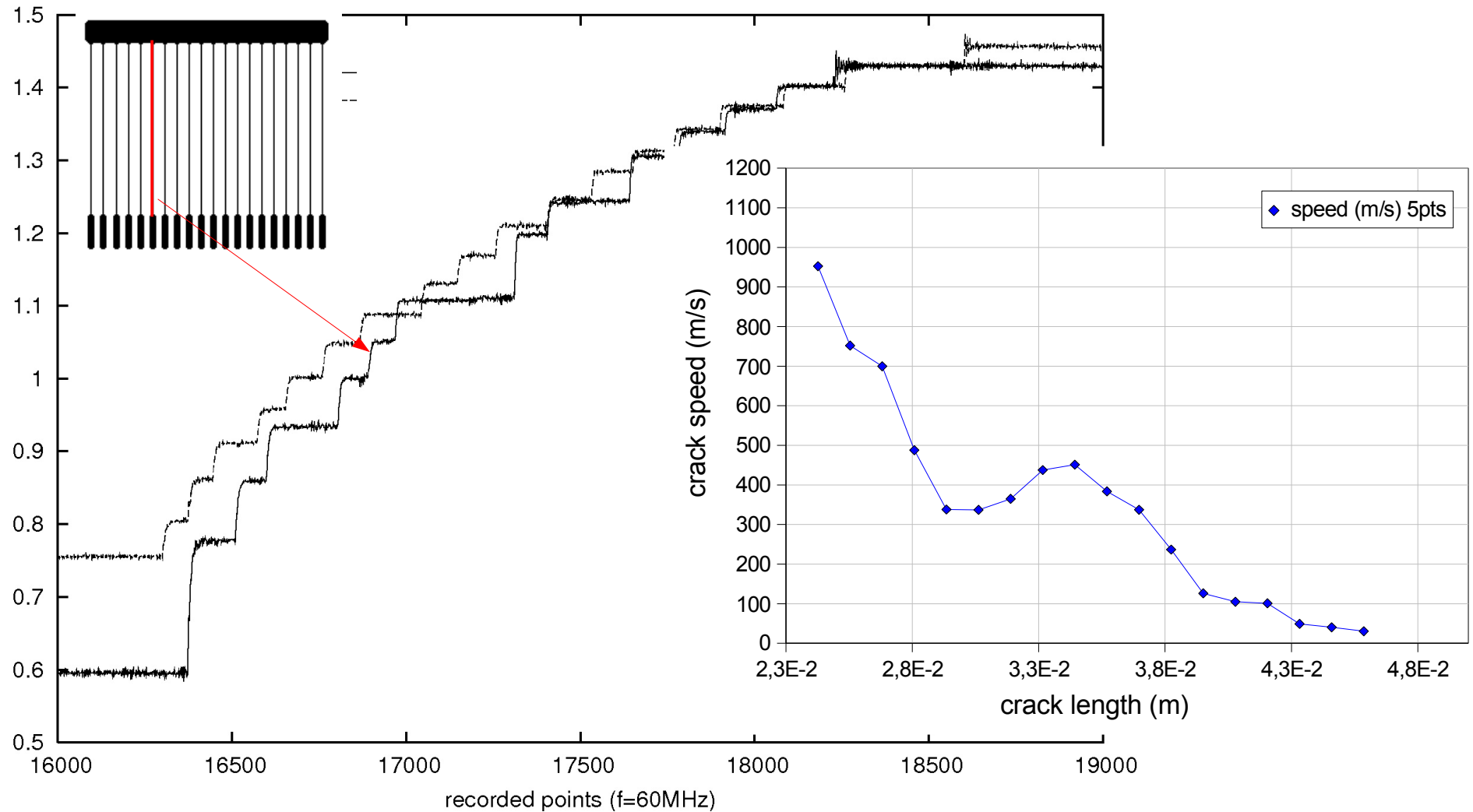
# Support expérimental:

Essais de choc  
thermique  
sur anneau :



# Support expérimental:

Mesure de vitesse de propagation :





---

# Plan :

I. Contexte

II. Modèle mécanique

III. Méthodes numériques

IV. Support expérimental

**V. Interprétation d'essais**

---

# Interprétation d'essais:

## Méthode :

1. Simulation éléments finis des essais sur CT en imposant la vitesse de propagation de la fissure en fonction du temps.

→ Recherche et identification de critères de rupture dynamique pertinents.

2. Calcul prédictif (sur CT et sur anneaux)

→ Comparaison du trajet et de la vitesse de la fissure avec les données expérimentales.

---

# Interprétation d'essais:

## Premiers résultats :

### Analyse des essais sur CT

- Critères globaux (énergétiques):
  - Energie consommée uniquement par l'avancée de la fissure.
- Critères locaux:
  - Clivage piloté par la contrainte principale maximale.

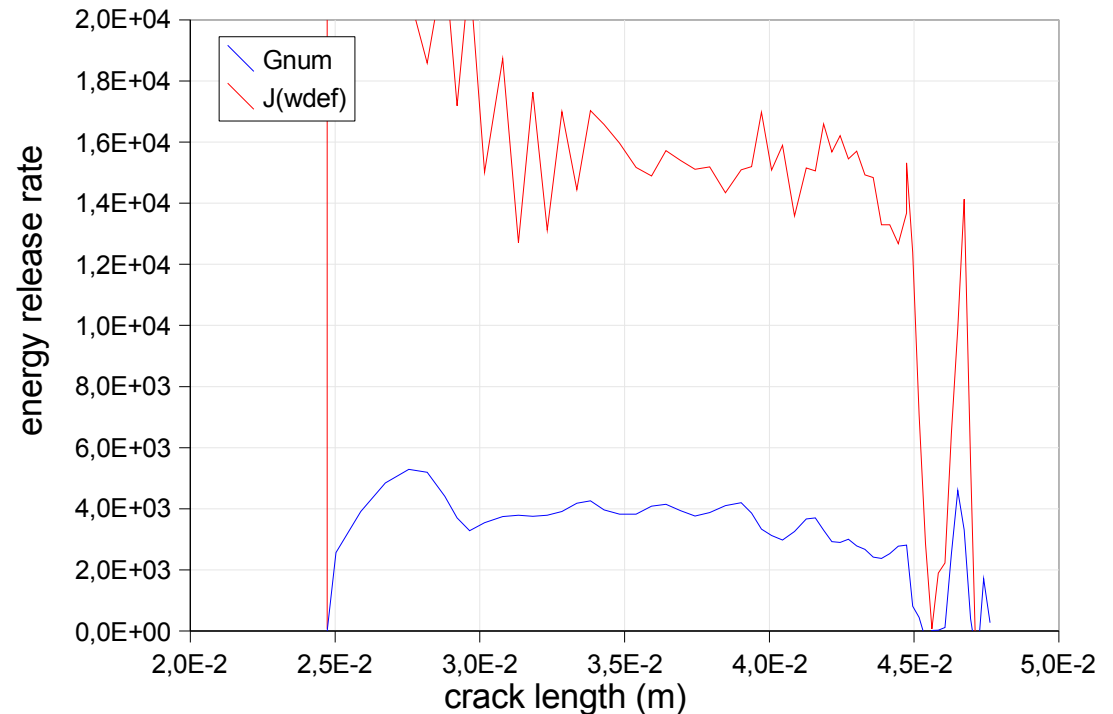
# Interprétation d'essais:

Critère énergétique:

en élasto-dynamique, on a l'égalité :  $G^{\text{tip}} = \frac{\partial W^{\text{dissipée}}}{\partial a} = J = G_{XFEM}^{\text{num}}$

avec la plasticité, l'énergie dissipée se divise en 2 termes:

$$\frac{\partial W^{\text{dissipée}}}{\partial a} = G^{\text{tip}} + G^{\text{plas}} = J$$



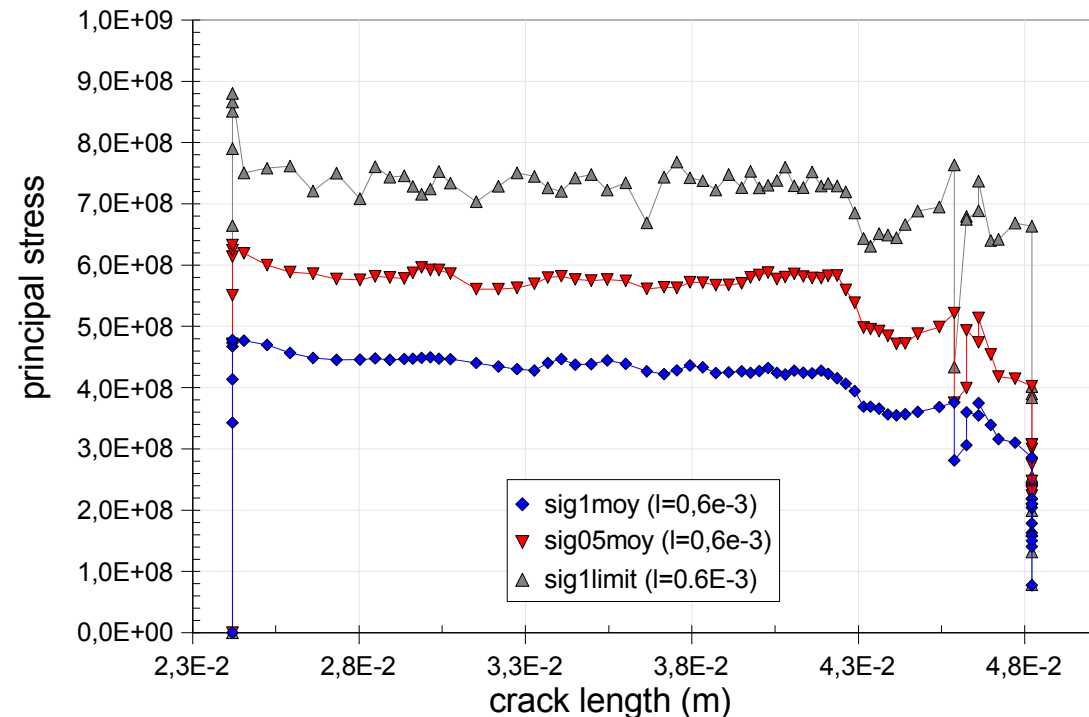
# Interprétation d'essais:

## Critère local:

On suppose le clivage piloté par la contrainte principale maximale.

On moyenne sa valeur sur une zone en pointe de fissure

$$\tilde{\sigma}_I = \int_{\Omega} w \sigma_I$$



---

# Conclusion



---

## Conclusion:

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a été testée dans Cast3m. Elle permet de simuler des propagation arbitraire de fissure sans remailler la structure.

Les techniques suivantes ont été proposées et testées :

- L'introduction d'une grille auxiliaire (distincte du maillage de la structure) pour actualiser les level set de manière simple.
- Une intégration non conforme anticipant l'arrivée de la pointe de fissure pour éviter les projections de champs.

Des essais de rupture fragile ont été réalisés sur différentes géométries.

Leur interprétation doit permettre l'extraction d'un critère de propagation pertinent.

---

**Merci pour votre attention.**





## Mechanical model:

Small perturbations:  $\underline{\underline{\epsilon}} = (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) / 2$

Dynamic equilibrium:  $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \rho \ddot{\underline{\underline{u}}}$

Boundary conditions:  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{F}}_d$  on  $\Gamma_F$   
 $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_d$  on  $\Gamma_u$

Initial conditions:  $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}, 0) = \underline{\underline{u}}_0$   
 $\dot{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{x}}, 0) = \dot{\underline{\underline{u}}}_0$

Constitutive equations:

Classical strain partition:  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^p$

Von Mises yield criteria  
with isotropic hardening:  $f(\underline{\underline{\sigma}}, R) = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{0,5} - R(\epsilon_{eq}^p) = 0$

Associated flow rule:

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^p = d\epsilon_{eq}^p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = d\epsilon_{eq}^p \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{R}$$

---

## Level set:

### Méthode des fonctions de niveau (Level Set method)

Actualisation de l'interface =  
actualisation de la fonction de niveau  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = H(\underline{x}, \phi, \partial \phi)$   
(résolution d'une équation de type Hamilton Jacobi par des méthodes de type différences finies)

#### Avantages :

permet les changements brusque de topologie  
vérifie la condition d'entropie (solution physique en méca fluide)

#### Applications :

image processing, computation geometry, optimization,  
fluid dynamics, ...

---

## Level set:

### Hamilton Jacobi equation:

Les maillages de structures réelles présentent souvent des bords courbes, des trous, ...

Actualisation des fonctions de niveau difficile et peu efficace.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\underline{x}, \psi, \partial \psi)$$

### 2 common solutions:

Use of discontinuous function to model holes.

*N. Sukumar and D.L. Chopp and N. Moës and T. Belytschko, "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 6183-6200 (2001)*

Application of the level set methods to triangulated domain.

*T.J. Barth and J.A. Sethian, "Numerical Schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains", Journal of Computational Physics, 145, 1-40 (1998)*

# Level set update strategy:

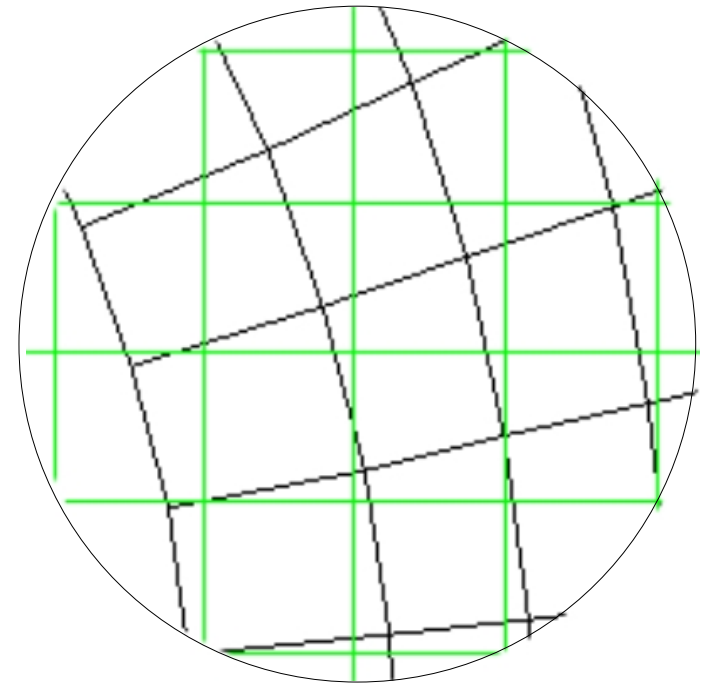
## Scheme:

1. Definition of the velocity field on the auxiliary grid
2. Update the level set functions
3. Projection onto the mechanical mesh

The level set value at the node  $\mathbf{m}$  is given by:

$$\psi(\underline{\mathbf{x}}^m) = \sum_i N_i(\underline{\mathbf{x}}^m) \psi_i$$

where  $\mathbf{i}$  are the nodes of the element containing the node  $\mathbf{m}$ .



---

## Crack growth model:

Calculation of the stress intensity factors with the interaction integral method.

Direction given by the maximum hoop stress criteria.

$$\theta = 2 \operatorname{atan} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \operatorname{sign}(K_{II}) \left[ \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8 \right]^{0,5} \right) \right]$$

Crack speed given by the relation:  $\dot{a} = c_R \left( 1 - K_c / K_{eq} \right)$

---

## Numerical example:

Conclusions about the yield stress effects:

- With  $\sigma_y = 80 \text{ MPa}$  (realistic yield stress), Plasticity is very small and has no impact on the crack growth (= small scale yielding).
- With  $20 \text{ MPa} \leq \sigma_y \leq 40 \text{ MPa}$  , No crack arrest is observed, and plastic zones become larger.
- With  $\sigma_y \leq 15 \text{ MPa}$  , Plasticity becomes the main dissipation source, and the crack speed drops.

# Numerical example:

Equivalent inelastic strain at the end of simulation:

