



Thèse présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Spécialité : Mécanique

par
Arnaud LAZARUS

Influence des défauts sur le comportement vibratoire linéaire des systèmes tournants

Thèse soutenue le 9 décembre 2008 devant la commission d'examen

ANTUNES José	Principal Researcher (ITN, Portugal)	Rapporteur
COMBESCURE Didier	Ingénieur de recherche (CEA Saclay)	Encadrant
DE LANGRE Emmanuel	Professeur (Ecole Polytechnique)	Examinateur
DUFOUR Régis	Professeur (INSA de Lyon)	Rapporteur
EWINS David	Professor (Imperial College, UK)	Examinateur
NGUYEN Quoc Son	Professeur (Ecole Polytechnique)	Directeur de thèse

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Didier Combescure pour m'avoir accueilli puis encadré au CEA afin de me permettre de mener à bien mes travaux. Ces années passées à travailler ensemble ont été pour moi un réel plaisir aussi bien sur le plan professionnel que personnel.

Je remercie également Mr. Quoc Son Nguyen pour la confiance qu'il m'a témoigné et la liberté d'initiative qu'il m'a toujours accordé, ainsi que l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce projet.

La partie expérimentale de cette étude n'aurait pas pu être réalisée sans la participation active de Messieurs Philippe Piteau et Thierry Valin. Je tiens à leur exprimer mes sincères remerciements pour leur patience et pour le temps passé ensemble devant un rotor rectangulaire...

Je remercie également Messieurs José Antunes et Régis Dufour pour avoir accepté la tâche de rapporteur et par là-même pour leurs conseils avisés ainsi que Messieurs Emmanuel de Langre et David Ewins d'avoir fait parti de mon jury.

Je n'oublie pas tous les gens du laboratoire DYN et de ses environs avec qui j'ai passé trois années très agréables. Je pense notamment aux voisins, Marion, Xav et Benoît. Je remercie également mes collègues du LMS en regrettant toutefois de n'y avoir passé que trop peu de temps et je finirai par le commencement en remerciant chaleureusement la joyeuse bande, Juju, Felipe, J-C, Etienne, Mathieu, qui m'ont accompagné tout au long de cette aventure depuis cette belle année de master à Cachan.

Mes derniers remerciements seront pour ma famille. Sans vous, je n'aurai pas écrit les quelques lignes qui vont suivre. Je vous dédie cette thèse.

Résumé

Dans le cas de nombreuses machines tournantes (turboalternateurs, pompes de centrales électriques), les "défauts" (anisotropie de paliers, rotors fissurés...) introduisent naturellement des coefficients périodiques dans l'équation d'équilibre linéaire du modèle discrétisé associé. L'étude du comportement dynamique de l'oscillateur paramétrique obtenu peut alors se faire au moyen d'outils spécifiques tel que la théorie de Floquet, relativement simple à mettre en place, mais dont le traitement numérique s'avère laborieux dans le cas de modèles complexes à grand nombre de degrés de liberté...

En étudiant les solutions de Floquet dans le domaine fréquentiel, on montre que l'on peut étendre le principe d'analyse modale des oscillateurs classiques aux oscillateurs paramétriques. Le concept de modes propres paramétriques est alors introduit et ceux-ci sont étudiés à travers différents exemples académiques. On s'intéresse notamment au comportement dynamique du pendule paramétrique à un degré de liberté gouverné par l'équation de Mathieu, ainsi qu'à différents systèmes tournants à 2 degrés de libertés avec raideurs non axisymétriques (modèles simplifiés de rotors fissurés).

A l'image des modes classiques, les modes paramétriques peuvent être étendus aux systèmes complexes discrétisés par n degrés de liberté grâce aux éléments finis. Cependant, ces modes étant poly-harmoniques, on obtient la base modale du système par synthèse modale où chaque sous-structure est naturellement associée à chaque harmonique. Ces idées sont implémentées dans le logiciel éléments finis Cast3m afin de modéliser, en 3D, le comportement vibratoire d'ensemble d'une machine tournante avec un défaut de forme. L'efficacité de la méthode est alors testée en comparant les résultats numériques et expérimentaux provenant d'un banc d'essai composé d'un rotor dissymétrique en rotation sur un support anisotrope (modèle académique d'un rotor avec fissure ouverte).

Abstract

In the case of many rotating machines (turbomachines, power pump unit...), modelling of "imperfections" such as anisotropic bearings or cracked rotors lead naturally to specific governing equations called linear periodic time-varying systems. Studying the dynamic behavior of parametric oscillators governing by this type of equations is usually simple thanks to the well-known Floquet's theory but can be more difficult for complex model with a lot of degrees of freedom...

By writing the Floquet's solutions in the frequency domain, we extend the modal analysis used for the classical oscillators to the parametric oscillators. The concept of parametric eigenmode is also introduced and described through several academic examples. Thus, the vibratory behavior of the parametric pendulum with one degree of freedom governing by the well-known Mathieu's equation is investigated. In the same manner, various 2 degrees of freedom rotating systems with non symmetrical stiffnesses are studied (simplified models of cracked rotors).

Like classic eigenmodes, parametric ones can be easily adapted to complex systems with n degrees of freedom thanks to the finite element method. However, these modes being poly-harmonic, the modal basis of the whole system is obtained through the component synthesis method where each substructure is naturally associated with each harmonic. These ideas are implemented in the finite element software Cast3m to predict the three-dimensional dynamic behavior of large rotating machines with imperfections. The numerical method efficiency is finally tested by comparing numerical and experimental results coming from a test rig composed of a vertical anisotropic shaft rotating on anisotropic supports (academic model of a horizontal open cracked rotor).

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Introduction	5
1 Rappel sur les oscillateurs mécaniques harmoniques	7
1 Système à 1 degré de liberté	8
1.1 Les oscillations libres	8
1.2 Les oscillations permanentes	9
1.3 Stabilité des systèmes autonomes	11
2 Système à n degrés de liberté : modélisation éléments finis	12
2.1 Transformation de Ritz	13
2.2 Recombinaison modale	13
2.3 Synthèse modale : sous-structuration dynamique de Craig-Bampton	14
3 Comportement vibratoire des systèmes tournants	18
3.1 Etude du système au repos : calcul de la base modale	19
3.2 Oscillations libres en rotation : étude de la stabilité	20
3.3 Régime permanent du système en rotation	21
2 L'influence des défauts ou l'étude des oscillateurs paramétriques	23
1 Brève histoire des oscillateurs paramétriques linéaires	24
1.1 L'équation de Mathieu (1868)	24
1.2 L'équation de Hill (1877)	25
1.3 La théorie de Floquet (1879)	26
2 Cas des oscillateurs paramétriques linéaires tournants	27
2.1 Description du système	27
2.2 Systèmes tournants avec raideurs anisotropes : le défaut de forme	28
2.3 Rotor horizontal fissuré sous poids propre : la fissure respirante	29
2.4 Equation de mouvement dans le cas général	31
3 L'oscillateur paramétrique tournant libre	32
3.1 Equation d'équilibre dans le domaine fréquentiel	32
3.2 Les modes propres paramétriques	34
3.3 Stabilité du système	37
4 Réponse forcée d'un oscillateur paramétrique tournant	43
4.1 La réponse au balourd	43
4.2 Régime permanent sous poids propre	45

5	Remarques	47
5.1	Méthode d'analyse générale des oscillateurs paramétriques	48
5.2	Cas particuliers	49
3	Modélisation 3D : prise en compte du couplage rotor-stator	51
1	Modélisation tridimensionnelle (dans le repère Galiléen)	52
1.1	Equations d'équilibre du rotor dans le repère tournant	53
1.2	Equations d'équilibre du stator dans le repère fixe	53
1.3	Equivalence entre les deux repères	54
1.4	Forme des solutions fondamentales	55
2	Analyse vibratoire par synthèse modale	57
2.1	Conditions de liaison entre sous-structures	57
2.2	Calcul modal par sous-structuration dynamique	61
3	Comportement vibratoire du système libre	63
3.1	Calcul par recombinaison modale	63
3.2	Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes	65
4	Etude du régime permanent	69
4.1	Calcul par recombinaison modale	69
4.2	Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes	71
4	Influence d'un défaut de forme : Approche numérique et expérimentale	75
1	Présentation du banc d'essai	76
1.1	Description de la maquette	76
1.2	Instrumentation	78
1.3	Protocole expérimental	79
2	Cas particulier P_1 : rotor rectangulaire sur palier isotrope	80
2.1	Modélisation éléments finis tridimensionnelle	80
2.2	Résultats expérimentaux	84
2.3	Comparaison essais-calculs	86
3	Cas P_2 : étude des oscillations paramétriques libres	87
3.1	Modélisation éléments finis tridimensionnelle	87
3.2	Résultats expérimentaux	92
3.3	Comparaison essais-calculs	95
	Conclusion	97
A	A propos de l'équation de Mathieu	101
1	Equations différentielles à coefficients périodiques	101
1.1	Stabilité de l'état fondamental	101
1.2	Théorie de Floquet	102
1.3	Equation de mouvement linéarisée	103
2	L'équation de Mathieu	104
2.1	Equation d'équilibre dans le domaine fréquentiel	105
2.2	Les modes propres paramétriques	106
2.3	Stabilité du système	108
2.4	Comportement aux limites de stabilité	112
3	Remarques sur les oscillateurs paramétriques tournants	114

B	Couplage rotor-stator exprimé dans le domaine fréquentiel	119
1	Equivalence entre repère fixe et tournant	120
2	Influence d'un défaut de forme sur le couplage rotor-stator	121
	Bibliographie	125

Table des figures

1.1	Modélisation de l'oscillateur linéaire harmonique à 1 degré de liberté	8
1.2	Vibration libre de l'oscillateur linéaire harmonique à 1 ddl	9
1.3	Fonction de transfert de l'oscillateur linéaire harmonique	10
1.4	Diverses représentations de l'instabilité dynamique pour $\zeta = -0.04$	11
1.5	Modélisation EF d'un système mécanique classique	12
1.6	Représentation schématique de la recombinaison modale	14
1.7	Principe de sous-structuration	15
1.8	Modes utilisés en sous-structuration	16
1.9	Représentation schématique d'une ligne d'arbre avec palier anisotrope	18
1.10	Premier mode propre de l'arbre selon x au temps t	19
1.11	Diagramme de Campbell du système sur base modale ($\zeta_r = 0.025$ et $\zeta_n = 0$)	20
1.12	Carte de stabilité du système dans le domaine (Ω, α_n)	21
1.13	Réponse au balourd de la ligne d'arbre sur base modale ($\alpha_n = 1.5$)	22
2.1	Pendule suspendu à un point mobile	24
2.2	Domaine d'instabilité du pendule dans le plan (δ, ϵ)	25
2.3	Système tournant à 2 ddls non axisymétrique	27
2.4	Rotor avec défaut de forme : oscillateur S_1	28
2.5	Rotor avec fissure respirante : oscillateur S_2	29
2.6	Approximation de $k(\phi)$ en série de Fourier jusqu'à l'ordre S	30
2.7	Modes propres paramétriques du système S_2 pour $\Omega_* = 0.34$ et $j_{conv} = 5$	35
2.8	Solution de l'équation libre de S_2 pour $\Omega_* = 0.34$ et $x(0) = 0.02$	36
2.9	Modes propres paramétriques selon x du système S_1	37
2.10	Diagramme de stabilité du système non amorti pour $j_{max} = 2$	38
2.11	Influence de l'amortissement sur le diagramme de stabilité	39
2.12	Diagramme de Campbell des systèmes non amortis pour $j_{max} = 2$	41
2.13	Influence de l'amortissement fixe ($\zeta_n = 0.025$) sur le diagramme de Campbell	42
2.14	Influence de l'amortissement tournant ($\zeta_r = 0.025$) sur le système S_1	42
2.15	Réponse au balourd du système S_1 non amorti	44
2.16	Evolution de la réponse forcée en fonction de Ω ($\zeta_n = 0.05$)	45
2.17	Réponse sous poids propre du système S_2 non amorti	46
2.18	Représentation en cascade de l'évolution de la réponse sous poids propre ($\zeta_n = 0.025$)	47
2.19	Evolution des fréquences de S_1 dans le cas particulier où $\alpha_n = 1$	49
2.20	Stabilité de S_1 dans le cas particulier où $\alpha_n = 1$	50
3.1	Modélisation éléments finis d'une machine tournante dans le cas général	52
3.2	$\vec{U}'(t)$ en fonction du mode de Fourier considéré pour une demi-période dans \mathbf{R}_n	54

3.3	Modélisation de la machine tournante par sous-structuration	56
3.4	Représentation schématique des conditions de liaison entre sous-structures	57
3.5	Sous-structuration pour le calcul de la base modale	61
3.6	Poutre en rotation avec volant d'inertie sur appuis isotropes	65
3.7	Evolution des fréquences des deux premiers modes de l'arbre dans \mathbf{R}_n	66
3.8	Modes propres d'ensemble du modèle éléments finis tridimensionnel	68
3.9	Réponse du système à un balourd statique	72
3.10	Réponse du système à un balourd dynamique	73
3.11	Influence de la rigidité du volant d'inertie sur la réponse à un balourd dynamique	74
4.1	Présentation du banc d'essai ROTEC	76
4.2	Schémas descriptifs de la maquette	77
4.3	Description de l'instrumentation du banc d'essai	78
4.4	Visualisation des déformées modales du rotor seul au repos	81
4.5	Modes propres du rotor en rotation en régime sous-critique ($\Omega = 60$ Tr/min)	82
4.6	Mode propre du rotor en rotation en régime sur-critique ($\Omega = 2000$ Tr/min)	83
4.7	Diagramme de Campbell du rotor seul dans \mathbf{R}_n obtenu par calculs	84
4.8	Contenu fréquentiel expérimental des oscillations libres du rotor seul	85
4.9	Diagramme de Campbell expérimental	85
4.10	Comparaison essais-calculs du contenu fréquentiel de la réponse à $\Omega = 60$ Tr/min	86
4.11	Comparaison essais-calculs des diagrammes de Campbell dans le domaine sous-critique	87
4.12	Déformées modales en phase de ROTEC au repos	88
4.13	Déformées modales en opposition de phase de ROTEC au repos	89
4.14	Modes propres paramétriques en x pour $\Omega = 480$ Tr/min et $j_{conv} = 2$	90
4.15	Modes propres paramétriques en y pour $\Omega = 480$ Tr/min et $j_{conv} = 2$	91
4.16	Carte de stabilité de ROTEC calculée sur base modale pour $j_{max} = 2$	92
4.17	Contenu fréquentiel expérimental de ROTEC au repos pour $\beta = 0^\circ$	93
4.18	Influence de la rotation sur les fonctions de transfert du capteur dHx	93
4.19	Contenu fréquentiel expérimental de ROTEC en rotation en dBx	94
4.20	Contenu fréquentiel de la réponse transitoire expérimentale à $\Omega = 480$ Tr/min	95
4.21	Contenu fréquentiel des oscillations libres calculées pour $\Omega = 480$ Tr/min	96
A.1	Pendule suspendu à un point mobile	104
A.2	Modes propres paramétriques pour différents couples (δ, ϵ)	107
A.3	Intégration directe de l'équation de Mathieu pour $\theta(0) = 0.1$ rad et $\zeta = 0.02$	108
A.4	Carte de stabilité du pendule dans le plan δ, ϵ avec $\zeta = 0$ et $j_{max} = 4$	109
A.5	Evolution de l'exposant caractéristique en fonction de δ (pour $\epsilon = 1$)	110
A.6	Cartes de stabilité du pendule avec $\zeta = 0.1$ et $j_{max} = 4$	111
A.7	Phénomène de battement de fréquence des modes propres	112
A.8	Mode propre paramétrique aux limites des domaines de stabilité	113
A.9	Cartes de stabilité du système S_2 non amorti pour $j_{max} = 2$	114
A.10	Confusion des fréquences du mode en X pour S_2 ($\Omega_* = 1.7$)	115
A.11	Confusion des fréquences des modes en X et Y pour S_2 ($\Omega_* = 0.3$)	116
A.12	Confusion de fréquences de $z(t)$ pour $\Omega_* = 0.3$ et $x(0) = 0.02$ m	117
B.1	$\vec{U}'(t)$ en fonction du mode de Fourier considéré pour une demi-période dans \mathbf{R}_n	119
B.2	Représentation schématique des degrés de liberté de liaison physiques	120
B.3	Représentation schématique du couplage rotor-stator dans l'espace modal	121

Nomenclature

Rappel sur les oscillateurs mécaniques linéaires harmoniques

c	Amortissement visqueux de l'oscillateur mécanique linéaire
c_n	Amortissement généralisé dans la direction x et y
c_r	Amortissement généralisé dans la direction ξ et η
\mathbb{C}	Matrice d'amortissement associée au champ $\vec{U}(t)$ (\mathbb{C} proportionnel à \mathbb{K})
$\bar{\mathbb{C}}$	Matrice d'amortissement généralisée proportionnelle à $\bar{\mathbb{K}}$ ($\bar{\mathbb{C}} = \Phi^T \mathbb{C} \Phi$)
$F(t)$	Excitation harmonique appliquée à l'oscillateur
$\vec{f}(t)$	Forces volumiques dynamiques appliquées à S
$\vec{F}(t)$	Forces surfaciques dynamiques appliquées aux noeuds de Γ_F
$\bar{\vec{F}}(t)$	Vecteur des forces extérieures sur base modale ($\bar{\vec{F}}(t) = \Phi^T \vec{F}(t) + \Phi^T \vec{f}(t)$)
$H(\Omega)$	Fonction de transfert de l'oscillateur forcé à 1 degré de liberté
$\mathbb{H}(\Omega)$	Matrice de raideur antisymétrique due à l'amortissement tournant
$\bar{\mathbb{H}}(\Omega)$	Matrice de raideur antisymétrique généralisée ($\bar{\mathbb{H}} = \Phi^T \mathbb{H} \Phi$)
i	Unité imaginaire ($i^2 = -1$)
k	Raideur de l'oscillateur mécanique linéaire
k_{nx}, k_{ny}	Raideur généralisée dans la direction x et y
k_0	Raideur généralisée dans la direction ξ et η
\mathbb{K}	Matrice de rigidité associée au champ $\vec{U}(t)$
$\bar{\mathbb{K}}$	Matrice de rigidité généralisée ($\bar{\mathbb{K}} = \Phi^T \mathbb{K} \Phi$)
m	Masse de l'oscillateur mécanique linéaire
\mathbb{M}	Matrice de masse associée au champ $\vec{U}(t)$
$\bar{\mathbb{M}}$	Matrice de masse généralisée ($\bar{\mathbb{M}} = \Phi^T \mathbb{M} \Phi$)
n	Nombre de degrés de liberté du maillage S
\mathbf{R}_n	Repère fixe ou Galiléen ($Oxyz$)
\mathbf{R}_r	Repère tournant non Galiléen ($O\xi\eta z$)
S	Maillage éléments finis de la structure à étudier
S^j	Maillage de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure de S
$\mathcal{T}, \mathcal{T}^j$	Energie cinétique de S et S^j
$\mathcal{U}, \mathcal{U}^j$	Energie de déformation de S et S^j
$\vec{U}(t)$	Champ de déplacements de S au temps t dans \mathbf{R}_n de dimension n
\vec{U}_d	Champ de déplacements des noeuds de Γ_{U_d}
$\vec{U}_i(t)$	Champ de déplacements extrait de $\vec{U}(t)$ au noeud i de S
\vec{U}^j	Champ de déplacements associé au maillage S^j
\vec{U}_i^j	Champ de déplacements associé aux noeuds internes de S^j

\vec{U}_l^j	Champ de déplacements associé aux noeuds de liaison de S^j
$x(t)$	Position de la masse m selon l'axe x au temps t
$x_g(t)$	Réponse de l'oscillateur libre selon l'axe x
$x_p(t)$	Réponse forcée de l'oscillateur selon l'axe x
$y(t)$	Position de la masse m selon l'axe y au temps t
$z(t)$	Notation complexe pour les systèmes tournants ($z(t) = x(t) + iy(t)$)
Z_{pD}	Fonction de transfert de balourd sur l'harmonique Ω
Z_{pR}	Fonction de transfert de balourd sur l'harmonique $-\Omega$
α_n	Degré d'anisotropie du palier ($\alpha_n = \frac{k_{ny}}{k_{nx}}$)
Γ_B	Contour de S où s'applique les conditions de déplacements nuls
Γ_F	Contour de S où s'applique les forces surfaciques
Γ_{Ud}	Contour de S où s'applique les conditions aux limites en déplacement
δ	Raideur moyenne apparente de l'oscillateur tournant ($\delta = \frac{k_{nx} + k_{ny}}{2} + k_0$)
ζ	Amortissement réduit de l'oscillateur ($\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$)
ζ_n	Amortissement réduit fixe ($\zeta_n = \frac{c_n}{2m\omega_{nx}}$)
ζ_r	Amortissement réduit tournant ($\zeta_r = \frac{c_r}{2m\omega_{nx}}$)
$\vec{\eta}$	Degrés de liberté généralisés associés à Φ
$\vec{\eta}^j$	Degrés de liberté généralisés associés à Φ^j
η_i^j	Degrés de liberté généralisés associés à ϕ^j
η_l^j	Degrés de liberté généralisés associés à ψ^j
λ	Vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux sous-structures
Φ	Matrice contenant les vecteurs propres de $\vec{U}(t)$
Φ^j	Base de projection de S^j
ϕ^j	Matrice des vecteurs propres de S^j avec $\vec{U}_l^j = \vec{0}$
ψ^j	Matrice des modes contraints de S^j
ω	Pseudo-pulsation de l'oscillateur amorti
ω_n	Pulsation propre de l'oscillateur à 1 degré de liberté
ω_{nx}	Pulsation propre dans la direction x
ω_{ny}	Pulsation propre dans la direction y
Ω	Vitesse de rotation constante dans le sens direct

L'influence des défauts ou l'étude des oscillateurs paramétriques

$\mathbb{B}(t)$	Matrice de rigidité de période T et de dimension $n \times n$
$\mathbb{C}(t)$	Matrice d'amortissement de période T et de dimension $n \times n$
d	Distance entre le centre de rotation et le centre de gravité G
DSP	Densité Spectrale de Puissance en $[m^2]$
$\vec{F}(t)$	Vecteur des forces extérieures harmoniques de dimension n
g	Accélération de la gravitation locale ($g = 9.81m/s^2$)
G	Position de la masse m
j	Numéro d'harmonique de la solution poly-harmonique $z(t)$
j_{conv}	Ordre de convergence du déterminant de Hill
j_{max}	Ordre de troncature du déterminant de Hill

k_0	Raideur tournante de l'oscillateur sain avec $\Delta_r = 0$
$k_{r1}(t), k_{r2}(t)$	Raideur tournante variable de S_1 et S_2 exprimée dans \mathbf{R}_n
$k_{r\xi}, k_{r\eta}$	Raideur selon la direction ξ et η
n	Nombre de degrés de liberté de l'oscillateur paramétrique
$\vec{q}(t)$	Vecteur des degrés de liberté de l'oscillateur paramétrique de dimension n
s	Numéro du coefficient de Fourier de la série associée à $\mathbb{B}(t)$
S	Ordre de troncature de la série de Fourier de $\mathbb{B}(t)$
S_1	Oscillateur paramétrique modélisant le défaut de forme
S_2	Oscillateur paramétrique modélisant la fissure respirante
$z(t)$	Déplacement complexe de G ($z(t) = x(t) + iy(t)$)
Z_{gDj}, Z_{gRj}	Contribution au mouvement libre sur chaque harmonique j
Z_{pDj}, Z_{pRj}	Fonction de transfert sur chaque harmonique j
T	Période de $\mathbb{B}(t)$ et $\mathbb{C}(t)$ dans le cas général
T_1, T_2	Période de $k_{r1}(t)$ et $k_{r2}(t)$
α_r	Degré d'anisotropie de raideur tournante de S_1 ($\alpha_r = \frac{k_{r\eta}}{k_{r\xi}}$)
Δ_r	Perte de raideur tournante due aux défauts
ϵ_k	Degré de fissuration du système S_2 ($\epsilon_k = \frac{\Delta_r}{k_0}$)
ϵ_s	Coefficient de Fourier de la série associée à $\mathbb{B}(t)$
ω	Valeur propre du déterminant de Hill
ω_{0x}, ω_{0y}	Pulsation propre du système sain selon x et y
ω_x, ω_y	Fréquence fondamentale du mode paramétrique en x et y
$i\omega, -i\bar{\omega}$	Exposant caractéristique de l'équation d'équilibre de l'oscillateur libre

Modélisation 3D : prise en compte du couplage rotor-stator

\mathbb{C}_L	Matrice d'amortissement de l'interface Γ sur le mode de Fourier $n = 1$
$\mathbb{C}_n, \mathbb{C}_r$	Matrice d'amortissement associée aux maillages S et S'
$\vec{F}(t), \vec{F}'(t)$	Vecteur des forces extérieures appliquées à S et S'
$\vec{F}_i(t), \vec{F}'_i(t)$	Vecteur extrait de $\vec{F}(t)$ et $\vec{F}'(t)$ au noeud i de S et S'
\mathbb{G}	Matrice de couplage de Coriolis de S'
\mathbb{G}_{gyro}	Matrice de couplage gyroscopique de l'arbre en rotation
$I\vec{U}^j$	Champ de déplacements en quadrature de phase de S^j
$I\vec{U}'^j$	Champ de déplacements en quadrature de phase de S'^j
k	Ordre de troncature modal
\mathbb{K}_c	Matrice de raideur centrifuge de S'
\mathbb{K}_L	Matrice de rigidité de l'interface Γ sur le mode de Fourier $n = 1$
$\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_r$	Matrice de rigidité associée aux maillages S et S'
\mathbb{K}_σ	Matrice de précontrainte de S' due aux forces centrifuges
L^{max}	Matrice de couplage exprimant les conditions de liaison entre sous-structures
m	Nombre de degrés de liberté du maillage S'
$\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_r$	Matrice de masse associée aux maillages S et S'
n	Nombre de degrés de liberté du maillage S

n_1	Coefficient de Fourier sur lequel se projète $\vec{U}'(t)$
n_2	Coefficient de Fourier sur lequel se projète le défaut de forme
$\mathbb{R}(\Omega t)$	Matrice de changement de repère entre \mathbf{R}_r et \mathbf{R}_n
S, S'	Maillage éléments finis de la partie fixe et tournante
S^j, S'^j	Maillage de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure de S et S'
$\vec{U}(t)$	Champ de déplacements de S au temps t dans \mathbf{R}_n de dimension n
$\vec{U}'(t)$	Champ de déplacements de S' au temps t dans \mathbf{R}_r de dimension m
$\vec{U}_i(t)$	Champ de déplacements extrait de $\vec{U}(t)$ au noeud i de S
$\vec{U}'_i(t)$	Champ de déplacements extrait de $\vec{U}'(t)$ au noeud i de S'
$\vec{U}_L(t)$	Champ de déplacements de Γ au temps t dans \mathbf{R}_n
$\vec{U}'_L(t)$	Champ de déplacements de Γ' au temps t dans \mathbf{R}_r
\vec{U}^j	Champ de déplacements en phase de S^j
\vec{U}'^j	Champ de déplacements en phase de S'^j
\vec{U}_g^Ω	Mode paramétrique du système $S \cup S'$ à la fréquence de rotation Ω
\vec{U}_p^Ω	Réponse forcée du système $S \cup S'$ à la fréquence de rotation Ω
Γ, Γ'	Contour de S et S' où s'appliquent les interactions rotor-stator
Γ^j, Γ'^j	Maillage de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure de Γ et Γ'
λ, λ'	Fréquence fondamentale de $\vec{U}(t)$ et $\vec{U}'(t)$ dans \mathbf{R}_n et \mathbf{R}_r
Φ	Base modale du système $S \cup S'$ au repos calculée classiquement (chapitre 1)
Φ_{ss}	Base modale du système $S \cup S'$ au repos calculée par sous-structuration
ω, ω'	Fréquence fondamentale de \vec{U}_g^Ω exprimée dans \mathbf{R}_n et \mathbf{R}_r

Influence d'un défaut de forme : Approche numérique et expérimentale

dBx, dBy	Capteur à courant de Foucault sur la masse du rotor selon x et y
dHx, dHy	Capteur à courant de Foucault sur la plate-forme du stator selon x et y
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence en [m/N]
P_1	Cas particulier où la plate-forme du banc d'essai est fixe (rotor seul)
P_2	Cas général où la plate-forme est libre (couplage rotor-stator)
ROTEC	Banc d'essai où le ROTor est RECTangulaire
β	Positionnement angulaire de la poutre tournante au repos
ω_x, ω_y	Fréquence propre du mode de poutre au repos du cas P_1 selon x et y
ω_{1x}, ω_{1y}	Fréquence propre du premier mode de poutre au repos du cas P_2 selon x et y
ω_{2x}, ω_{2y}	Fréquence propre du second mode de poutre au repos du cas P_2 selon x et y

Introduction

Les machines tournantes jouent un rôle majeur dans le domaine industriel, le secteur de l'énergie n'échappe donc pas à la règle. Ainsi, en raison des puissances mises en jeu, les turboalternateurs ainsi que les pompes des centrales de production électrique nécessitent une attention toute particulière. Il est bien connu que les défauts de répartition de masse créent des forces de balourd qui peuvent générer des contraintes élevées dans les machines ou des déplacements différentiels de palier trop importants. Une autre crainte réside dans l'instabilité du rotor à certaines vitesses de rotation sous l'effet notamment de son amortissement propre ou de la présence de fissures. Dans la plupart des cas industriels, les modélisations classiques des bureaux d'études négligent l'influence des défauts (fissuration de rotors, défaut de forme, inclinaison des volants d'inertie...) sur le comportement vibratoire d'ensemble des machines tournantes pour la simple et bonne raison que ces imperfections n'interviennent effectivement pas dans le dimensionnement de ces systèmes. Dans les cas particuliers où il ne sont plus négligeables (détection des fissures, équilibrage précis des machines, compromission de la durée de vie...), il est nécessaire de s'interroger sur les phénomènes physiques mis en jeu. Ce document tente de répondre à ces interrogations en proposant une méthode numérique permettant de prédire l'influence des défauts sur le comportement vibratoire linéaire d'ensemble d'une machine tournante.

Afin de familiariser le lecteur avec les concepts relatifs au comportement vibratoire d'ensemble d'une machine tournante, on donne, dans un premier temps, une vision globale sur les oscillateurs mécaniques harmoniques [Rocard, 1971]. Les oscillations des systèmes seront considérées suffisamment petites de façon à conserver la linéarité des équations du mouvement autour de la position d'équilibre considérée (hypothèse vérifiée tout au long de l'ouvrage). Ainsi, après un bref rappel sur l'oscillateur linéaire à un degré de liberté (vibrations libres, stabilité, régime permanent), on présente le cadre général de la méthode des éléments finis permettant de modéliser le comportement vibratoire des cas réels. Notamment, on étudiera nos systèmes sur base modale (calculée de façon classique ou par sous-structuration) de façon à maintenir des temps de calculs raisonnables en accord avec les attentes industrielles. Enfin, on aborde la modélisation classique du comportement vibratoire d'ensemble des machines tournantes. Les oscillations libres et permanentes ainsi que la stabilité du système sont calculées sur base modale. On considèrera dans ce document la rotation des machines constante, ce qui exclut de la discussion la modélisation de l'accélération ou de décélération du rotor.

Dans la seconde partie de ce travail de thèse, on explique l'influence des défauts sur le comportement vibratoire des systèmes à travers deux oscillateurs linéaires tournants à deux degrés de liberté. On étudie d'une part, l'influence d'une anisotropie de raideur fixe et tournante (c'est le cas S_1 du défaut de forme ou de la fissure ouverte [Lee et al., 2007]) et d'autre part, l'influence d'une raideur variable dans le repère tournant (c'est le cas S_2 d'une fissure respirante [Han, 2007, Gasch, 2008]). Que ce soit par le couplage rotor-stator (cas S_1), ou par l'évolution physique du système (cas S_2), on sait que

l'étude de ces systèmes est équivalent à l'analyse vibratoire des oscillateurs paramétriques linéaires qui ont pour principale caractéristique de posséder une équation différentielle à coefficients périodiques pour équation de mouvement. La résolution de ce type d'équation, et donc l'étude dynamique de ce type d'oscillateurs, est possible grâce aux nombreux travaux mathématiques développés à la fin du XIX^{ème} siècle (théorie de Floquet, déterminant de Hill, convergence de Poincaré sur les déterminants infinis). En adaptant ces travaux et en s'inspirant des oscillateurs linéaires classiques, on donne une méthode numérique simple et rigoureuse permettant de déterminer le comportement vibratoire des oscillateurs paramétriques simplifiés (ce qui inclut les systèmes tournants avec ou sans défauts) dans le domaine fréquentiel. Notamment, on introduit dans ce chapitre le concept de mode propre linéaire paramétrique à l'image du mode propre classique de l'oscillateur harmonique.

Pour modéliser les cas réels où les machines tournantes peuvent être complexes, on étend la méthode numérique précédente aux systèmes tournants à n degrés de liberté. On choisit pour ce faire une modélisation tridimensionnelle par la méthode des éléments finis afin de représenter la plus grande gamme de géométries et de défauts possibles. On se focalise sur la modélisation du couplage rotor-stator de façon à modéliser le comportement vibratoire d'ensemble (oscillations libres, stabilité, régime permanent) des machines tournantes (à savoir l'ensemble formé par le rotor et le stator) avec ou sans défaut de forme. Dans un souci d'optimisation du temps de calcul et pour réutiliser le concept de mode propre paramétrique sur un oscillateur à n degrés de liberté, nos systèmes sont projetés sur base modale. Etant donnée la forme naturelle de la solution vibratoire recherchée, on calcule cette base au moyen d'une méthode de sous-structuration dans le domaine fréquentiel. La pertinence de la modélisation tridimensionnelle est démontrée à travers le premier exemple numérique de l'étude du comportement vibratoire d'un arbre muni d'un volant d'inertie souple.

Pour finir, on illustre l'effet de défauts sur le comportement vibratoire d'une machine tournante en analysant le comportement dynamique d'un banc d'essai assemblé au CEA de Saclay. La maquette consiste en une poutre rectangulaire verticale en rotation dans une plate-forme rigide, elle-même supportée par quatre colonnettes rectangulaires. Le but de cette expérience est de mettre en évidence les oscillations paramétriques du système tournant sous l'influence du couplage rotor-stator. On étudie expérimentalement deux configurations différentes. D'une part, le cas particulier P_1 où la plate-forme est bloquée ; d'autre part, le cas général P_2 où elle est libre de se déplacer. La réponse transitoire du banc en rotation est alors comparée à la modélisation éléments finis des oscillations libres du modèle associé afin de valider les outils numériques mis en place précédemment.

Ce document retranscrit les travaux réalisés au cours de cette thèse dans un ordre chronologique. Le premier chapitre est un travail bibliographique qui permet au lecteur de découvrir (ou de redécouvrir) progressivement le domaine des oscillations linéaires classiques. C'est dans cette partie que la plupart des notations rencontrées au cours de l'ouvrage sont introduites. Le second chapitre est le plus important, les concepts liés à la résolution numérique des oscillateurs paramétriques y sont abordés pour la première fois (notion de modes paramétriques notamment). L'extension aux systèmes à n degrés de liberté découle directement de ces concepts ; la difficulté du troisième chapitre réside donc surtout dans leur mise en oeuvre à l'intérieur du code éléments finis Cast3m (code interne) et à l'adaptation du couplage rotor-stator à la modélisation tridimensionnelle (la difficulté aurait été moindre avec des éléments de poutre). Enfin, la dernière partie enrichit la thèse d'une partie expérimentale afin d'illustrer concrètement les phénomènes physiques abordés précédemment.

Chapitre 1

Rappel sur les oscillateurs mécaniques harmoniques

Ce premier chapitre est un rappel sur la modélisation du comportement vibratoire des oscillateurs mécaniques linéaires harmoniques [Lalanne et al., 1986]. Après l'étude des systèmes à 1 degré de liberté, on donne la démarche adoptée pour résoudre les systèmes à n degrés de liberté par la méthode des éléments finis afin de s'intéresser, en dernier lieu, au cas particulier du comportement vibratoire linéaire des machines tournantes. Les bases élémentaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants sont posées et permettent au lecteur de se familiariser avec les notations utilisées dans la suite du document.

Sommaire

1	Système à 1 degré de liberté	8
1.1	Les oscillations libres	8
1.2	Les oscillations permanentes	9
1.3	Stabilité des systèmes autonomes	11
2	Système à n degrés de liberté : modélisation éléments finis	12
2.1	Transformation de Ritz	13
2.2	Recombinaison modale	13
2.3	Synthèse modale : sous-structuration dynamique de Craig-Bampton	14
3	Comportement vibratoire des systèmes tournants	18
3.1	Etude du système au repos : calcul de la base modale	19
3.2	Oscillations libres en rotation : étude de la stabilité	20
3.3	Régime permanent du système en rotation	21

1 Système à 1 degré de liberté

L'oscillateur mécanique linéaire à 1 degré de liberté [Weaver et al., 1990] est le plus simple que l'on puisse rencontrer (système masse-ressort-amortisseur de la figure 1.1).

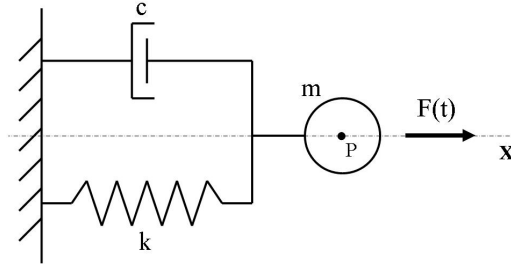


Figure 1.1: Modélisation de l'oscillateur linéaire harmonique à 1 degré de liberté

En considérant que le déplacement $x(t)$ est petit sous l'effet du chargement harmonique $F(t)$, l'équation d'équilibre dynamique de la masse m au point P s'écrit

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \Omega t. \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) étant linéaire, la réponse du système est la somme

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t). \quad (1.2)$$

- D'une part, $x_g(t)$ est la réponse transitoire du système. C'est la solution de l'équation homogénéisée associée à l'équation (1.1) et donc la réponse vibratoire du système libre.
- D'autre part, $x_p(t)$ est la réponse permanente ou forcée. Solution (équilibre dynamique) de l'équation complète (1.1), c'est une oscillation en régime stationnaire (ou régime permanent) à la fréquence Ω .

1.1 Les oscillations libres

Les vibrations libres sont les vibrations du système qui apparaissent sans aucun chargement extérieur $F(t)$ qui entreprendrait le mouvement [Axisa, 2001a]. Sur l'oscillateur de la figure 1.1, l'équation d'équilibre du système non amorti s'écrit

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (1.3)$$

C'est l'équation d'un mouvement harmonique de pulsation naturelle (en rad/s) :

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.4)$$

La solution générale de l'équation (ou mode propre) est alors de la forme

$$x_g(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t = X_g e^{i(\omega_n t + \phi)} \quad (1.5)$$

Si on applique les conditions initiales en déplacement et en vitesse $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, les vibrations libres du système sont données par (1.5) avec $A = x_0$ et $B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$.

Dans le cas du système amorti et en se limitant au cas de l'amortissement visqueux (les forces d'amortissement sont proportionnelles à $\dot{x}(t)$), l'équation d'équilibre s'écrit

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (1.6)$$

L'amortissement est dit critique lorsque le déterminant de l'équation caractéristique associée à (1.6) est nul ; on a alors $c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$. En introduisant le coefficient d'amortissement réduit $\zeta = \frac{c}{c_c}$, l'équation de mouvement de l'oscillateur amorti peut s'écrire

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (1.7)$$

On se limite ici à un amortissement sous-critique $\zeta < 1$ pour exclure de notre étude les mouvements apériodiques. Dans ce cas, les oscillations sont amorties de pseudo-pulsation $\omega_a = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

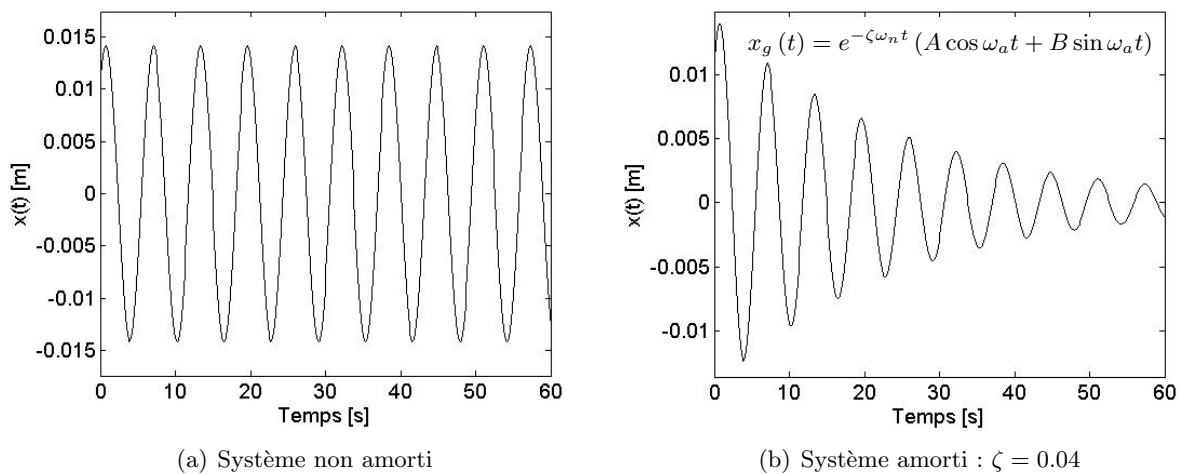


Figure 1.2: Vibration libre de l'oscillateur linéaire harmonique à 1 ddl

Exemple : Afin d'illustrer les résultats cités, les petits oscillateurs abordés seront étudiés à l'aide du logiciel MATLAB. Les données numériques de l'oscillateur de la figure 1.1 sont $k = 1$ N/m, $m = 1$ kg. Les conditions initiales choisies sont $x(0) = x_0 = 0.01$ m et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0.01$ m/s. On trace sur la figure 1.2 les vibrations libres du système avec ou sans amortissement.

1.2 Les oscillations permanentes

Dans les analyses vibratoires, la réponse harmonique est généralement déterminée en étudiant le système dans le domaine fréquentiel [Clough and Penzien, 1993]. En réécrivant l'équilibre dynamique (1.1) sous la forme

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 e^{i\Omega t}, \quad (1.8)$$

on peut écrire la réponse sous la forme $x_p(t) = \mathbf{H}(\Omega) \frac{F_0}{k} e^{i\Omega t}$ avec

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{m\Omega^2}{k} + i\frac{\Omega c}{k}} = \frac{1}{(1 - \Omega_*^2) + i2\zeta\Omega_*} \quad \text{où } \Omega_* = \frac{\Omega}{\omega_n}. \quad (1.9)$$

$H(\Omega)$ est la fonction de transfert du système en amplitude et en phase. C'est la fonction de réponse en fréquence (FRF) :

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega_*^2)^2 + (2\zeta\Omega_*)^2}} \quad \text{et} \quad \Phi = \arg(H(\Omega)) = \arctan\left(\frac{2\zeta\Omega_*}{1 - \Omega_*^2}\right). \quad (1.10)$$

La résonance est alors le maximum de l'amplitude de la réponse lorsque Ω varie. On note Ω_c la fréquence critique de résonance où l'on vérifie

$$\Omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{et} \quad |H(\Omega)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (1.11)$$

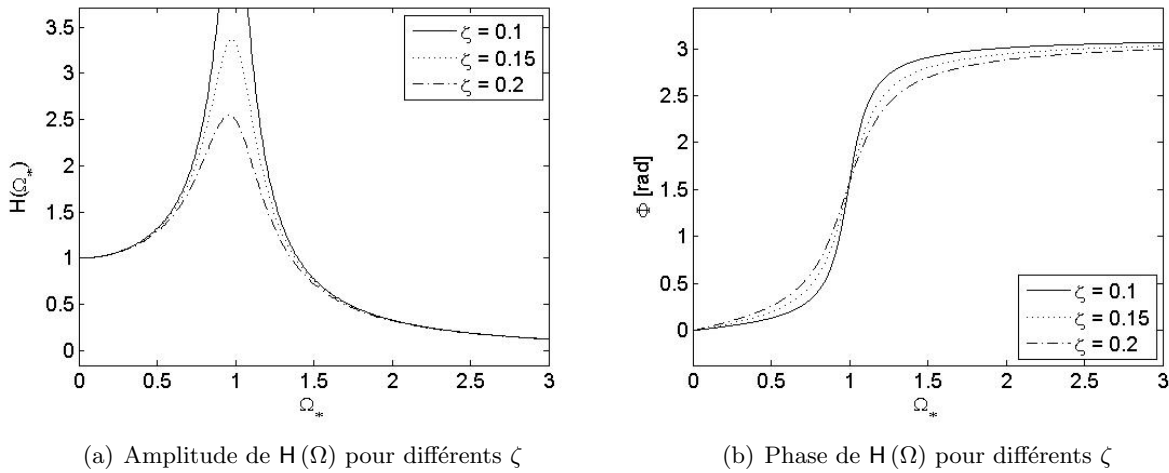


Figure 1.3: Fonction de transfert de l'oscillateur linéaire harmonique

On trace sur la figure 1.3 l'amplitude et la phase de la fonction de transfert adimensionnelle de l'oscillateur linéaire de la figure 1.1 pour différentes valeurs d'amortissement réduit ζ afin d'illustrer les résultats énoncés précédemment. La réponse et l'excitation sont en phase ($\Phi \rightarrow 0^\circ$) dans le domaine sous-critique et en opposition de phase ($\Phi \rightarrow 180^\circ$) en régime sur-critique (figure 1.3.b). A la résonance, la réponse et l'excitation sont en quadrature de phase, seul l'amortissement limite les vibrations.

Remarque :

- La fonction de transfert d'une impulsion $F(t)$ de durée très faible devant la période de vibration du système nous ramène à un problème de vibration libre à vitesse initiale imposée. Cette propriété remarquable est utilisée dans le domaine expérimental pour étudier le régime transitoire et donc les fréquences propres d'un système réel [Gibert, 1988].

1.3 Stabilité des systèmes autonomes

La stabilité de l'oscillateur figure 1.1 est déterminée par la stabilité de sa réponse transitoire. Il existe une évolution dynamique $x_g(t) = x_e$ qui vérifie l'équation d'équilibre amorti (1.7) pour tout t , c'est la position d'équilibre. x_e est stable si une petite perturbation des données initiales n'entraîne qu'une faible évolution dynamique autour de l'équilibre [Nguyen, 2000]. D'une façon plus précise, on introduit une mesure $x^*(t)$ de l'écart entre l'équilibre étudié et l'évolution perturbée

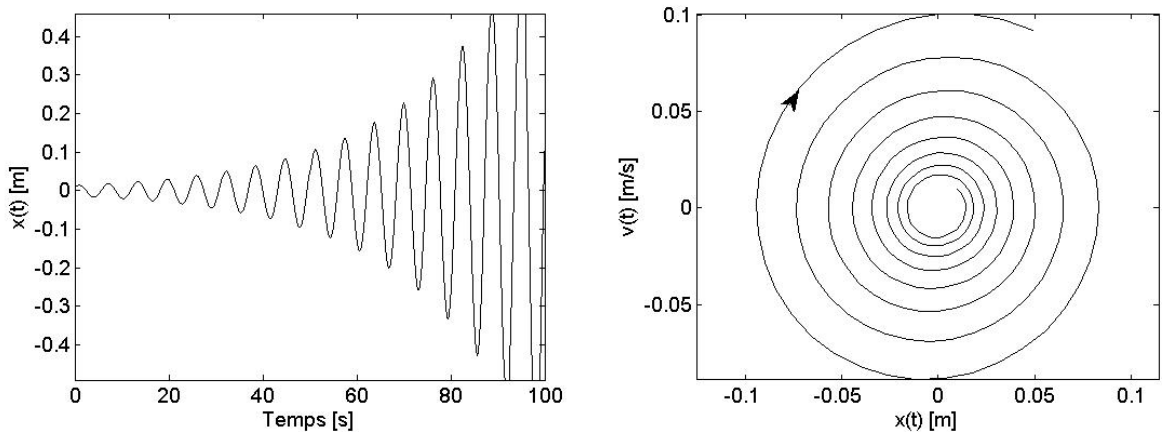
$$x^*(t) = \|x_g(t) - x_e\| \tag{1.12}$$

pour donner la définition de stabilité de l'équilibre sous la forme

$$x_e \text{ stable} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ il existe } \alpha \text{ tel que } x^*(0) < \alpha \Rightarrow x^*(t) < \epsilon \quad \forall t > 0. \tag{1.13}$$

On dit aussi qu'un équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et si les petites évolutions perturbées vérifient en plus

$$x^*(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \tag{1.14}$$



(a) Instabilité du régime transitoire $x_g(t)$ (b) Instabilité par flottement dans l'espace d'état

Figure 1.4: Diverses représentations de l'instabilité dynamique pour $\zeta = -0.04$

Le fait que les évolutions perturbées doivent rester dans un petit voisinage de l'équilibre x_e suggère l'étude de l'équation d'évolution linéarisée autour de l'équilibre. Dans le cas des systèmes mécaniques, on linéarise directement l'équation de mouvement de l'oscillateur libre amorti

$$\ddot{x}^*(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}^*(t) + \omega_n^2x^*(t) = 0. \tag{1.15}$$

En posant $x^*(t) = X^*e^{i\omega t}$, on obtient l'équation caractéristique de l'équation (1.15) (identique à (1.7))

$$-\omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2 = 0. \tag{1.16}$$

On peut alors trouver les fréquences propres ω en fonction de ζ

$$\omega_{1,2} = \omega_n \left(i\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (1.17)$$

qui permettent d'énoncer le théorème de Liapunov [Nguyen, 1995] qui donne l'allure des mouvements perturbés $x_g(t)$ lorsque ces mouvements sont proches de l'équilibre (petits déplacements) :

- Si $\Im(\omega_i) > 0$, les petits mouvements perturbés tendent vers l'équilibre car la stabilité est asymptotique.
- Si $\Im(\omega_i) < 0$ et $\Re(\omega_i) \neq 0$, le mouvement autour de l'équilibre est un mouvement oscillant d'amplitude croissante d'une façon exponentielle. On dit par définition qu'il y a *instabilité par flottement* (ou instabilité dynamique [de Langre, 2001]).
- Si $\Im(\omega_i) < 0$ et $\Re(\omega_i) = 0$ le mouvement perturbé va croître d'une façon franche, on dit qu'il y a instabilité par divergence (ou instabilité statique).

On montre sur la figure 1.4 le mouvement perturbé $x_g(t)$ de l'oscillateur figure 1.1 lorsque l'amortissement choisi est négatif ($\zeta = -0.04$) : c'est l'instabilité dynamique. Il est courant de représenter cette instabilité dans l'espace d'état (x, \dot{x}) (figure 1.4.b).

Remarques :

- Seul l'instabilité dynamique sera abordée dans cet ouvrage.
- C'est la pulsation ω qui est utilisée pour déterminer la stabilité du système et pas l'exposant caractéristique $s = i\omega$. Par ce choix, la partie réelle de ω nous donne les pulsations de l'oscillateur libre, la partie imaginaire nous renseigne sur l'amortissement et la stabilité.
- La théorie de la stabilité utilisée est écrite au premier ordre et ne nous permet pas de suivre le déplacement de façon exacte une fois l'instabilité amorcée (théorie des bifurcations [Nguyen, 1995]).

2 Système à n degrés de liberté : modélisation éléments finis

On donne figure 1.5 le maillage éléments finis d'une structure S classique (fixe dans le repère Galiléen) discrétisée par n degrés de liberté [Hughes, 1987, Batoz and Dhatt, 1990].

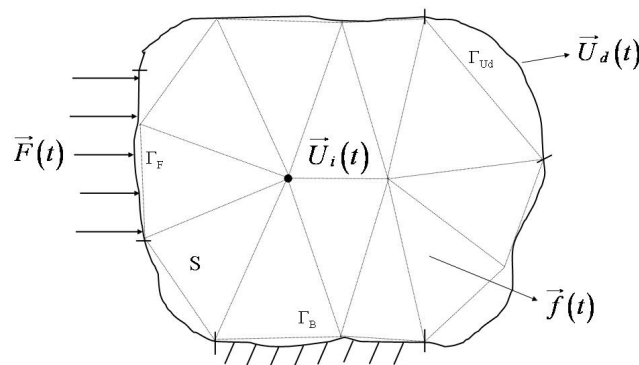


Figure 1.5: Modélisation EF d'un système mécanique classique

Sous l'effet des forces extérieures, l'équilibre dynamique linéaire du système discrétisé peut s'écrire [Trompette, 1992]

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{U}} + \mathbb{C}\dot{\vec{U}} + \mathbb{K}\vec{U} = \vec{F}(t) + \vec{f}(t) \quad (1.18)$$

où \mathbb{M} , \mathbb{K} et \mathbb{C} sont respectivement la matrice de masse, de rigidité et d'amortissement du système discrétisé, de dimension $n \times n$. Dans ce mémoire, on considère que le matériau est de type visqueux (la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation) [Lemaitre and Chaboche, 2000]. La matrice d'amortissement pourra être calculée de la même façon que la matrice de rigidité. On choisira ici \mathbb{C} proportionnel à \mathbb{K} .

On décrit dans cette partie les méthodes de calcul sur base modale [Gmür, 1997] qui seront reprises pour la modélisation du comportement vibratoire des machines tournantes par éléments finis (les calculs seront réalisés sur une base modale notée Φ).

2.1 Transformation de Ritz

Nous rappelons ici le principe de la transformation de Ritz [Géradin and Rixen, 1992]. Pour le problème de la détermination numérique des modes propres du système non amorti associé à la structure S figure 1.5, on sait que l'on peut se ramener à la résolution d'un problème de minimisation dont la solution \vec{U} vérifie le problème aux valeurs propres du type

$$(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})\vec{U} = \vec{0}. \quad (1.19)$$

La méthode de Ritz consiste à chercher la solution de l'équation de minimisation sur un sous-espace de l'espace des solutions. Considérons la matrice Φ contenant les vecteurs de la base du sous-espace en question, organisés en colonnes ; la solution recherchée prend alors la forme

$$\vec{U} = \Phi\vec{\eta} \quad (1.20)$$

et elle vérifie

$$(\bar{\mathbb{K}} - \omega^2\bar{\mathbb{M}})\vec{\eta} = \vec{0} \quad (1.21)$$

où $\vec{\eta}$ est le vecteur des déplacements généralisés. Les matrices $\bar{\mathbb{K}} = \Phi^T\mathbb{K}\Phi$ et $\bar{\mathbb{M}} = \Phi^T\mathbb{M}\Phi$ sont respectivement les matrices de rigidité et de masse généralisées du système S .

Après avoir résolu le système (1.21), l'obtention des modes propres dans la base physique se fait à l'aide de la relation (1.20). La transformation de Ritz permet donc de remplacer le problème aux valeurs propres initial (1.19) par un problème de même nature mais de dimension réduite.

2.2 Recombinaison modale

Une utilisation classique de la transformation de Ritz est l'analyse dynamique par recombinaison modale. Si l'on applique la transformation de Ritz, avec comme base incomplète de projection, les premiers modes propres de la structure, l'équation d'équilibre (1.18) devient

$$\bar{\mathbb{M}}\ddot{\vec{\eta}} + \bar{\mathbb{C}}\dot{\vec{\eta}} + \bar{\mathbb{K}}\vec{\eta} = \vec{\bar{F}}(t) \quad (1.22)$$

où $\vec{\bar{F}}(t) = \Phi^T\vec{F}(t) + \Phi^T\vec{f}(t)$ est le vecteur des forces extérieures généralisées et $\bar{\mathbb{C}} = \Phi^T\mathbb{C}\Phi$ est la matrice d'amortissement généralisée.

Les modes propres sont orthogonaux relativement aux matrices de masse, de rigidité et d'amortissement (car proportionnelle à \mathbb{K} dans cet ouvrage). L'équation différentielle (1.22) fait apparaître des matrices diagonales : le système est alors constitué d'équations découplées. Chacune d'entre elles est

l'équation d'un oscillateur à un degré de liberté identique à celui de la figure 1.1 qui fait apparaître les masses, rigidités, amortissements et forces généralisées relatives au mode k .

Si l'on considère la transformation de Ritz au niveau d'un degré de liberté, on a

$$\vec{U}_i = \sum_k \Phi_{ik} \eta_k. \quad (1.23)$$

Il apparaît donc que la réponse de la structure s'exprime comme la recombinaison pondérée de réponses d'oscillateurs à un degré de liberté découplés. La transformation de Ritz permet, dans ce cas, de définir un schéma équivalent de la structure, qui fait apparaître les oscillateurs à un degré de liberté associés aux modes propres identifiés (figure 1.6). Leur raideur, leur masse et leur amortissement sont les rigidités généralisées k_k , les masses généralisées m_k et les amortissements généralisés c_k des modes correspondants.

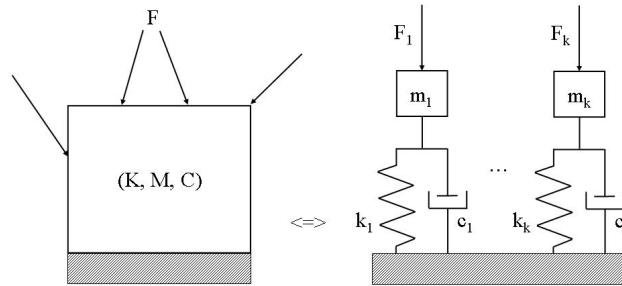


Figure 1.6: Représentation schématique de la recombinaison modale

Réservée essentiellement aux études linéaires en basses fréquences, la recombinaison modale consiste à utiliser les propriétés d'orthogonalité des modes propres d'une structure pour simplifier l'étude de sa réponse vibratoire. Outre l'intérêt de diminuer l'ordre du problème numérique à résoudre, la transformation de Ritz, dans ce cas, permet également de découpler les équations différentielles et de dégager une interprétation physique du résultat obtenu. Selon la fréquence d'excitation, on utilisera une base modale plus ou moins tronquée. Le comportement vibratoire des machines tournantes est tout à fait adapté à la recombinaison modale.

2.3 Synthèse modale : sous-structuration dynamique de Craig-Bampton

De façon générale, les méthodes de synthèse modale consistent à utiliser simultanément la sous-structuration dynamique (découpage en sous-structures) et la recombinaison modale au niveau de chaque sous-structure [Argyris and Mlejnek, 1991]. Souvent confondue avec la sous-structuration dynamique, la synthèse modale n'est qu'un cas particulier de celle-ci [Rousseau and Varé, 1998].

Par cette méthode, le déplacement d'une sous-structure (considéré dans le mouvement d'ensemble comme sa réponse aux forces [Neal, 1971] ou aux déplacements [Craig and Bampton, 1968] de liaisons de chaque composant) est calculé en utilisant une base de projection qui caractérise chaque sous-domaine. En effet, si la structure globale est trop importante pour faire l'objet d'un calcul modal

direct, les dimensions des sous-structures permettent d'effectuer ce travail. La synthèse modale impose d'étudier, d'abord séparément, chaque composant, afin de déterminer leur base de projection.

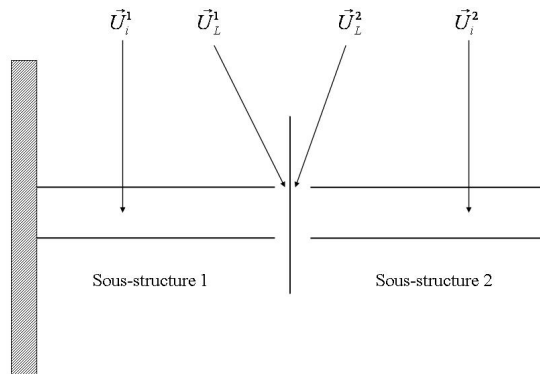


Figure 1.7: Principe de sous-structuration

Le vecteur des degrés de liberté de la sous-structure est caractérisé par un exposant j qui définit le numéro de la sous-structure, et un indice qui permet de distinguer les degrés de liberté internes (indice i), des degrés de liberté de frontière (indice l)

$$\vec{U}^j = \begin{Bmatrix} \vec{U}_i^j \\ \vec{U}_l^j \end{Bmatrix}. \quad (1.24)$$

La présentation suivante ne fait intervenir que deux sous-structures S^1 et S^2 , mais elle est généralisable à un nombre quelconque de composants.

2.3.1 Conditions de liaison entre sous-structures

Considérons le problème de deux sous-structures S^1 et S^2 liaisonnées de manière quelconque. Pour que le mouvement de la structure complète soit continu, il faut imposer une condition (que l'on suppose linéaire) entre les déplacements des deux composants à l'interface et la loi d'action-réaction. En se limitant aux cas de maillages compatibles, on peut écrire

$$\mathbb{C}_1 \vec{U}_l^1 + \mathbb{C}_2 \vec{U}_l^2 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}_l^1 = -\vec{F}_l^2 \quad (1.25)$$

où

\vec{U}_l^j est le vecteur des degrés de liberté aux noeuds d'interface $S^1 \cap S^2$ de la sous-structure j ,

\vec{F}_l^j est le vecteur des forces de liaison aux noeuds d'interface $S^1 \cap S^2$ de la sous-structure j .

En effet, les maillages des deux sous-structures S^1 et S^2 coïncidant, les fonctions de forme associées aux éléments finis sont les mêmes à l'interface. Il suffit donc d'imposer l'égalité aux noeuds des interfaces de liaison de chaque sous-structure pour imposer l'égalité sur tout le domaine de liaison.

Introduisons les matrices d'extraction des degrés de liberté d'interface \mathbb{B}_l^j tel que

$$\vec{U}_l^j = \mathbb{B}_l^j \vec{U}^j. \quad (1.26)$$

En utilisant l'équation de projection (1.20), la condition imposée sur les déplacements (1.25) et la formulation ci-dessus appliqués aux deux sous-structures, on obtient

$$\mathbb{C}_1 \mathbb{B}_l^1 \Phi^1 \vec{\eta}^1 + \mathbb{C}_2 \mathbb{B}_l^2 \Phi^2 \vec{\eta}^2 = \vec{0}, \quad (1.27)$$

soit

$$\mathbb{C}_l^1 \vec{\eta}^1 + \mathbb{C}_l^2 \vec{\eta}^2 = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_l^j = \mathbb{C}_j \mathbb{B}_l^j \Phi^j \quad (1.28)$$

où

\mathbb{C}_l^1 est la matrice de liaison de S^1 associée à l'interface $S^1 \cap S^2$,

\mathbb{C}_l^2 est la matrice de liaison de S^2 associée à l'interface $S^1 \cap S^2$.

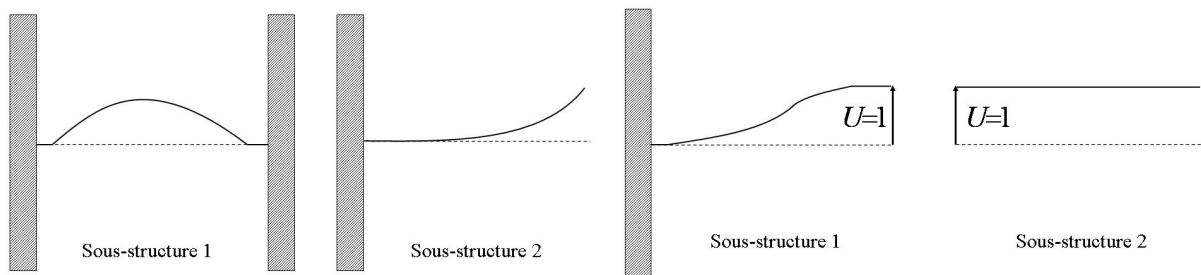
Le problème aux valeurs propres de la structure globale, munie de ses conditions aux limites, s'écrira sous la forme

$$(\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} + \mathbb{L}^T \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathbb{L} \vec{\eta} = \vec{0}. \quad (1.29)$$

Les matrices de masse et de rigidité généralisées, le vecteur des degrés de liberté généralisés et la matrice de liaison qui apparaissent ici, sont définis sur la structure globale. Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\vec{\lambda}$ permet de traduire la loi d'action réaction à laquelle sont soumises les interfaces.

2.3.2 Calcul modal par sous-structuration dynamique

Les vecteurs de bases utilisés sont les modes normaux à interfaces bloquées et les modes contraints [Craig and Bampton, 1968]. Les modes contraints sont des déformées statiques que l'on joint aux modes normaux à interfaces bloquées pour corriger les effets dus à leurs conditions aux limites. Un mode contraint est défini par la déformée statique obtenue en imposant un déplacement unité sur un degré de liberté de liaison, les autres degrés de liberté de liaison étant bloqués.



(a) Mode propre à interfaces bloquées

(b) Mode statique contraint

Figure 1.8: Modes utilisés en sous-structuration

Posons ϕ^j la matrice des vecteurs propres de la sous-structure S^j et ψ^j la matrice des modes contraints (figure 1.8). La base de projection de S^j est caractérisée par la matrice

$$\Phi^j = [\phi^j \quad \psi^j]. \quad (1.30)$$

La transformation de Ritz (1.20) nous permet d'écrire

$$\vec{U}^j = \begin{Bmatrix} U_i^j \\ U_l^j \end{Bmatrix} = [\phi^j \quad \psi^j] \begin{Bmatrix} \eta_i^j \\ \eta_l^j \end{Bmatrix} = \Phi^j \vec{\eta}^j \quad (1.31)$$

où η_i^j sont les degrés de liberté généralisés associés aux modes propres de S^j et η_l^j sont les degrés de liberté généralisés associés aux modes contraints de S^j .

Or les modes normaux sont déterminés avec des interfaces fixes, et chaque mode contraint est obtenu en imposant un déplacement unitaire à un degré de liberté de liaison, les autres étant bloqués. Les coordonnées généralisées relatives aux déformées statiques sont alors les valeurs des degrés de liberté de liaison

$$U_l^j = \eta_l^j. \quad (1.32)$$

Intéressons nous à la contribution du composant S^j d'un point de vue énergétique. Les énergies cinétiques et de déformation sont :

$$\mathcal{T}^j = \frac{1}{2} \dot{\vec{U}}^{jT} \mathbb{M}^j \dot{\vec{U}}^j = \frac{1}{2} (\Phi^j \dot{\vec{\eta}}^j)^T \mathbb{M}^j \Phi^j \dot{\vec{\eta}}^j = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{jT} \bar{\mathbb{M}}^j \dot{\vec{\eta}}^j, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{U}^j = \frac{1}{2} \vec{U}^{jT} \mathbb{K}^j \vec{U}^j = \frac{1}{2} (\Phi^j \vec{\eta}^j)^T \mathbb{K}^j \Phi^j \vec{\eta}^j = \frac{1}{2} \vec{\eta}^{jT} \bar{\mathbb{K}}^j \vec{\eta}^j. \quad (1.34)$$

Ces expressions font apparaître les projections des matrices de masse et de rigidité sur la base de la sous-structure. Ces matrices, dites généralisées ont la forme

$$\bar{\mathbb{K}}^j = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_D^j & 0 \\ 0 & \psi^{jT} \mathbb{K}^j \psi^j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{M}}^j = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \phi^{jT} \mathbb{M}^j \psi^j \\ \psi^{jT} \mathbb{M}^j \phi^j & \psi^{jT} \mathbb{M}^j \psi^j \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où \mathbb{K}_D^j est la matrice diagonale des rigidités généralisées associées aux modes propres de S^j .

Dans le cas du calcul des modes propres de la structure globale, les forces extérieures appliquées au système sont nulles. D'autre part, au niveau de chaque liaison, du fait de la loi d'action-réaction et de la condition imposée sur les déplacements, le travail des forces de liaison est nul. Ceci s'explique physiquement par le fait que les forces de liaison sont des forces internes à la structure globale.

Ainsi, au niveau de la structure complète, seules les énergies cinétiques et de déformation sont non nulles :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^1 + \mathcal{T}^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{1T} \bar{\mathbb{M}}^1 \dot{\vec{\eta}}^1 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{2T} \bar{\mathbb{M}}^2 \dot{\vec{\eta}}^2, \quad (1.36)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 + \mathcal{U}^2 = \frac{1}{2} \vec{\eta}^{1T} \bar{\mathbb{K}}^1 \vec{\eta}^1 + \frac{1}{2} \vec{\eta}^{2T} \bar{\mathbb{K}}^2 \vec{\eta}^2. \quad (1.37)$$

Le travail des forces de liaison étant nul, les équations d'Euler-Lagrange relatives aux modes propres de la structure globale sont

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbb{K}}^1 & 0 & \mathbf{L}^{1T} \\ 0 & \bar{\mathbb{K}}^2 & \mathbf{L}^{2T} \\ \mathbf{L}^1 & \mathbf{L}^2 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{M}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbb{M}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \vec{\eta}^1 \\ \vec{\eta}^2 \\ \vec{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.38)$$

Ainsi, le calcul des modes propres de la structure globale par la méthode de Craig-Bampton consiste à résoudre un problème aux valeurs propres matriciel de dimension réduite (gain d'autant plus important que les interfaces sont petites). Les matrices qu'il met en jeu sont symétriques et se calculent à partir des bases des sous-structures. Cette résolution nous donne les fréquences propres et les coordonnées généralisées des modes recherchés. On obtient leur coordonnées physiques sur les maillages des sous-structures en utilisant la relation (1.31). Cette étape est la restitution sur base physique.

3 Comportement vibratoire des systèmes tournants

Intéressons nous pour finir au cas particulier des oscillateurs tournants [Axisa, 2001b]. Le comportement vibratoire est toujours linéaire et la vitesse de rotation du système Ω est considérée constante (ce qui exclut la modélisation d'accélération ou de décélération du rotor [Roques, 2007]).

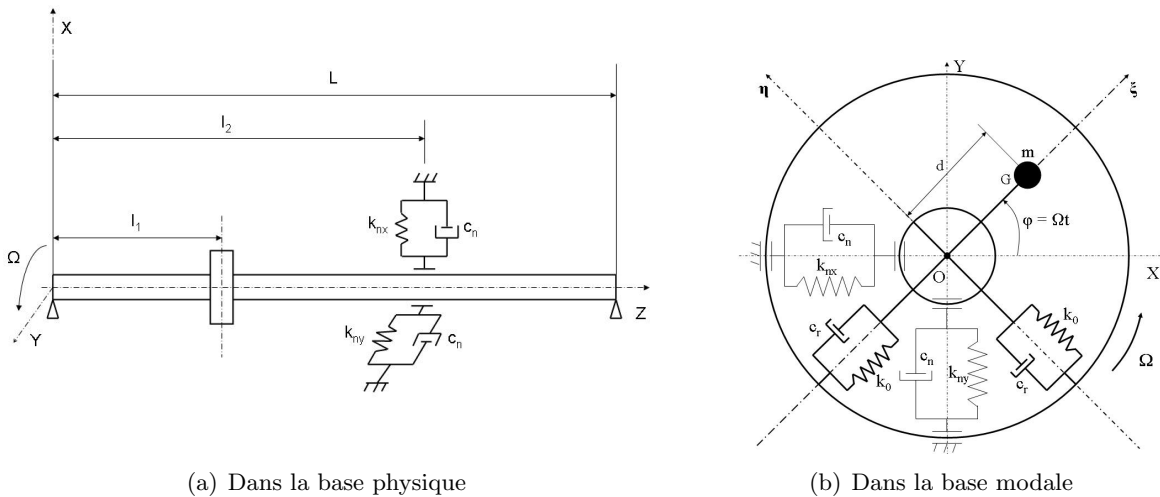


Figure 1.9: Représentation schématique d'une ligne d'arbre avec palier anisotrope

La machine tournante étudiée est donnée figure 1.9.a. Il s'agit d'une ligne d'arbre horizontale en rotation autour de l'axe z dont les dimensions supposent que l'on peut négliger le couplage gyroscopique (ce qui ne sera pas le cas dans le chapitre 3). L'arbre est supporté aux deux tiers par un palier magnétique anisotrope d'amortissement fixe c_n et de raideur k_{nx} et k_{ny} selon respectivement l'axe x et y [Lalanne and Ferraris, 1988]. L'ensemble de la machine est modélisé par des éléments finis de type poutre [Combescure, 2003]. L'équation d'équilibre de l'arbre en rotation s'écrit dans le repère Galiléen \mathbf{R}_n

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{U}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{H}(\Omega))\vec{U}(t) = \vec{F}(t). \quad (1.39)$$

$\vec{U}(t)$ est le champ de déplacements de l'arbre, exprimé dans \mathbf{R}_n , de dimension n où n est le nombre de degrés de liberté du système. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{C} sont respectivement les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système. La matrice $\mathbf{H}(\Omega)$, spécifique aux systèmes tournants, est une matrice de raideur antisymétrique due à l'amortissement visqueux du rotor en rotation. $\vec{F}(t)$ est le vecteur des forces extérieures exprimé dans \mathbf{R}_n .

3.1 Etude du système au repos : calcul de la base modale

D'après la transformation de Ritz, on passe de la base physique de dimension n (figure 1.9.a) à la base modale de dimension réduite (1.9.b) à travers le problème aux valeurs propres associé au système non amorti au repos

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \vec{U} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \bar{\eta} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{U}(t) = \Phi \bar{\eta}(t). \quad (1.40)$$

Comme le sous-entend la figure 1.9.b, on ne conserve que les deux premiers modes propres de l'arbre et on travaille sur les deux degrés de liberté généralisés $x(t)$ et $y(t)$. Dans la base modale, on obtient alors respectivement la masse, la raideur et les coordonnées généralisées de la machine

$$\bar{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} k_{nx} + k_0 & 0 \\ 0 & k_{ny} + k_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Les deux modes propres obtenus sont alors des oscillations libres non amorties, découplés en x et en y , respectivement de pulsation propre

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_{nx} + k_0}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_{ny} + k_0}{m}}. \quad (1.42)$$

On montre figure 1.10.a et 1.10.b respectivement le mode propre en x au temps t dans la base physique et dans la base modale (le mode est le même que celui de l'oscillateur à un degré de liberté de la figure 1.2.a).

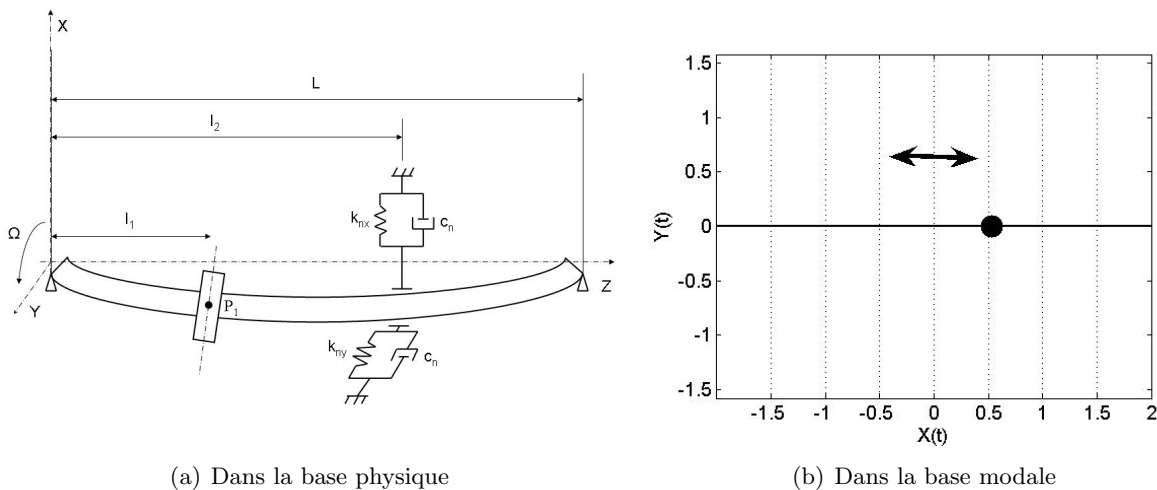


Figure 1.10: Premier mode propre de l'arbre selon x au temps t

Remarque :

- Les modes propres du système ne dépendent pas de la vitesse de rotation Ω (le couplage gyroscopique est négligé). Le mouvement libre du système non amorti est une combinaison linéaire des ces modes et dépend des conditions initiales.

3.2 Oscillations libres en rotation : étude de la stabilité

Au moyen de la recombinaison modale, les oscillations du système libre amorti vérifient dans la base modale précédente

$$\bar{\mathbb{M}}\ddot{\vec{\eta}}(t) + \bar{\mathbb{C}}\dot{\vec{\eta}}(t) + (\bar{\mathbb{K}} + \bar{\mathbb{H}}(\Omega))\vec{\eta}(t) = \vec{0}. \quad (1.43)$$

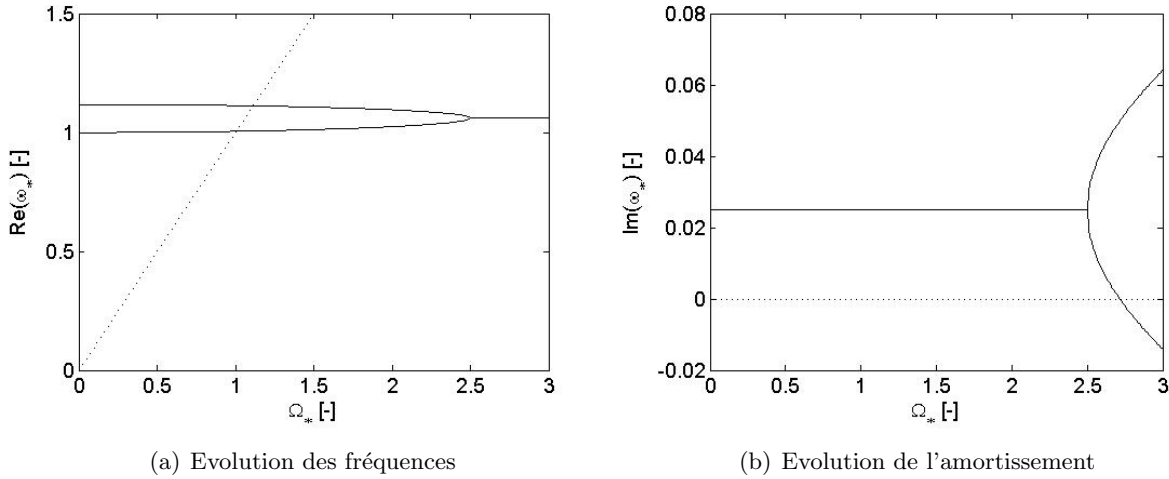


Figure 1.11: Diagramme de Campbell du système sur base modale ($\zeta_r = 0.025$ et $\zeta_n = 0$)

$\bar{\mathbb{C}}$ est l'amortissement généralisé; on distingue l'amortissement fixe du palier c_n et l'amortissement tournant du rotor c_r . Dans le repère fixe, l'amortissement visqueux tournant fait apparaître une matrice de raideur généralisée $\bar{\mathbb{H}}(\Omega)$ qui couple les déplacements généralisés en x et y . L'expression de ces deux matrices est donnée par

$$\bar{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} c_n + c_r & 0 \\ 0 & c_n + c_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega c_r \\ -\Omega c_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Etant donné le couplage entre les deux déplacements transverses, il est courant dans le cas des oscillateurs tournants de travailler en coordonnées complexes [Genta, 2005]. En posant $z(t) = x(t) + iy(t)$ et \bar{z} son conjugué, l'équation (1.43) devient

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + \epsilon_n \bar{z}(t) = 0 \quad (1.45)$$

où $c = c_n + c_r$, $\delta = \frac{k_{nx} + k_{ny}}{2} + k_0$ et $\epsilon_n = \frac{k_{ny} - k_{nx}}{2}$.

La solution générale de l'équation (1.45) est alors de la forme $z(t) = Z_{gD}e^{i\omega t} + Z_{gR}e^{-i\bar{\omega}t}$ et l'équation caractéristique associée s'écrit

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + i\omega c + \delta - i\Omega c_r & \epsilon_n \\ \epsilon_n & -m\omega^2 + i\omega c + i\Omega c_r + \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{gD} \\ \bar{Z}_{gR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.46)$$

Le problème (1.46) nous donne les valeurs propres ω_i jusqu'à $i = 2$ pour chaque vitesse de rotation Ω . On obtient ainsi le diagramme de Campbell du système tournant (figure 1.11) sur la base modale considérée. La partie réelle des fréquences propres est alors la pseudo-pulsation du système libre amorti

pour chaque Ω . La partie imaginaire des fréquences propres nous renseigne sur la stabilité du système étant donné que $\eta(t)$ est directement l'évolution linéarisée autour de l'équilibre. En composant le théorème de Liapunov et la recombinaison modale, on en déduit qu'il y a instabilité dynamique de l'arbre s'il existe un i tel que $\Im(\omega_i) < 0$ et $\Re(\omega_i) \neq 0$.

On résout le problème aux valeurs propres adimensionné (1.46) en $\omega_* = \frac{\omega}{\omega_{nx}}$ pour chaque fréquence de rotation adimensionnée $\Omega_* = \frac{\Omega}{\omega_{nx}}$. Le diagramme de Campbell sur base modale est donné figure 1.11 pour $\alpha_n = \frac{k_{ny}}{k_{nx}} = 1.5$, $\zeta_r = \frac{c_r}{2m\omega_{nx}} = 0.025$ et $\zeta_n = \frac{c_n}{2m\omega_{nx}} = 0$. On observe une confusion des pulsations du système pour $\Omega = \Omega_s$, les fréquences propres deviennent alors complexes conjuguées : un mode devient alors dynamiquement instable pour $\Omega > \Omega_s$. L'amortissement tournant visqueux déstabilise le système [Hansen et al., 2001, Matras and Flowers, 2002].

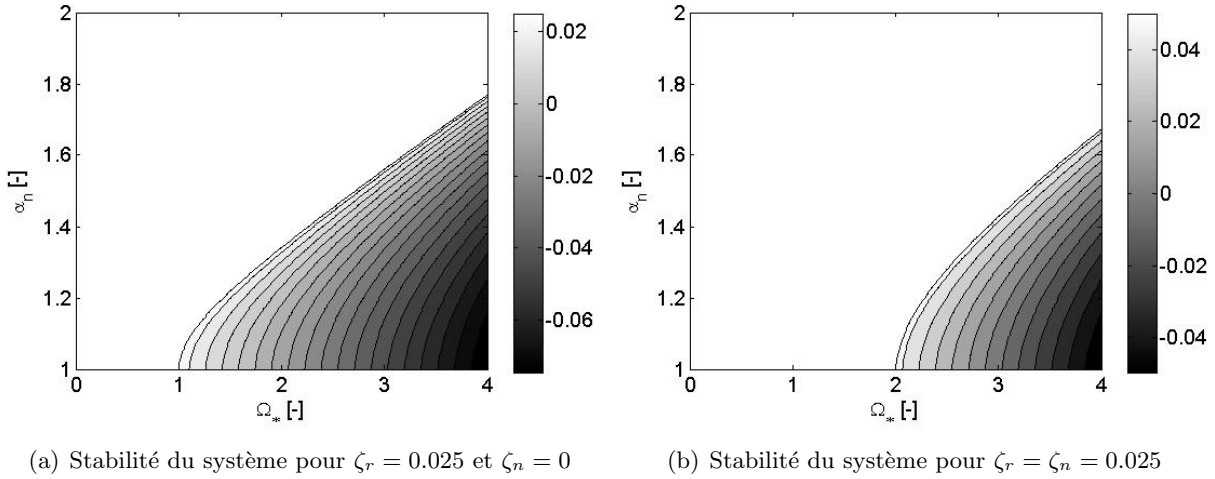


Figure 1.12: Carte de stabilité du système dans le domaine (Ω, α_n)

En représentant la partie imaginaire $\Im(\omega_i)$ la plus préjudiciable du système dans l'espace (α_n, Ω_*) , on peut obtenir la carte de stabilité du système (instabilité en couleur sombre sur la figure 1.12). Sans surprise, l'amortissement fixe stabilise notre système (comparaison des figures 1.12.a et 1.12.b). La remarque plus originale est que la fréquence de rotation seuil Ω_s augmente avec α_n ; l'anisotropie de palier stabilise donc le système vis-à-vis de l'amortissement tournant [Lazarus, 2006].

3.3 Régime permanent du système en rotation

Dans la réalité, les machines tournantes ne sont jamais parfaitement équilibrées [Dimentberg, 1961]. Cela signifie que la masse généralisée m de la figure 1.9.b ne coïncide pas exactement avec l'axe de rotation z : on définit sa position par un excentrement d et un angle ϕ par rapport à l'axe ξ . On modélise ce phénomène par la force de balourd qui, dans le repère Galiléen \mathbf{R}_n , est une force extérieure tournant dans le sens direct (sens de rotation du rotor), harmonique de fréquence d'excitation Ω . Les oscillations forcées du système 1.9 vérifient alors, dans la base modale et en coordonnées complexes

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + \epsilon_n \bar{z}(t) = md\Omega^2 e^{i(\Omega t + \phi)}. \quad (1.47)$$

En remplaçant la réponse forcée par sa forme $z(t) = Z_{pD}e^{i\Omega t} + Z_{pR}e^{-i\Omega t}$, on obtient l'expression des fonctions de transfert Z_{pD} et Z_{pR} dans le domaine fréquentiel

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + ic\Omega - i\Omega c_r + \delta & \epsilon_n \\ \epsilon_n & -m\Omega^2 + ic\Omega + i\Omega c_r + \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{pD} \\ Z_{pR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} md\Omega^2 e^{i\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.48)$$

Le système possède deux fréquences de rotation critiques $\Omega_{cx} = \omega_{nx}$ et $\Omega_{cy} = \omega_{ny}$ pour lesquelles il y a résonance comme sur la figure 1.13.a (on excite le mode propre selon x et selon y). Ces fréquences critiques peuvent se retrouver sur la partie réelle du diagramme de Campbell grâce à la droite $\omega = \Omega$. La réponse observée pour une vitesse de rotation Ω donnée est tournante, elliptique, de pulsation Ω (figure 1.13.b). Plus le palier est anisotrope et plus l'ellipse paraît "écrasée".

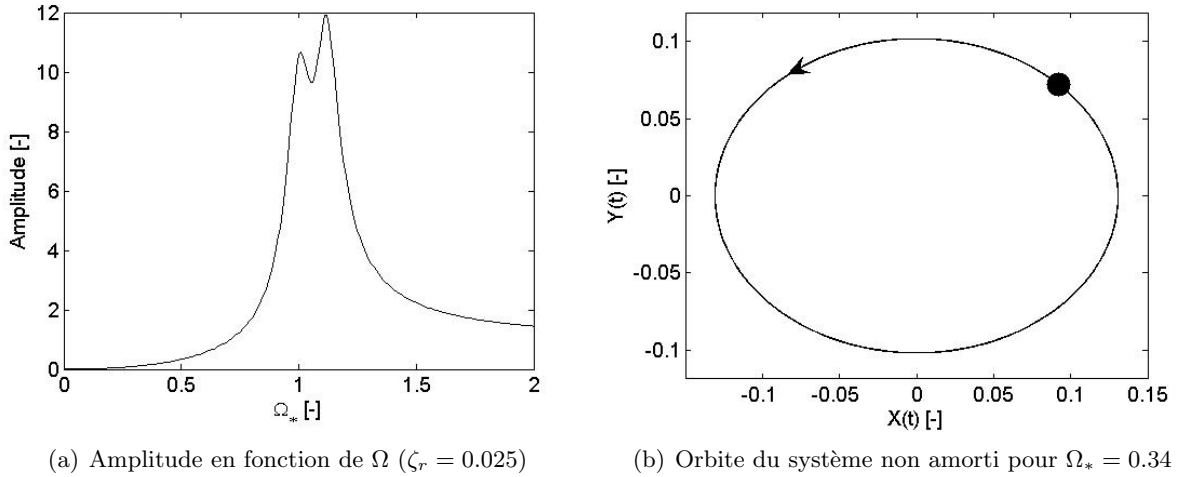


Figure 1.13: Réponse au balourd de la ligne d'arbre sur base modale ($\alpha_n = 1.5$)

La réponse au balourd sur base modale du système étudié dans la partie précédente (adimensionnée par rapport à d et $\phi = 0^\circ$) est représentée sur la figure 1.11. On donne sur la figure 1.13.a l'amplitude $Z_p = \|Z_{pD}\| + \|Z_{pR}\|$ en fonction de la vitesse de rotation. L'amortissement tournant limite les pics de résonance. Sur la figure 1.13.b, on trace l'orbite de la masse généralisée pour $\Omega_* = 0.34$ et $\zeta_n = \zeta_r = 0$. La réponse tourne dans le sens direct, elle est mono harmonique de fréquence Ω .

Remarques :

- Sous l'effet de l'anisotropie de palier, la réponse est rétrograde (sens de rotation inverse à celui de l'arbre) dans le domaine $\Omega_{cx} < \Omega < \Omega_{cy}$ [Genta, 1995].
- L'amortissement fixe c_n amortit l'amplitude de la réponse et permet notamment de passer les fréquences critiques de rotation. Lorsque le palier est suffisamment anisotrope, l'amortissement tournant c_r peut avoir le même rôle que son homologue fixe. Pour avoir une idée sur l'influence de l'amortissement c_r ou c_n sur la réponse au balourd, on peut observer le diagramme de Campbell en amortissement.

Chapitre 2

L'influence des défauts ou l'étude des oscillateurs paramétriques

La plupart des "défauts" rencontrés sur les machines tournantes (défaut de forme, rotor fissuré,...) conduisent à des équations d'équilibre paramétriques. Les hypothèses concernant les oscillateurs classiques ne sont alors plus valables. Ce chapitre se limite, dans un premier temps, à l'étude des oscillations paramétriques linéaires d'une masse m . On donnera plus particulièrement les outils numériques spécifiques et nécessaires à la détermination du comportement vibratoire (stabilité, réponse vibratoire) des oscillateurs paramétriques linéaires tournants.

Sommaire

1	Brève histoire des oscillateurs paramétriques linéaires	24
1.1	L'équation de Mathieu (1868)	24
1.2	L'équation de Hill (1877)	25
1.3	La théorie de Floquet (1879)	26
2	Cas des oscillateurs paramétriques linéaires tournants	27
2.1	Description du système	27
2.2	Systèmes tournants avec raideurs anisotropes : le défaut de forme	28
2.3	Rotor horizontal fissuré sous poids propre : la fissure respirante	29
2.4	Equation de mouvement dans le cas général	31
3	L'oscillateur paramétrique tournant libre	32
3.1	Equation d'équilibre dans le domaine fréquentiel	32
3.2	Les modes propres paramétriques	34
3.3	Stabilité du système	37
4	Réponse forcée d'un oscillateur paramétrique tournant	43
4.1	La réponse au balourd	43
4.2	Régime permanent sous poids propre	45
5	Remarques	47
5.1	Méthode d'analyse générale des oscillateurs paramétriques	48
5.2	Cas particuliers	49

1 Brève histoire des oscillateurs paramétriques linéaires

Contrairement aux cas des oscillateurs mécaniques harmoniques rencontrés dans la partie précédente, l'état d'équilibre des oscillateurs paramétriques dépend d'un paramètre de contrôle. Ainsi, le pendule suspendu à un point fixe appartient à la première famille d'oscillateur alors que le même pendule suspendu à un point mobile oscillant appartient à la seconde famille (le paramètre étant la position de ce point). L'équation d'équilibre de ce type d'oscillateurs devient alors une équation différentielle à coefficients périodiques. C'est à la fin du XIX^{ème} siècle que les scientifiques ont commencé à poser les bases mathématiques nécessaires à la résolution de ces équations. Aujourd'hui encore, ce sont ces résultats théoriques qui vont nous servir de base dans la suite de l'ouvrage.

1.1 L'équation de Mathieu (1868)

Après des débuts en mathématiques fondamentales, Emile Mathieu (1835-1890) consacre ses recherches à l'étude des solutions aux équations différentielles partielles d'un grand nombre de problèmes physiques de l'époque. C'est en résolvant l'équation de propagation d'ondes d'une membrane elliptique oscillant dans un fluide qu'il découvre les fonctions de Mathieu [Campbell, 1964] qui vérifient l'équation qui portera son nom (voir annexe A)

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + [\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]\theta = 0. \quad (2.1)$$

Cette équation a été l'une des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques les plus étudiées [Arscott, 1964, Richards, 1983]. Elle se retrouve dans de nombreux cas d'oscillateurs paramétriques ; c'est notamment l'équation d'équilibre d'un pendule suspendu à un point libre de se déplacer sous contrainte [Genta, 1995] (voir figure 2.1).

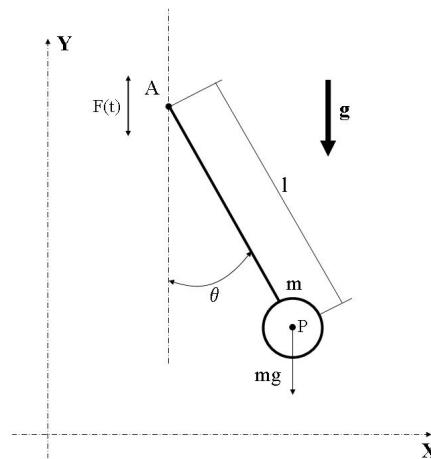


Figure 2.1: Pendule suspendu à un point mobile

L'équation (2.1) est obtenue lorsque le mouvement dans la direction y du point A est considérée comme harmonique d'amplitude D et de fréquence Ω en posant $\tau = \Omega/2t$, $\delta = 4g/l\Omega^2$ et $\epsilon = -2D/l$. Dans le cas où le point A est fixe (oscillateur classique équivalent), la fréquence propre du système est $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Dans cette équation linéarisée autour de l'équilibre, le coefficient non constant $[\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]$ peut agir comme une excitation paramétrique, c'est pour cette raison que l'on parle d'instabilité paramétrique dans le cas de l'équation de Mathieu et des oscillateurs paramétriques en général [Bolotin, 1964, Cheikh, 1995]. En effet, on montre sur la figure 2.2 l'exposant caractéristique de la fonction de Mathieu ; pour certains jeux de paramètres (δ, ϵ) , le système devient instable dynamiquement. La figure 2.2 représente le diagramme de Strutt. Les régions d'instabilité observées sont les langues d'Arnold (régions sombres sur le diagramme). La région d'instabilité principale apparaît pour $\delta = 1$, c'est-à-dire $\Omega = 2\omega_n$. Les régions d'instabilité secondaires apparaissent pour $\delta = j^2$ où $j > 1$ est un entier.

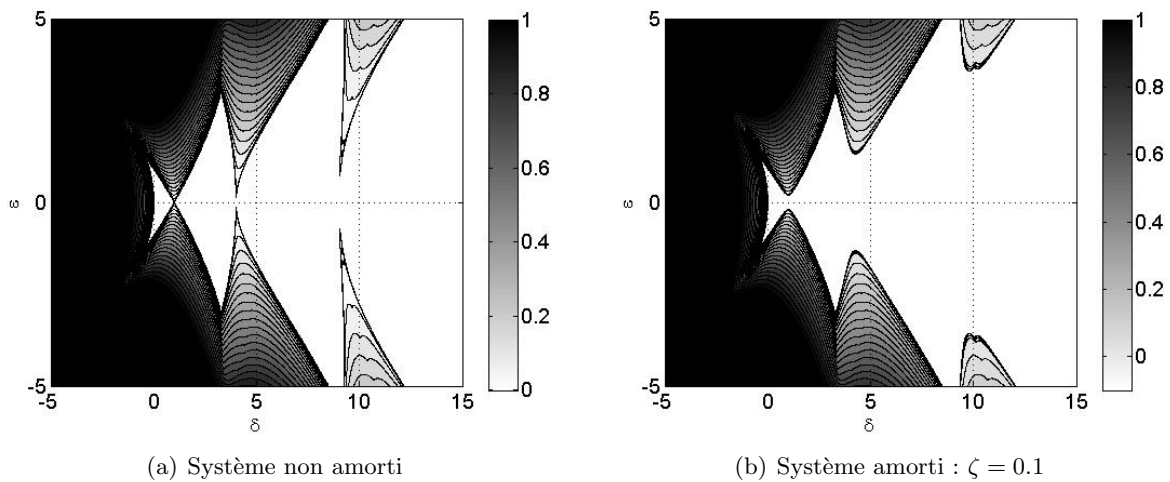


Figure 2.2: Domaine d'instabilité du pendule dans le plan (δ, ϵ)

Si l'amortissement du pendule n'est pas négligé, l'équation linéaire adimensionnelle du mouvement du pendule devient (voir annexe A)

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{d\theta}{d\tau} + [\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]\theta = 0 \quad \text{où} \quad \zeta = c/m\Omega. \tag{2.2}$$

L'équation (2.2) peut être réduite sous la forme d'une équation de Mathieu standard. L'amortissement visqueux stabilise l'oscillateur paramétrique (figure 2.2.b) et celui-ci est d'autant plus efficace que j est élevé ; on comprend alors pourquoi les régions d'instabilité qui vérifient $j > 1$ sont secondaires. Dans les cas réels, ces régions sont généralement inexistantes.

1.2 L'équation de Hill (1877)

George Hill (1838-1914), mathématicien américain passionné d'astronomie, se spécialise dans la détermination d'orbites. Un de ses plus brillants ouvrages, "On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motion of the sun and moon" contient d'importantes nouvelles idées sur la théorie des trois corps [Hill, 1886]. Notamment, il affirme que le périégée lunaire vérifie l'équation qui portera son nom

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + \Theta w = 0 \tag{2.3}$$

tel-00370228, version 1 - 23 Mar 2009

où Θ est une fonction périodique, dépendant uniquement de la distance angulaire τ entre la lune et le soleil, qui vérifie

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 \cos 2\tau + \Theta_2 \cos 4\tau + \dots \quad (2.4)$$

En posant $w = \sum_i b_i \zeta^{c+2i}$ dans l'équation (2.3), il obtient le jeu d'équations différentielles partielles

$$(c + 2j)^2 b_j - \sum_i \Theta_{j-i} b_i = 0 \quad (2.5)$$

pour tout entier j , positif et négatif. L'équation (2.3) peut alors se mettre sous la forme d'un déterminant infini, qui portera son nom, qui lui permet d'obtenir, de façon approchée, le coefficient c et les coefficients constants b_i .

Par cette méthode numérique ingénieuse, Hill trouve une valeur du périégée lunaire très proche de la solution littérale de Delaunay obtenue quelques années auparavant. Par la même occasion, il nous donnera une méthode de résolution efficace pour étudier les oscillateurs paramétriques régis par l'équation de Hill.

1.3 La théorie de Floquet (1879)

Gaston Floquet (1847-1920), mathématicien français, a écrit sa thèse de doctorat "Sur la théorie des équations différentielles linéaires". La plupart de ses futurs travaux s'inspireront directement des idées contenues dans cette dernière. Notamment il écrit trois articles "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques" où il s'attache à donner une théorie générale, qui portera son nom, sur la résolution de ce type d'équations [Floquet, 1879].

Soit le système linéaire variationnel suivant

$$\dot{u}(t) = \mathbb{D}(t) u(t) \quad (2.6)$$

où $\mathbb{D}(t)$ est la matrice tangente périodique, de période T , du système.

Dans le cas où (2.6) est une équation de mouvement, la solution $u(t)$ décrit l'écart entre la solution dynamique fondamentale et la solution perturbée.

Soit $\phi(t)$ une matrice d'ordre $2n$ constituée de $2n$ vecteurs colonnes qui sont solutions du système (2.6) correspondant à $2n$ conditions initiales linéairement indépendantes (n est le nombre de degrés de liberté du système et ϕ est d'ordre $2n$ dans l'espace d'état). La matrice $\phi(t)$ est appelée matrice fondamentale.

La théorie de Floquet consiste à démontrer que chaque matrice fondamentale $\phi(t)$ se met sous la forme

$$\phi(t) = \mathbb{P}(t) \exp^{\mathbb{A}'t} \quad (2.7)$$

où

- $\mathbb{P}(t)$ est une matrice d'ordre $2n$, périodique et de période T ,
- \mathbb{A}' est une matrice constante d'ordre $2n$,
- $\exp^{\mathbb{A}'t}$ est définie par la série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}'t)^k}{k!}$.

Floquet montre que $\phi(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale. Comme $\phi(t)$ et $\phi(t+T)$ sont linéairement dépendantes, il existe alors une matrice \mathbb{C} non singulière telle que

$$\phi(t+T) = \mathbb{C}\phi(t). \quad (2.8)$$

La matrice \mathbb{C} est appelée matrice monodrome et s'écrit $\mathbb{C} = \exp^{A'T}$. Les valeurs propres ρ_i ($i = 1, \dots, 2n$) de la matrice sont les multiplicateurs caractéristiques. Chaque nombre complexe s_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) tel que $\rho_i = \exp^{s_i T}$ est appelé exposant caractéristique.

De la même manière que dans le chapitre précédent, on va pouvoir appliquer le théorème de Liapunov aux valeurs s_i pour étudier la stabilité de l'oscillateur paramétrique régi par l'équation de mouvement (2.6). L'annexe A fournit quelques commentaires supplémentaires sur la théorie de Floquet.

2 Cas des oscillateurs paramétriques linéaires tournants

Nous présentons dans cette partie l'influence que peut avoir un "défaut" de rotor (défaut de forme, fissure ouverte ou respirante) sur l'équation d'équilibre de l'oscillateur choisi pour modéliser le système. On décrit d'abord les systèmes tournants étudiés et les hypothèses adoptées, puis on écrit l'équation d'équilibre qui leur est associée [Lazarus and Combescure, 2008].

2.1 Description du système

La machine tournante est horizontale; elle est modélisée par deux barres identiques AG et GB supportées en A et B par des articulations fixes (inspirée de la figure 1.9). Nous considérons que le comportement vibratoire du système sera étudié à travers le mouvement du centre de gravité G . La rotation du rotor se traduit par une vitesse de rotation imposée Ω des barres autour de l'axe z dans le sens direct. Sous l'influence des forces extérieures (poids propre, forces de balourd), les mouvements du point G sont décrits par les petits déplacements $x(t)$ et $y(t)$ dans le repère fixe \mathbf{R}_n , les équations du mouvement seront considérées linéaires. Le couplage gyroscopique est négligé de façon à se focaliser uniquement sur l'influence des défauts.

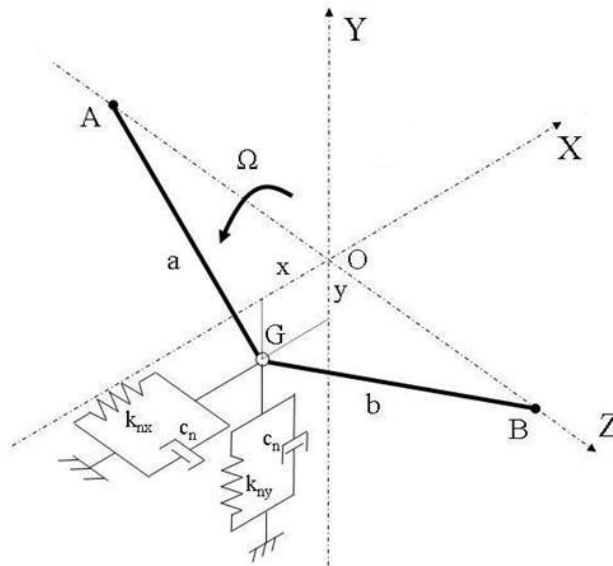


Figure 2.3: Système tournant à 2 ddls non axisymétrique

La masse concentrée en G se notera m . En considérant le matériau du rotor visqueux, on peut obtenir un amortissement tournant c_r non nul en G . Dans le cas du système axisymétrique sans défaut (comme dans le chapitre 1), on notera k_0 la raideur tournante. La machine est supportée par un palier

[Frêne, 1990] représenté, figure 2.3, par un amortissement visqueux c_n et une rigidité anisotrope k_{nx} et k_{ny} respectivement selon l'axe x et y .

On note $\omega_{0x} = \sqrt{\frac{k_0 + k_{nx}}{m}}$ et $\omega_{0y} = \sqrt{\frac{k_0 + k_{ny}}{m}}$ la pulsation propre du système tournant sain respectivement selon x et y . L'amortissement réduit fixe et tournant sont définis par rapport à ω_{0x} et s'écrivent $\zeta_n = \frac{c_n}{2m\omega_{0x}}$ et $\zeta_r = \frac{c_r}{2m\omega_{0x}}$.

2.2 Systèmes tournants avec raideurs anisotropes : le défaut de forme

Le premier type de défaut auquel nous nous intéressons a pour conséquence une raideur tournante k_r anisotrope dans le repère tournant \mathbf{R}_r . Une asymétrie du rotor (rotor rectangulaire, elliptique) ou la présence d'une fissure ouverte (la fissure du rotor n'évolue pas dans \mathbf{R}_r au cours de la rotation) sont des cas réels qui impliquent cette anisotropie [Foote et al., 1943, Gladwell and Stammers, 1966, Gasch, 1993]. L'oscillateur correspondant est représenté figure 2.4.a. On note respectivement la raideur tournante $k_{r\xi} = k_0 - \Delta_r$ N/m et $k_{r\eta} = k_0 + \Delta_r$ N/m selon l'axe ξ et η . La raideur Δ_r représente la sévérité du défaut (profondeur et largeur de fissure, degré de dissymétrie); si $\Delta_r = 0$ N/m, le système est sain et l'oscillateur étudié devient celui de la figure 1.9.b.

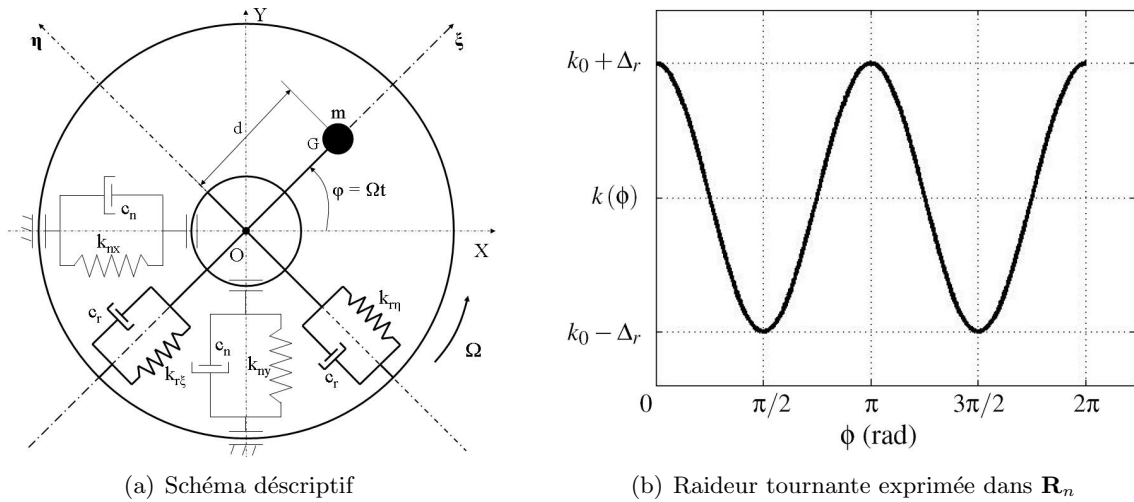


Figure 2.4: Rotor avec défaut de forme : oscillateur S_1

Dans le repère Galiléen, la fonction raideur observée k_ϕ est donnée figure 2.4.b au cours d'une rotation. La rotation étant constante, la raideur tournante apparente du système varie périodiquement au cours du temps avec une période $T_1 = \frac{\pi}{\Omega}$ [Lalanne and Ferraris, 1988]. L'équation d'équilibre de la masse m soumise à une force de balourd ($\phi = 0^\circ$) s'écrit alors simplement dans le système de coordonnées (x, y)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} - \Delta_r \cos 2\Omega t x - \Delta_r \sin 2\Omega t y + (k_0 + k_{nx})x + \Omega c_r y = md\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} - \Delta_r \sin 2\Omega t x + \Delta_r \cos 2\Omega t y + (k_0 + k_{ny})y - \Omega c_r x = md\Omega^2 \sin \Omega t \end{cases} \quad (2.9)$$

Contrairement au cas de l'oscillateur tournant du chapitre précédent, les degrés de libertés sont couplés pour $\Omega \neq 0$ (et cette propriété reste valable lorsque $c_r = 0$).

2.3 Rotor horizontal fissuré sous poids propre : la fissure respirante

Le second cas auquel nous nous intéressons est plus compliqué, la raideur tournante varie dans le repère \mathbf{R}_r . Cette caractéristique physique peut se retrouver dans l'étude vibratoire d'un rotor horizontal fissuré sous poids propre (figure 2.5) [Dimarogonas, 1996, Gasch, 2008].

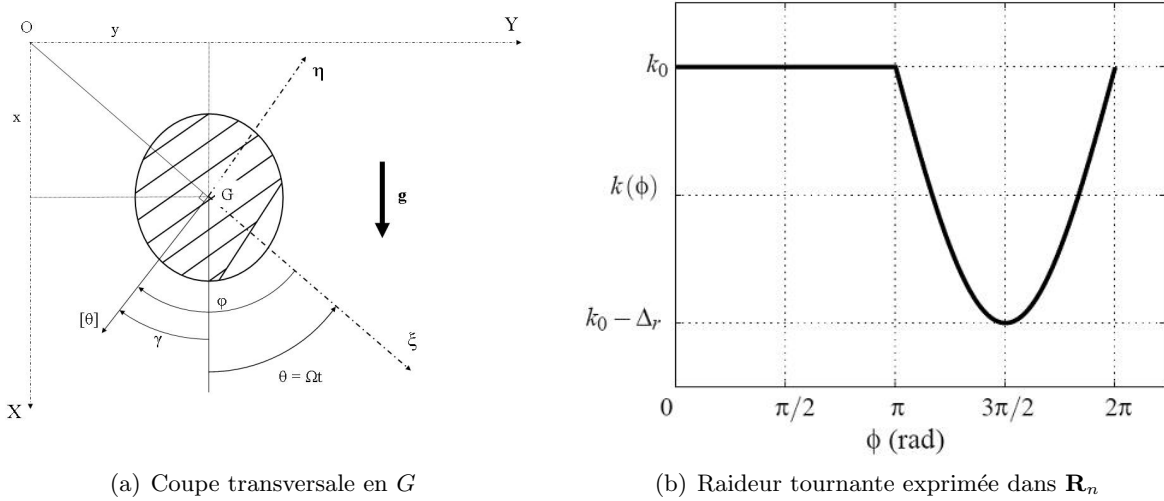


Figure 2.5: Rotor avec fissure respirante : oscillateur S_2

La liaison en G représente une section fissurée possédant une énergie élastique $W_{elas} = W([\theta]_x, [\theta]_y)$ où $[\theta]_x$ et $[\theta]_y$ sont les discontinuités de rotations en G dues à la fissure. Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, on vérifie en particulier que $[\theta]$ reste perpendiculaire à OG au cours du mouvement. Pour déduire l'énergie élastique de liaison W , on introduit l'angle γ (figure 2.5.a)

$$\gamma = (Ox, [\theta]) \in [0, 2\pi]. \quad (2.10)$$

qui vérifie $\tan(\gamma) = -\frac{x}{y}$, ce qui donne $\gamma = -\text{atan}\left(\frac{x}{y}\right) + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

L'orientation de la fissure est définie par une direction matérielle $O\xi$ telle que $(Ox, O\xi) = \Omega t$ compte tenu de la rotation imposée du rotor.

Pour admettre que l'énergie s'écrit sous la forme $W = \frac{1}{2}k(\phi) \left([\theta]_x^2 + [\theta]_y^2\right)$ dans laquelle $k(\phi)$ représente une rigidité tournante directionnelle, dépendant de ϕ , de période 2π , on introduit l'angle

$$\phi = (O\xi, [\theta]) = (O\xi, Ox) + (Ox, [\theta]) = \gamma - \Omega t \in [0, 2\pi] \quad \text{modulo } 2\pi. \quad (2.11)$$

Les moments associés aux rotations à chaque instant t sont alors

$$M_x = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_x} \quad \text{et} \quad M_y = \frac{\partial W}{\partial [\theta]_y}. \quad (2.12)$$

La loi de comportement choisie est de nature mathématique proche de celle d'un élément de section fissurée en flexion bi-axée [Andrieux and Varé, 2005]. Dans le repère fixe \mathbf{R}_n , on peut écrire

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\phi) & -\frac{1}{2}k'(\phi) \\ \frac{1}{2}k'(\phi) & k(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\theta]_x \\ [\theta]_y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k'(\phi) = \frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.13)$$

Pour des petits mouvements sous poids propre, comme $x(t)$ est prédominant par rapport à $y(t)$, l'angle γ est proche de $\frac{3\pi}{2}$ de sorte que l'approximation $\phi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t$ est justifiée. L'équation d'équilibre du système sous poids propre s'obtient à partir du Principe des Puissances Virtuelles et s'écrit dans le repère fixe \mathbf{R}_n

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + k(\phi)x - \frac{1}{2}k'(\phi)y + k_{nx}x + \Omega c_r y = m \times g \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{1}{2}k'(\phi)y + k(\phi)x + k_{ny}y - \Omega c_r x = 0 \\ \phi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t \end{cases} \quad (2.14)$$

A l'aide d'un calcul statique non-linéaire tridimensionnel de l'élément fissuré, on peut calculer la forme de la fonction $k(\phi)$ associée à la loi de comportement de la fissure [Andrieux and Varé, 2002]. Sous l'effet du poids propre, la fissure se ferme pour $\phi \in [0, \pi]$, la raideur est celle du système sain $k(\phi) = k_0$. Pour $\phi \in [\pi, 2\pi]$ la fissure s'ouvre et on observe une perte de raideur $k(\phi) = k_0 + \Delta_r \sin \phi$. On dit que la fissure est respirante (figure 2.5.b) [Chondros et al., 2001].

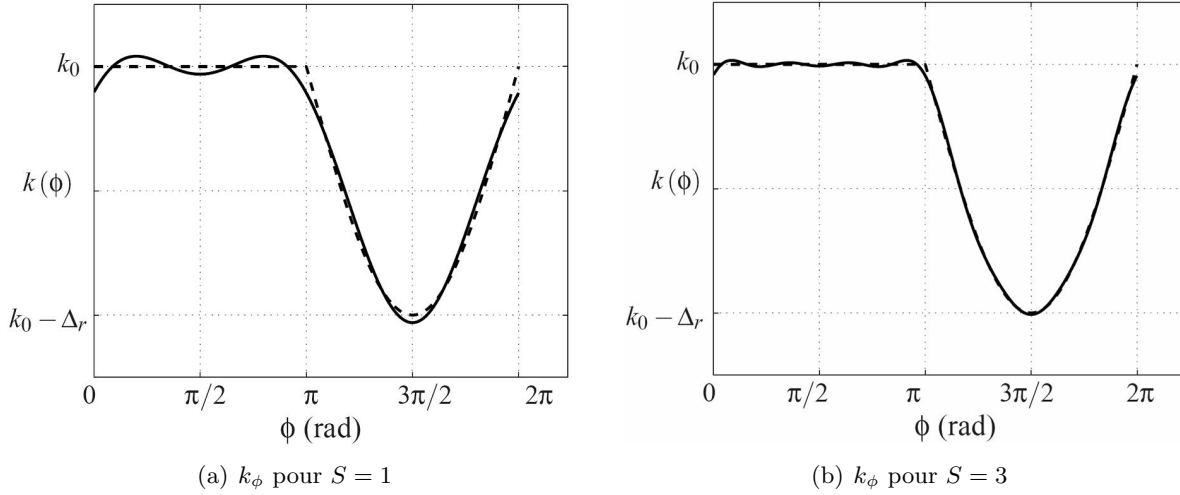


Figure 2.6: Approximation de $k(\phi)$ en série de Fourier jusqu'à l'ordre S

La fonction $k(\phi)$ est périodique de période 2π , on peut alors l'exprimer en série de Fourier jusqu'à l'ordre N [Arsac, 1961, Bendat and Piersol, 1993]

$$k(\phi) = k_0 - \frac{\Delta_r}{\pi} + \frac{\Delta_r}{2} \sin \phi + \frac{\Delta_r}{2\pi} \sum_{n=2}^N \frac{2}{n^2 - 1} ((-1)^n + 1) \cos n\phi. \quad (2.15)$$

En observant que les n impairs ne contribuent pas à la rigidité $k(\phi)$, on peut effectuer le changement de variable $n = 2s$ dans (2.15) [Arem, 2006]. Sous l'hypothèse $\phi = \frac{3\pi}{2} - \Omega t$, la fonction rigidité peut alors s'écrire en fonction de t jusqu'à l'ordre S

$$\begin{cases} k(\phi) = k_0 - \frac{\Delta_r}{\pi} - \frac{\Delta_r}{2} \cos \Omega t + \frac{2\Delta_r}{\pi} \sum_{s=1}^S \frac{(-1)^s}{(4s^2 - 1)} \cos(2s\Omega t) \\ k'(\phi) = -\frac{\Delta_r}{2} \sin \Omega t + \frac{4\Delta_r}{\pi} \sum_{s=1}^S (-1)^s \frac{s}{4s^2 - 1} \sin(2s\Omega t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette fois, la raideur tournante apparente du système varie périodiquement au cours du temps avec une période $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Remarque :

- Au cours de l'ouverture de la fissure, la perte de rigidité Δ_r se fait de façon continue (figure 2.5.b) et l'approximation en série de Fourier est rapide (figure 2.6). Une hypothèse plus sévère aurait été de considérer une fissure s'ouvrant de façon brutale ; la fonction $k(\phi)$ associée serait alors une fonction saut et la série de Fourier correspondante nécessiterait un ordre de troncature S plus élevé.

2.4 Equation de mouvement dans le cas général

Dans le cas des oscillateurs tournants, les degrés de liberté $x(t)$ et $y(t)$ peuvent être couplés, il est alors pratique de passer en coordonnées complexes $z(t) = x(t) + iy(t)$ [Genta, 1988]. Les équations d'équilibre (2.9) et (2.14) s'écrivent alors dans le repère Galiléen

$$\begin{cases} m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + k_{r1}(t)\bar{z}(t) + \epsilon_n\bar{z}(t) = md\Omega^2 e^{i\Omega t} \\ m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + k_{r2}(t)z(t) + \epsilon_n\bar{z}(t) = m \times g \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\delta = \frac{k_{nx} + k_{ny}}{2} + k_0$. La raideur variable du système S_1 est harmonique, de période $T_1 = \frac{\pi}{\Omega}$ et peut s'écrire en coordonnées complexes

$$k_{r1}(t) = -\Delta_r e^{i2\Omega t}. \quad (2.18)$$

La raideur variable du système S_2 est poly-harmonique de période $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}$. En posant $\epsilon_D = -\frac{3}{8}\Delta_r$, $\epsilon_R = -\frac{1}{8}\Delta_r$ et $\epsilon_s = \frac{\Delta_r}{\pi} (-1)^s \frac{1+s}{4s^2-1}$, on obtient la série de Fourier complexe

$$k_{r2}(t) = \epsilon_D e^{i\Omega t} + \epsilon_R e^{-i\Omega t} + \sum_{s=-S}^S \epsilon_s e^{i2s\Omega t}. \quad (2.19)$$

La présence de "défauts" fait donc apparaître des coefficients périodiques dans les équations différentielles linéaires données en (2.17). Outre l'écriture complexe propre aux systèmes tournants, on reconnaît en (2.17) l'équation d'équilibre d'un oscillateur linéaire paramétrique. En se référant aux oscillateurs paramétriques de la partie précédente (voir aussi l'annexe A), on devine que les paramètres de contrôle de nos oscillateurs tournants seront les variables Ω et Δ_r .

Les équations (2.17) étant linéaires, la réponse du système est la somme

$$z(t) = z_g(t) + z_p(t). \quad (2.20)$$

- D'une part, $z_g(t)$ est la réponse transitoire du système. C'est la solution de l'équation homogénéisée associée aux équations (2.17) et donc la réponse vibratoire du système libre. Elle nous renseigne sur la stabilité de l'oscillateur.
- D'autre part, $z_p(t)$ est la réponse permanente ou forcée. C'est une solution particulière des équations (2.17).

Remarques :

- Les systèmes S_1 et S_2 conduisent à des équations d'équilibre de même nature mathématiques mais la raideur $k_{r1}(t)$ est constante dans le repère tournant et ne doit sa périodicité qu'au passage dans le repère Galiléen alors que la raideur $k_{r2}(t)$ est variable dans les deux repères.
- En considérant le défaut nul $\Delta_r = 0$, les équations d'équilibre (2.17) redeviennent celles de l'oscillateur tournant classique traité dans le chapitre précédent.

3 L'oscillateur paramétrique tournant libre

Dans cette partie, on étudie le comportement linéaire de l'oscillateur paramétrique tournant libre, à savoir les solutions fondamentales de l'équation d'équilibre homogénéisée et leur stabilité. Pour ce faire, on adapte les théories mathématiques des équations différentielles à coefficients périodiques (partie 1) à l'étude de nos oscillateurs afin d'obtenir une méthode numérique, simple et rigoureuse, permettant de traiter l'influence des défauts sur nos oscillateurs. On explique cette méthode à travers les systèmes S_1 et S_2 abordés précédemment, les équations différentielles non autonomes à étudier sont donc

$$\begin{cases} m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + k_{r1}(t)\bar{z}(t) + \epsilon_n\bar{z}(t) = 0 & \text{pour } S_1 \\ m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + k_{r2}(t)z(t) + \epsilon_n\bar{z}(t) = 0 & \text{pour } S_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

3.1 Equation d'équilibre dans le domaine fréquentiel

On distingue plusieurs méthodes pour résoudre les équations d'équilibre (2.21) selon la façon de calculer la matrice monodrome de la théorie de Floquet [Han, 2005]. Dans ce document, l'obtention des solutions se fera dans le domaine fréquentiel où le calcul numérique de la réponse du système est plus efficace que dans le domaine temporel par intégration directe [Lee et al., 2006].

3.1.1 Théorie de Floquet

Appliquons la théorie de Floquet énoncée précédemment à l'équation différentielle linéaire complexe (2.21). Etant donné que les systèmes S_1 et S_2 possèdent deux degrés de liberté, la solution fondamentale $z(t)$ sera la somme des solutions linéairement indépendantes

$$z(t) = Z_{gD}(t)e^{i\omega t} + Z_{gR}(t)e^{-i\bar{\omega}t} \quad (2.22)$$

où $Z_{gD}(t)$ et $Z_{gR}(t)$ sont des fonctions inconnues mais périodiques de période T_1 ou T_2 selon l'oscillateur paramétrique tournant considéré. $i\omega$ et $-i\bar{\omega}$ sont les exposants caractéristiques de la solution fondamentale.

En posant la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T}$ on peut exprimer la fonction inconnue $z_g(t)$ de période T en série de Fourier complexe

$$z_g(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_{gj}e^{ij2\pi f_0 t}. \quad (2.23)$$

En développant les fonctions $Z_{gD}(t)$ et $Z_{gR}(t)$ selon la série convergente (2.23), on obtient les solutions fondamentales

$$\begin{cases} z_1(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_{gDj}e^{i(\omega+2j\Omega)t} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_{gRj}e^{-i(\bar{\omega}+2j\Omega)t} & \text{pour } S_1 \\ z_2(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_{gDj}e^{i(\omega+j\Omega)t} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_{gRj}e^{-i(\bar{\omega}+j\Omega)t} & \text{pour } S_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

La solution fondamentale de l'équation différentielle (2.21) peut donc être exprimée comme une somme des contributions sur différents harmoniques. $\omega + 2j\Omega$ et $\omega + j\Omega$ sont respectivement les pulsations complexes de la solution fondamentale du système S_1 et S_2 . ω est la pulsation fondamentale de la solution. Etant donné que le système possède $n = 2$ degrés de liberté, on distinguera ω_x et ω_y la pulsation fondamentale selon l'axe x et y .

3.1.2 Déterminant de Hill

En remplaçant les solutions fondamentales $z_1(t)$ et $z_2(t)$ par leur expression (2.24) dans les équations homogénéisées (2.21) et en annulant les termes pour chaque j , on obtient une infinité d'équations dans le domaine fréquentiel que l'on peut mettre sous la forme d'un déterminant que l'on nomme déterminant de Hill. En théorie, le déterminant de Hill est de dimension infini mais dans la pratique, on ne choisit qu'un nombre fini d'équations, le déterminant sera donc tronqué à l'ordre j_{max} . Ainsi, dans le cas du défaut de forme et par le couplage rotor-stator, le déterminant de Hill associé au système S_1 s'écrit [Genta, 2005], au premier ordre ($j_{max} = 1$)

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & A_{-1} & \epsilon_n & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & \epsilon_n & B_{-1} & -\Delta_r & 0 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & -\Delta_r & A_0 & \epsilon_n & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & \epsilon_n & B_0 & -\Delta_r & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 0 & -\Delta_r & A_1 & \epsilon_n & - \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_n & B_1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ Z_{gD-1} \\ \bar{Z}_{gR-1} \\ Z_{gD0} \\ \bar{Z}_{gR0} \\ Z_{gD1} \\ \bar{Z}_{gR1} \\ - \end{Bmatrix} \approx \{0\} \quad (2.25)$$

où $A_j = \delta - m(\omega + 2j\Omega)^2 + ic(\omega + 2j\Omega) - i\Omega c_r$ et $B_j = \delta - m(\omega + 2j\Omega)^2 + ic(\omega + 2j\Omega) + i\Omega c_r$.

Dans le cas de la fissure respirante, le déterminant au premier ordre associé au système S_2 se met sous la forme [Lazarus et al., 2007]

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & A_{-1} & \epsilon_n & \epsilon_R & 0 & \epsilon_{-1} & 0 & - \\ - & \epsilon_n & B_{-1} & 0 & \epsilon_D & 0 & \epsilon_1 & - \\ - & \epsilon_D & 0 & A_0 & \epsilon_n & \epsilon_R & 0 & - \\ - & 0 & \epsilon_R & \epsilon_n & B_0 & 0 & \epsilon_D & - \\ - & \epsilon_1 & 0 & \epsilon_D & 0 & A_1 & \epsilon_n & - \\ - & 0 & \epsilon_{-1} & 0 & \epsilon_R & \epsilon_n & B_1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ Z_{gD-1} \\ \bar{Z}_{gR-1} \\ Z_{gD0} \\ \bar{Z}_{gR0} \\ Z_{gD1} \\ \bar{Z}_{gR1} \\ - \end{Bmatrix} \approx \{0\}, \quad (2.26)$$

où $A_j = \delta + \epsilon_0 - m(\omega + j\Omega)^2 + ic(\omega + j\Omega) - i\Omega c_r$ et $B_j = \delta + \epsilon_0 - m(\omega + j\Omega)^2 + ic(\omega + j\Omega) + i\Omega c_r$.

Les déterminants de Hill (2.25) et (2.26) sont les problèmes aux valeurs propres en ω associés à l'équation homogénéisée (2.21). Pour une vitesse de rotation Ω et un ordre de troncature j_{max} choisis, on obtient un jeu de $2n \times (2j_{max} + 1)$ valeurs propres ω_i où $i \in [1, 2n \times (2j_{max} + 1)]$ de la forme $\pm(\omega + 2j\Omega)$ ou $\pm(\omega + j\Omega)$ selon que l'on étudie le système S_1 ou S_2 . Selon les observations de Hill, la précision des valeurs propres obtenues dépend de l'ordre de troncature choisi [Hill, 1886].

3.1.3 Sur la convergence des déterminants infinis

Posons a_{kl} le terme correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne du déterminant. Dans une note relative aux travaux de Hill [Poincaré, 1886], Henri Poincaré (1854-1912) valide mathématiquement les observations de ce dernier et démontre que le déterminant (associé à l'équation de Hill non amorti (2.3)) converge s'il y a convergence de la série

$$\sum_{k \neq l} \left| \frac{a_{kl}}{a_{kk}} \right|. \quad (2.27)$$

En appliquant ce résultat à nos oscillateurs paramétriques tournants, les déterminants des systèmes S_1 et S_2 non amortis (2.25) et (2.26) convergeront si les séries

$$\Sigma_1 = \sum_{k \neq l} \left| \frac{a_{kl}}{\delta - m(\omega + 2j\Omega)^2} \right| \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \sum_{k \neq l} \left| \frac{a_{kl}}{\delta + \epsilon_0 - m(\omega + j\Omega)^2} \right| \quad (2.28)$$

convergent. Or la série (2.27) est le produit de deux autres séries

$$\sum_{k \neq l} |a_{kl}| \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{|a_{kk}|}. \quad (2.29)$$

La première série est convergente car ses termes sont les coefficients de Fourier nécessaires à l'expression des fonctions raideurs $k_{r1}(t)$ (2.18) et $k_{r2}(t)$ (2.19) périodiques des oscillateurs S_1 et S_2 . On peut même ajouter que la convergence du système S_1 sera plus rapide que celle du système S_2 . Ce résultat est directement visible sur les déterminants (2.25) et (2.26) et illustre l'influence de la forme de la fonction raideur sur le couplage entre les différents harmoniques du déterminant de Hill.

La seconde série donnée en (2.29) est aussi convergente. Plus la vitesse de rotation est faible vis-à-vis de la pulsation naturelle de l'oscillateur mécanique équivalent ($\Delta_r = 0$) et plus la vitesse de convergence de la série, et donc du déterminant de Hill, est lente.

La série (2.27) étant le produit de deux séries convergentes, elle converge. Selon le système étudié et pour une vitesse de rotation Ω donnée, il existe donc un ordre de troncature numérique $j_{max} = j_{conv}$ où l'on considère que le reste de la série (2.28) est suffisamment petit et donc que le déterminant associé converge.

Pour un ordre de troncature $j_{max} = j_{conv}$, les systèmes linéaires (2.25) et (2.26) tendent vers une expression exacte de l'équation de mouvement (2.21) dans le domaine fréquentiel. Pour une vitesse de rotation donnée, les valeurs propres obtenues tendent alors vers les pulsations complexes exactes de la solution fondamentale; les contributions Z_{gDj} et Z_{gRj} devenant négligeables pour les pulsations d'harmonique $j > j_{conv}$; les vecteurs propres associés tendent vers les modes propres du système.

Remarques :

- Les résultats énoncés précédemment pour les systèmes non amortis sont valables en présence d'amortissement. Notamment, l'ordre de troncature j_{conv} reste le même et les valeurs propres obtenues sont les pseudo-pulsations complexes de l'oscillateur (on ne peut par contre plus parler de modes propres dans le cas des systèmes amortis).
- Pour un ordre j_{max} donné, la valeur propre correspondant à $j = k$ est plus précise que celle correspondant à $j = l$ si $k < l$. Ainsi, les pulsations fondamentales ω_x et ω_y correspondant à $j = 0$ convergent les plus rapidement et pour un ordre $j_{max} < j_{conv}$.

3.2 Les modes propres paramétriques

Pour $j_{max} = j_{conv}$ et pour une vitesse de rotation donnée, on a vu que le déterminant de Hill nous permettait d'obtenir les modes propres des oscillateurs paramétriques. En prenant comme valeur propre la pulsation fondamentale selon x ou y , notée $\omega_{x,y}$, les vecteurs propres associés sont les modes propres des systèmes S_1 et S_2 dans chaque direction et s'écrivent

$$\begin{cases} z_1(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{gDj} e^{i(\omega_{x,y} + 2j\Omega)t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{gRj} e^{-i(\bar{\omega}_{x,y} + 2j\Omega)t} & \text{pour } S_1 \\ z_2(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{gDj} e^{i(\omega_{x,y} + j\Omega)t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{gRj} e^{-i(\bar{\omega}_{x,y} + j\Omega)t} & \text{pour } S_2 \end{cases} \quad (2.30)$$

Contrairement aux cas des oscillateurs tournants du chapitre 1, les deux modes propres indépendants selon x et y sont complexes, ils couplent les déplacements transverses (figure 2.7 et 2.9). Ils sont poly-harmoniques et leur contenu fréquentiel dépend de l'ordre de convergence j_{conv} : le nombre d'harmoniques et la pulsation fondamentale de leurs spectres de fréquences dépend de la forme de la fonction raideur $k_r(t)$ d'une part et de la vitesse de rotation du système d'autre part.

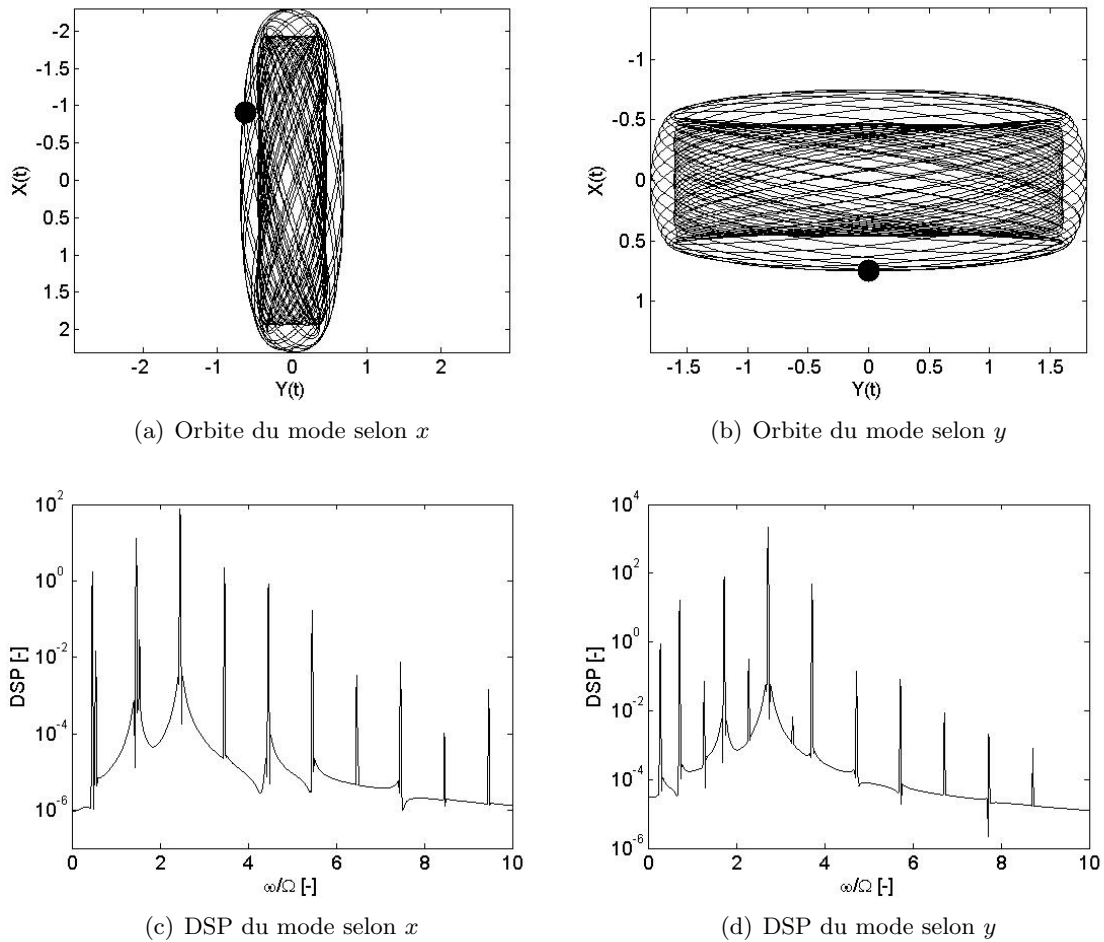


Figure 2.7: Modes propres paramétriques du système S_2 pour $\Omega_* = 0.34$ et $j_{conv} = 5$

On peut voir à travers les figures 2.7.c et 2.9.c qu'à vitesse de rotation égale, les modes du système S_2 contiennent plus d'harmoniques que le système S_1 , l'ordre j_{conv} étant plus élevé. L'augmentation de la vitesse de rotation a pour conséquence de diminuer l'ordre j_{conv} et donc le nombre d'harmoniques contenus (figure 2.9). Dans le domaine surcritique ($\Omega > \omega_{0y}$), les modes observés tendent vers un mode découplé en x et y de pulsation propre ω_x et ω_y . A ces vitesses de rotation, la raideur tournante apparente $k_r(t)$ n'est plus variable mais constante, le système se comporte alors comme l'oscillateur harmonique tournant du chapitre précédent.

A l'image des modes propres classiques, les modes propres paramétriques sont linéaires. La solution fondamentale de l'équation de l'oscillateur paramétrique libre peut donc s'exprimer sur la base de l'ensemble de ces modes comme une combinaison linéaire dépendant des conditions initiales (figure 2.8). Le spectre de fréquences de la solution fondamentale est donc contenu dans celui de l'ensemble

des modes.

Le comportement vibratoire du système S_2 est calculé au moyen du logiciel Matlab, ses données numériques adimensionnelles sont $\epsilon_k = \frac{\Delta r}{k_0} = 0.4$ et $\alpha_n = \frac{k_{ny}}{k_{nx}} = 2$ (degré d'anisotropie de palier). On résout le problème aux valeurs propres (2.26) pour une vitesse de rotation sous-critique adimensionnée $\Omega_* = \frac{\Omega}{\omega_{0x}} = 0.34$ et un ordre de convergence $j_{conv} = 5$. Sur les figures 2.7.a et 2.7.b, on trace respectivement les orbites des deux modes linéaires paramétriques selon x et y dans l'espace physique (x, y) . Les Densités Spectrales de Puissance correspondantes figures 2.7.c et 2.7.d nous montrent le contenu fréquentiel des modes. Chaque mode possède une pulsation fondamentale ω_x et ω_y et des harmoniques en Ω . Les vibrations libres du système S_2 non amorti (2.21) sont calculées par un algorithme d'intégration temporelle pour $\Omega_* = 0.34$ et $x_0 = 0.02$ m ; on montre respectivement sur la figure 2.8.a et 2.8.b l'orbite de la solution fondamentale dans (x, y) et sa DSP associée. Les modes propres déterminent le contenu fréquentiel de la solution qui est une combinaison linéaire de ceux-ci.

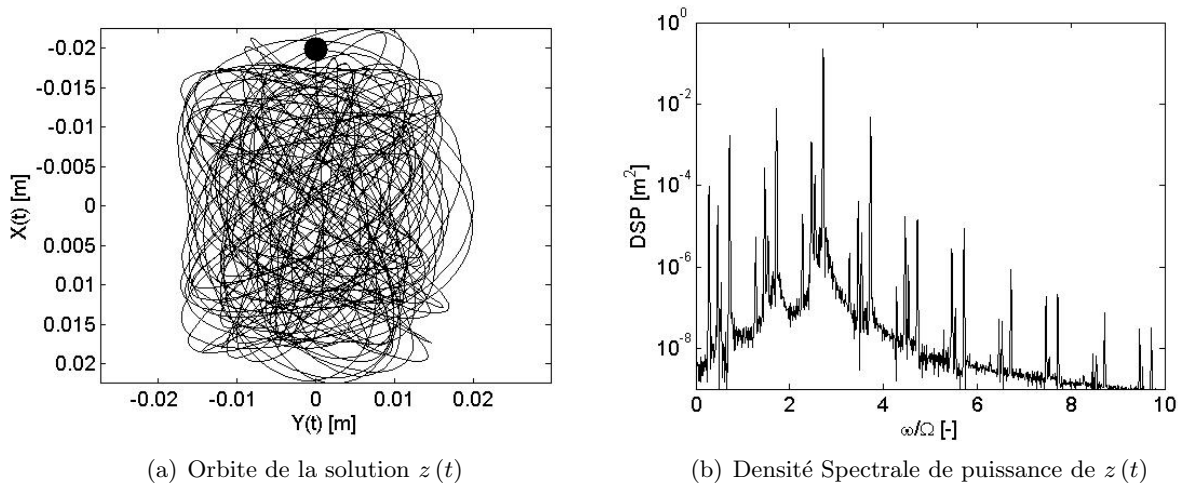


Figure 2.8: Solution de l'équation libre de S_2 pour $\Omega_* = 0.34$ et $x(0) = 0.02$

Les données numériques du système S_1 sont un degré d'anisotropie de raideur tournante $\alpha_r = \frac{k_{r\eta}}{k_{r\xi}} = 1.5$ et un degré d'anisotropie de palier $\alpha_n = \frac{k_{ny}}{k_{nx}} = 1.5$. On trace respectivement sur la figure 2.9.a et 2.9.b l'orbite des modes propres linéaires paramétriques en 2Ω selon x pour $\Omega_* = 0.34$ et $\Omega_* = 2$. Les DSP associées sont dessinées figures 2.9.c et 2.9.d et nous montrent que les modes possèdent moins d'harmoniques que dans le cas S_2 (couplage de $k_r(t)$ moins important). En régime sur-critique, les modes deviennent harmoniques et s'apparentent aux modes classiques des oscillateurs tournants harmoniques associés du chapitre 1.

Remarques :

- Dans le cas du système S_2 , si nous avons choisi le cas d'une ouverture de fissure de façon brutale (fonction $k_r(t)$ saut), le contenu fréquentiel des modes propres du système aurait été encore plus important.
- La propriété de linéarité des modes propres des oscillateurs paramétriques tournants va nous être d'une très grande utilité dans le cas de la modélisation éléments finis. En effet, par analogie avec les modes classiques, on va pouvoir étudier le système physique sur une base tronquée constituée des modes propres linéaires paramétriques.

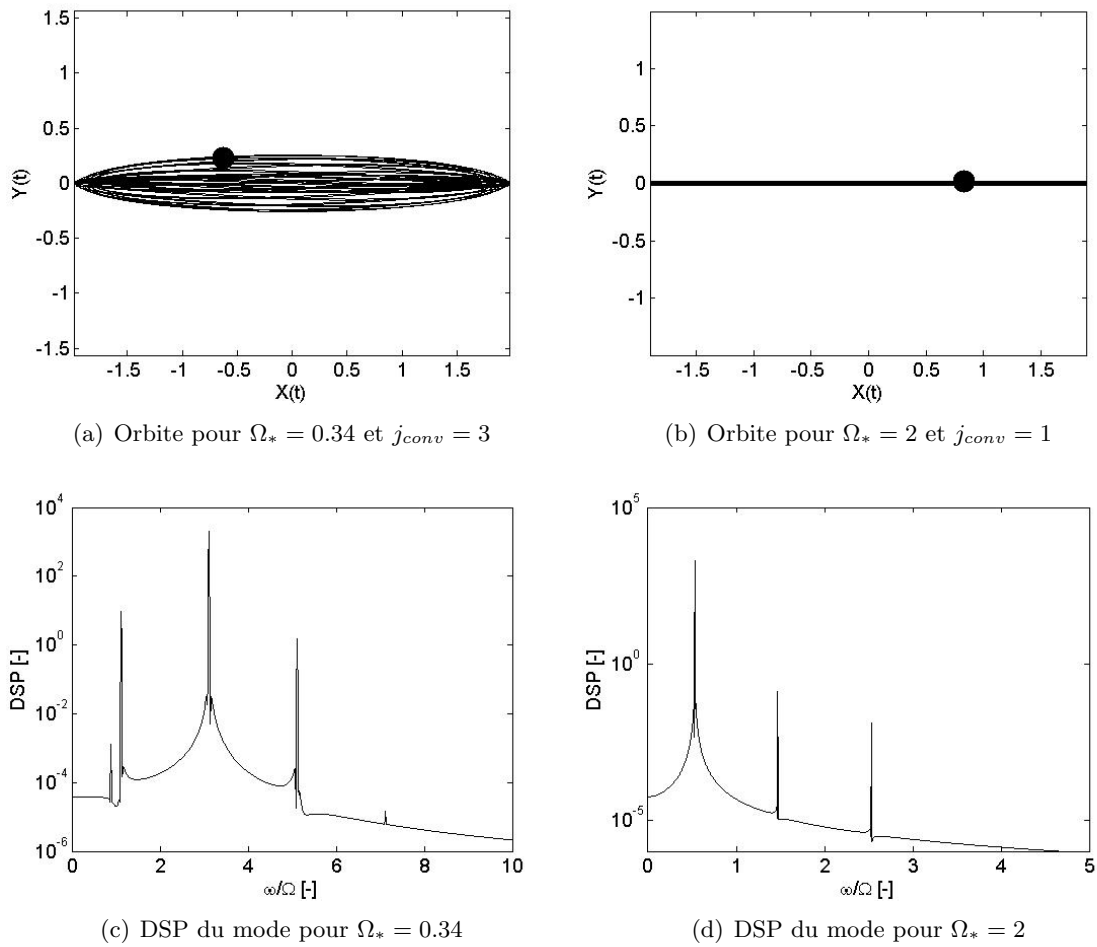


Figure 2.9: Modes propres paramétriques selon x du système S_1

3.3 Stabilité du système

Conformément à la théorie de Floquet et en accord avec le théorème de Liapunov, ce sont les parties réelles des exposants caractéristiques $i\omega$ et $-i\omega$ de la solution fondamentale de l'équation d'équilibre de l'oscillateur paramétrique libre qui déterminent la stabilité du système. Dans cette partie, on va donc étudier les valeurs propres ω du déterminant de Hill en fonction des différents paramètres de l'oscillateur tournant ($\Omega, \alpha_r, \alpha_n, \zeta_r, \zeta_n, \dots$).

3.3.1 Diagramme de stabilité

L'étude de la stabilité d'un oscillateur paramétrique se fait à travers le diagramme de Strutt (voir annexe A). Pour déterminer la stabilité des systèmes S_1 et S_2 , il nous suffit d'analyser le signe de l'exposant caractéristique obtenu en calculant l'équation caractéristique associée au déterminant de Hill à l'ordre j_{max} pour un jeu de paramètres (Ω, Δ_r) . Si la partie imaginaire d'une fréquence propre ω est négative (ou $\Re(s) > 0$), le système sera dynamiquement instable (convention adoptée pour les oscillateurs tournants dans ce document). Dans le cas de nos oscillateurs paramétriques tournants,

les cartes de stabilité représentent la partie imaginaire de la valeur propre ω_m la plus préjudiciable ($\Im(\omega_m) < \Im(\omega_i) \forall i \in [1, 2n \times (2j_{max} + 1)]$) dans l'espace (Ω, Δ_r) (figures 2.10 et 2.11).

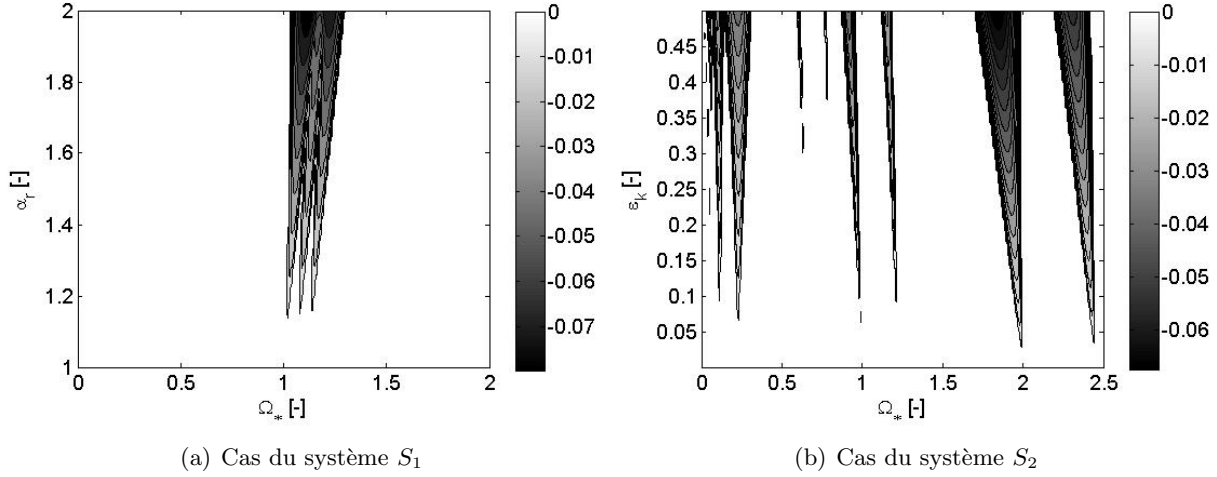


Figure 2.10: Diagramme de stabilité du système non amorti pour $j_{max} = 2$

Intéressons nous d'abord aux cas des oscillateurs paramétriques tournants non amortis (figure 2.10). Les systèmes deviennent dynamiquement instables pour différents jeux de paramètres (Ω, Δ_r) , c'est l'instabilité paramétrique. Les régions d'instabilité observées peuvent être expliquées par le critère de Hsu [Hsu, 1963]. En effet, l'équation d'équilibre des systèmes S_1 et S_2 libres non amortis (2.9) et (2.14) peut s'écrire en coordonnées réelles

$$\ddot{q} + \mathbb{B}(t)q = 0 \quad \text{avec} \quad q = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

où $\mathbb{B}(t)$ est une matrice carrée réelle de dimension 2×2 dont les coefficients $b_{ij}(t)$ sont périodiques de période T . En soumettant le système (2.31) à de petites perturbations périodiques Δ_r , on peut réécrire le système sous la forme

$$\ddot{q} + \left(\mathbb{B}^{(0)} + \Delta_r \mathbb{B}(\Omega t) \right) q = 0. \quad (2.32)$$

La matrice $\mathbb{B}(\Omega t)$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier

$$\mathbb{B}(\Omega t) = \sum_{s=1,2,\dots}^S \left(\mathbb{D}^{(s)} \cos s\Omega t + \mathbb{E}^{(s)} \sin s\Omega t \right), \quad (2.33)$$

où $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ et s est un entier fini. En posant $\omega_i < \omega_j$ pour $i < j$, $\mathbb{B}^{(0)}$ s'écrit dans le cas de nos deux oscillateurs

$$\mathbb{B}^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_0 + k_{nx}}{m}} = \omega_{0x} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + k_{ny}}{m}} = \omega_{0y}. \quad (2.34)$$

Le système non autonome (2.31) est soumis à une petite excitation paramétrique Δ_r (2.32) et les valeurs ω_1 et ω_2 sont distinctes. Par une méthode de perturbation au premier ordre, Hsu affirme que

l'instabilité paramétrique due à Δ_r apparaîtra ($\Delta_r \rightarrow 0$) au voisinage des fréquences d'excitation Ω [Hsu, 1963, Dufour and Berlioz, 1998, Politopoulos, 2000]

$$\frac{2\omega_k}{s} + \Delta_r \lambda \quad k = 1, 2 \quad (2.35)$$

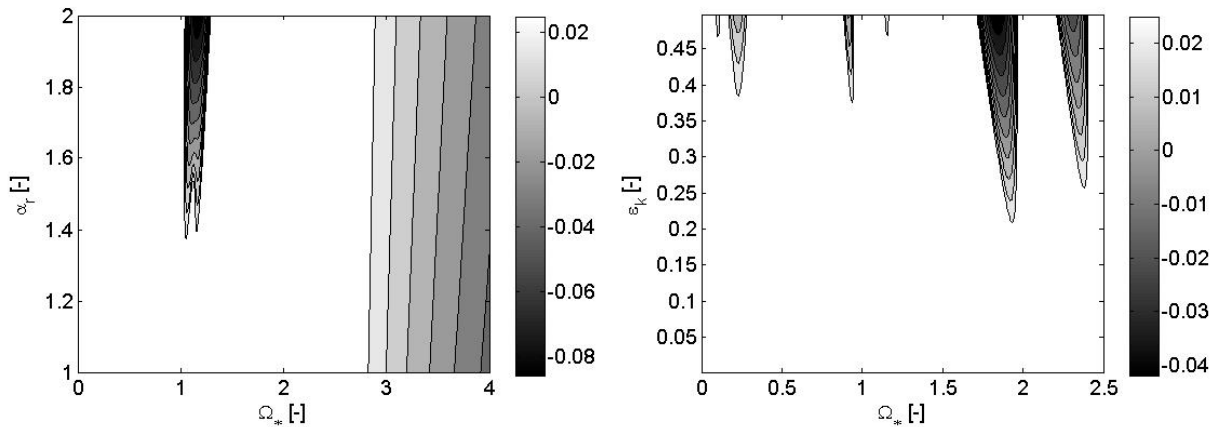
et

$$\frac{\omega_i + \omega_j}{s} + \Delta_r \lambda \quad i, j = 1, 2 \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } b_{ij}(t) = b_{ji}(t), \quad (2.36)$$

ou

$$\frac{\omega_i - \omega_j}{s} + \Delta_r \lambda \quad i, j = 1, 2 \quad \text{pour } i \neq j, i > j \text{ et } b_{ij}(t) = -b_{ji}(t) \quad (2.37)$$

avec λ un nombre réel fini quelconque.



(a) Amortissement tournant sur S_1

(b) Amortissement fixe sur S_2

Figure 2.11: Influence de l'amortissement sur le diagramme de stabilité

Dans le cas du système S_1 , la matrice $\mathbb{B}(t)$ est symétrique, les régions d'instabilité apparaîtront ($\alpha_r \rightarrow 1$) pour des fréquences de rotation données par (2.35) et (2.36). La matrice $\mathbb{B}(\Omega t)$ est harmonique et s est unique et vaut $s = 2$, on observe donc une seule région d'instabilité aux fréquences ω_{0x} , ω_{0y} et $\frac{\omega_{0x} + \omega_{0y}}{2}$ (figure 2.10.a).

Dans le cas du système S_2 , $\mathbb{B}(t)$ est antisymétrique, la stabilité est régie par les équations (2.35) et (2.37). $\mathbb{B}(\Omega t)$ est périodique et la série de Fourier s'écrit pour $s = 1, 2, \dots, S$. On observe donc plusieurs régions d'instabilité qui apparaissent ($\epsilon_k = 0$) aux fréquences $\frac{2\omega_{0x}}{s}$, $\frac{2\omega_{0y}}{s}$ et $\frac{\omega_{0x} - \omega_{0y}}{s}$ (figure 2.10.b).

La précision des domaines d'instabilité obtenus augmente avec l'ordre de troncature j_{max} . Plus la région est associée à un coefficient s faible et plus elle converge vite. On appelle la région d'instabilité principale la région associée au coefficient s minimum, sa convergence est la plus rapide.

L'amortissement visqueux fixe c_n s'ajoute directement sur la partie imaginaire des valeurs propres du système ($\Im(\omega) + \zeta_n$), et ce, indépendamment de la vitesse de rotation : il stabilise donc le système quel que soit Ω (figure 2.11.b). On a vu que l'amortissement visqueux c_r se comportait de la même manière jusqu'à une vitesse de rotation seuil qui augmente avec l'anisotropie de raideur fixe. Dans

les configurations réelles, cet amortissement est bénéfique vis-à-vis des instabilités paramétriques mais déstabilise le système aux grandes vitesses de rotation Ω (figure 2.11.a).

La présence d'amortissement dans les cas pratiques fait disparaître généralement les régions d'instabilité secondaires. Seules quelques régions, dont la région d'instabilité principale qui est la plus sévère, subsistent. Contrairement aux cas des modes propres paramétriques qui sont obtenus pour $j_{max} = j_{conv}$, l'étude de la stabilité se fait en choisissant un ordre de troncature plus faible (figure 2.11) suffisant pour modéliser correctement les premières régions d'instabilités.

On trace sur les figures 2.10 et 2.11 les cartes de stabilité des systèmes S_1 ($\alpha_n = 1.5$) et S_2 ($\alpha_n = 2$) pour différentes valeurs d'amortissement. Un ordre $j_{max} = 2$ est suffisant pour obtenir une bonne approximation des premières régions d'instabilité. La figure 2.10 illustre bien la différence entre les fonctions raideur $k_r(t)$ modélisées : $k_{r1}(t)$ est harmonique et $k_{r2}(t)$ est poly-harmonique. Dans le cas S_2 , le système est auto-excité au double de la fréquence propre du système sain, cette propriété est caractéristique de nombreux oscillateurs paramétriques (voir annexe A). On remarque dans le cas des systèmes amortis (figure 2.11) que l'instabilité paramétrique est plus sévère que l'instabilité due à l'amortissement tournant.

Remarque :

- Le critère de Hsu est écrit au premier ordre, il ne nous permet pas de localiser toutes les régions d'instabilité des oscillateurs paramétriques. Ainsi, ce critère nous renseignerait seulement sur la région d'instabilité principale de l'équation de Mathieu. La troisième région d'instabilité du diagramme de stabilité observée sur la figure 2.10.b n'est pas modélisée non plus par le critère. Heureusement, dans les cas pratiques, seules les régions envisagées par le critère nous importent.

3.3.2 Diagramme de Campbell

Un autre espace d'observation particulièrement bien adapté aux oscillateurs paramétriques tournants est l'évolution des valeurs propres des déterminants de Hill de S_1 et S_2 en fonction de la vitesse de rotation Ω . Par analogie avec l'oscillateur tournant du chapitre 1 (cas S_1 où $\Delta_r = 0$), cette évolution sera nommée le diagramme de Campbell du système.

On l'a vu précédemment, la partie réelle nous renseigne sur l'évolution des fréquences des solutions fondamentales alors que la partie imaginaire régit la stabilité de l'oscillateur (convention retenue tout au long de l'ouvrage). Pour certaines plages de rotation (déterminées en partie grâce au critère de Hsu), il y a confusion des fréquences de la solution fondamentale, la partie imaginaire associée devient alors négative, c'est l'instabilité dynamique du système (figure 2.12).

Intéressons-nous à la région d'instabilité principale (illustrée par trois sous domaines conformément au critère de Hsu). Les confusions de fréquences qui apparaissent selon (2.35) concernent l'harmonique fondamentale et le premier harmonique des deux modes propres en x et en y . La première instabilité rencontrée est celle du mode de plus faible rigidité, dans notre cas le mode selon x : c'est l'instabilité du mode paramétrique en x par confusion des fréquences ω_{0x} et $\omega_{0x} + 2\Omega$ (ou $\omega_{0x} + \Omega$ pour S_2). Le mode paramétrique en y devient lui aussi instable par confusion des fréquences ω_{0y} et $\omega_{0y} + 2\Omega$ (ou $\omega_{0y} + \Omega$ pour S_2). La région d'instabilité intermédiaire données par (2.36) ou (2.37) est la conséquence d'une confusion de l'harmonique fondamental entre les deux modes, à savoir ω_{0x} et ω_{0y} (le comportement aux limites de stabilité des modes est donné en annexe A).

Les régions d'instabilité secondaires se comportent de la même manière mais font intervenir des harmoniques d'autant plus élevés que la région d'instabilité correspond à une valeur s du critère de Hsu élevée (on décale la confusion de fréquence d'un harmonique). Ainsi, la région d'instabilité principale converge la plus rapidement étant donnée qu'elle est associée à l'harmonique fondamental.

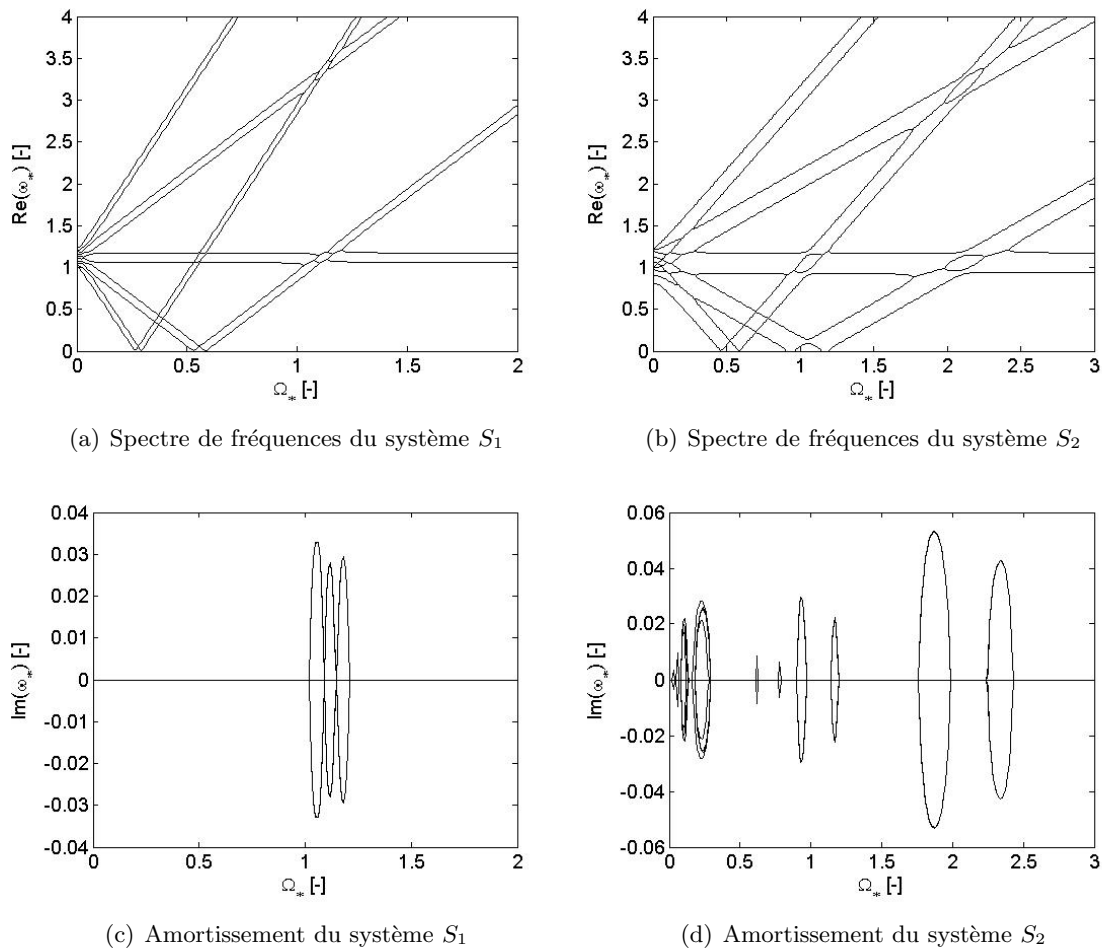


Figure 2.12: Diagramme de Campbell des systèmes non amortis pour $j_{max} = 2$

On trace sur la figure 2.12 l'évolution des valeurs propres des systèmes libres S_1 et S_2 définis précédemment pour un ordre de troncature $j_{max} = 2$ et un amortissement nul. On obtient une bonne approximation des valeurs propres jusqu'à l'ordre $j = 1$ et donc des deux premières régions d'instabilité par confusion de fréquences du système. Les harmoniques fondamentaux de la solution ne varient pratiquement pas au cours de la rotation ; ils convergent vers les fréquences moyennées $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}(\phi) + k_{nx}}{m}}$ et $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}(\phi) + k_{ny}}{m}}$ où $\tilde{k}(\phi)$ est la raideur tournante constante moyenne.

La présence d'amortissement visqueux fixe ou tournant ajouté au système ne modifie pas la valeur des fréquences de la solution dans le régime sous-critique (dans le cas d'un amortissement raisonnable). Elle stabilise le système en ajoutant directement l'amortissement réduit ζ_r ou ζ_n à la partie imaginaire des valeurs propres (figure 2.13 et 2.14). La stabilité du système est obtenue si l'amortissement réduit ajouté est supérieur à l'amortissement négatif engendré par l'amplitude du défaut Δ_r .

On ajoute respectivement un amortissement réduit $\zeta_n = 0.025$ puis $\zeta_r = 0.025$ à nos oscillateurs et on trace les diagrammes de Campbell associés sur les figures 2.13 et 2.14. Dans le régime sur-

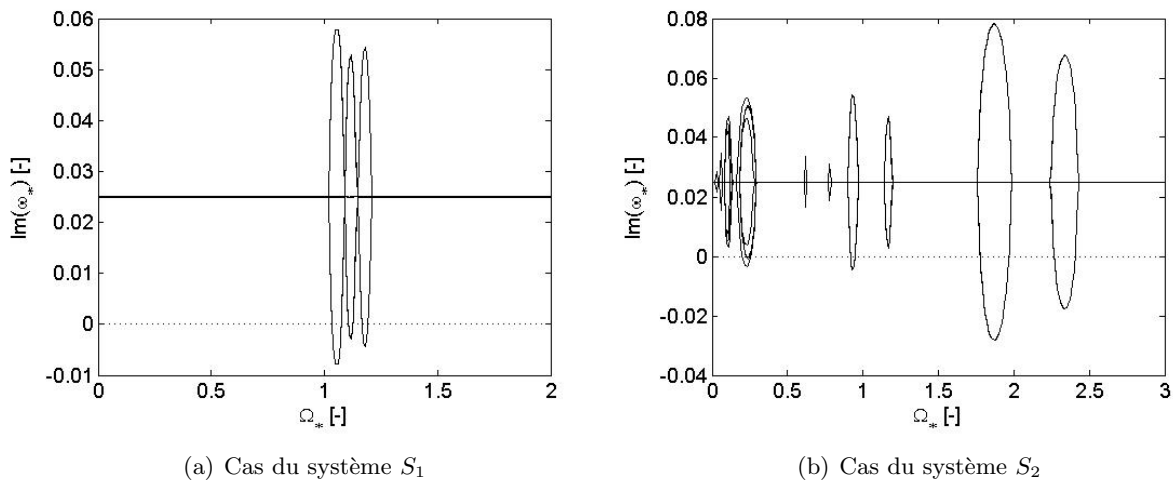


Figure 2.13: Influence de l'amortissement fixe ($\zeta_n = 0.025$) sur le diagramme de Campbell

critique, on observe un moyennage de la raideur tournante apparente du système. L'oscillateur obtenu devient alors équivalent à celui du chapitre 1 où la raideur tournante est isotrope. Sous l'effet de l'amortissement tournant, il y a confusion des fréquences en x et y : c'est l'instabilité dynamique pour $\Omega > \Omega_s$ dans le domaine sur-critique (voir chapitre 1).

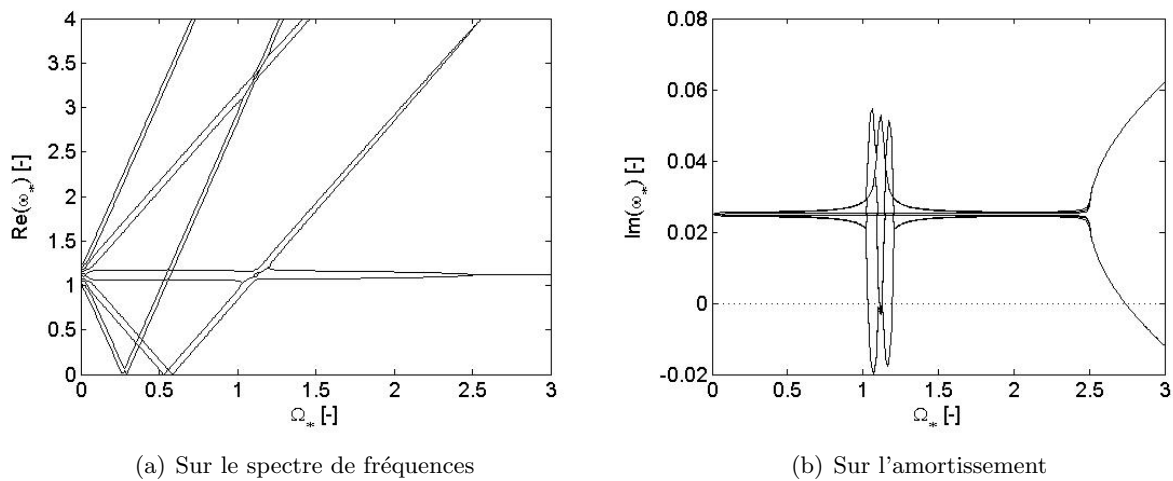


Figure 2.14: Influence de l'amortissement tournant ($\zeta_r = 0.025$) sur le système S_1

Remarque :

- Le diagramme de Campbell calculé pour un ordre $j_{max} < j_{conv}$ ne nous donne pas le contenu fréquentiel exact du mouvement libre du système qui dépend, dans le cas des oscillateurs paramétriques, de la vitesse de rotation du système. L'utilisation du terme "diagramme de Campbell" peut donc être considéré comme un abus de langage. Il est préférable d'étudier le spectre de fréquences de la solution fondamentale à travers les modes paramétriques pour chaque Ω .

4 Réponse forcée d'un oscillateur paramétrique tournant

Conformément à l'équation (2.20), il nous reste maintenant à étudier le régime permanent des oscillateurs S_1 et S_2 sous l'effet des forces extérieures harmoniques (cas classique d'une machine tournante en régime nominal) qui sont principalement, dans le cas des oscillateurs tournants, la force de balourd (déséquilibre du rotor) et le poids propre (cas des rotors horizontaux). On rappelle les équations d'équilibre pour les systèmes S_1 et S_2

$$\begin{cases} m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r) z(t) + k_{r1}(t) \bar{z}(t) + \epsilon_n \bar{z}(t) = md\Omega^2 e^{i(\Omega t + \phi)} \\ m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r) z(t) + k_{r2}(t) z(t) + \epsilon_n \bar{z}(t) = m \times g \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous traiterons indépendamment l'effet des deux forces ; le système étant considéré linéaire, le régime permanent de l'oscillateur paramétrique est la somme des réponses à chaque force.

4.1 La réponse au balourd

Le régime permanent est une solution particulière de l'équation (2.38) et s'écrit sur la base des modes propres paramétriques définis précédemment. En s'inspirant de l'expression des modes (2.30), la réponse au balourd s'écrit

$$\begin{cases} z_1(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pDj} e^{i(1+2j)\Omega t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pRj} e^{-i(1+2j)\Omega t} & \text{pour } S_1 \\ z_2(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pDj} e^{i(1+j)\Omega t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pRj} e^{-i(1+j)\Omega t} & \text{pour } S_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

En remplaçant $z_1(t)$ par son expression (2.39) dans l'équation d'équilibre (2.38), on obtient un système linéaire dans le domaine fréquentiel, à résoudre pour chaque vitesse de rotation et un ordre j_{conv} . On obtient alors les contributions de la réponse forcée sur chaque harmonique Z_{pj} , dans \mathbf{R}_n . Ainsi, dans le cas du système S_1 , le système linéaire s'écrit, au premier ordre

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & A_{-1} & \epsilon_n & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & \epsilon_n & B_{-1} & -\Delta_r & 0 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & -\Delta_r & A_0 & \epsilon_n & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & \epsilon_n & B_0 & -\Delta_r & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 0 & -\Delta_r & A_1 & \epsilon_n & - \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_n & B_1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ Z_{pD-1} \\ \bar{Z}_{pR-1} \\ Z_{pD0} \\ \bar{Z}_{pR0} \\ Z_{pD1} \\ \bar{Z}_{pR1} \\ - \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} - \\ 0 \\ 0 \\ md\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

avec $A_j = \delta - m\Omega^2(1+2j)^2 + ic\Omega(1+2j) - i\Omega c_r$ et $B_j = \delta - m\Omega^2(1+2j)^2 + ic\Omega(1+2j) + i\Omega c_r$.

La réponse au balourd est poly-harmonique de fréquence fondamentale Ω . S'exprimant sur la base des modes propres de l'oscillateur paramétrique tournant, la largeur du spectre de fréquence de la réponse dépend de l'ordre de troncature j_{conv} . Ainsi, dans le cas du système S_2 , le nombre d'harmonique contenu dans la solution sera plus important que dans le cas du système S_1 étant donné la forme de la fonction $k_r(t)$. De même, plus la vitesse de rotation est faible et plus les harmoniques élevés sont influents. En régime sur-critique ($\Omega > \omega_{0y}$), on observe un moyennage de la raideur tournante apparente, la raideur paraît constante et la réponse devient harmonique en Ω (cas du chapitre 1).

On montre sur la figure 2.15 l'orbite de la réponse au balourd de la masse m du système S_1 non amorti pour la vitesse de rotation sous-critique $\Omega_* = 0.34$ et sur-critique $\Omega_* = 2$. Les orbites tracées

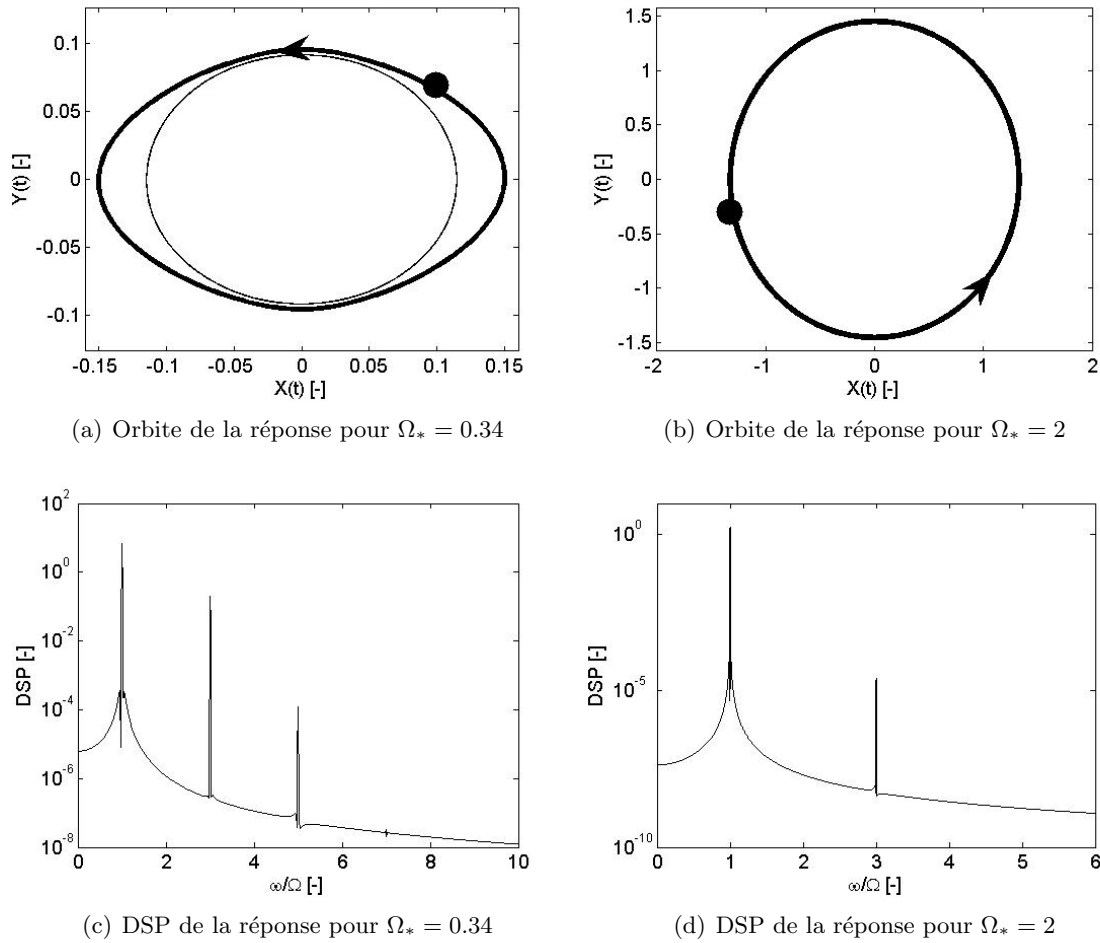


Figure 2.15: Réponse au balourd du système S_1 non amorti

en trait fin sont obtenues pour $j_{max} = 0$ (oscillateur non paramétrique où $\Delta_r = 0$) alors que les traits épais correspondent à une réponse exacte obtenue pour $j_{max} = j_{conv}$. Etant donnée la pauvreté du spectre de fréquences de la réponse au balourd, l'enrichissement de la solution par un ordre de troncature j_{conv} n'est pas significatif et même inutile dans le cas du régime sur-critique.

Comme dans le cas du chapitre 1, on peut tracer la somme des fonctions de transfert Z_{pj} en fonction de la vitesse de rotation Ω (figure 2.16.a). Les modes propres étant poly-harmoniques, ils peuvent être excités à plusieurs fréquences de rotation $\Omega = \frac{\omega_{x,y}}{1+2j}$ pour S_1 et $\Omega = \frac{\omega_{x,y}}{1+j}$ pour S_2 . Il y a résonance principale lorsque le balourd excite la fréquence fondamentale ($j = 0$). Mais il existe des résonances secondaires ($j \neq 0$), caractéristiques des oscillateurs paramétriques. Un système positivement amorti (diagramme de Campbell sous amortissement fixe ou tournant) limite la réponse forcée et permet de "surmonter" les résonances.

On trace sur la figure 2.16.a la valeur absolue de la somme des contributions Z_{pj} du système S_1 amorti en fonction de Ω . Etant donné les deux degrés de liberté du système, on distingue deux pics de résonance amortis aux alentours de $\Omega = \omega_{0x}$ et $\Omega = \omega_{0y}$. Seule la résonance principale est visible au même titre que l'oscillateur harmonique classique, les résonances secondaires étant négligeables.

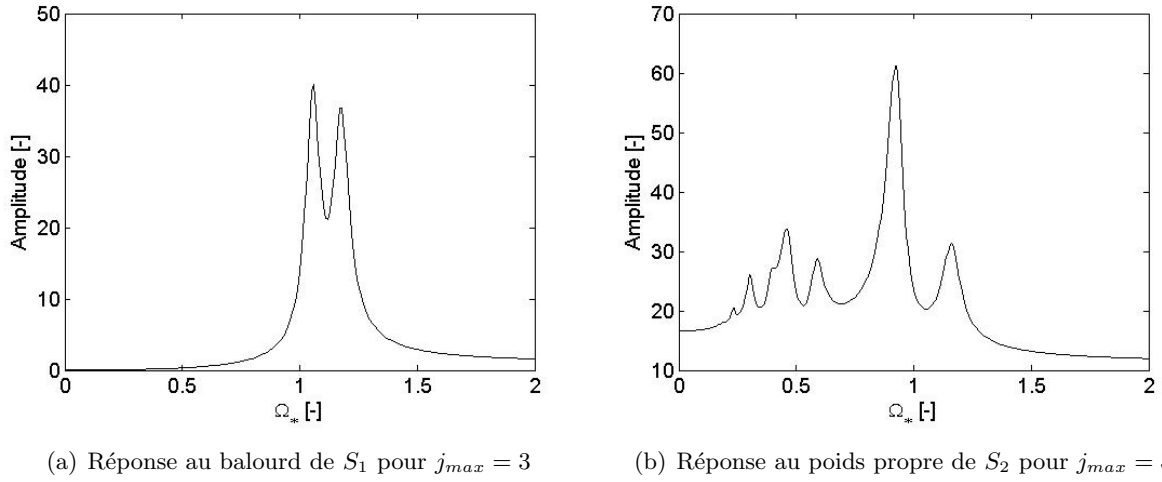


Figure 2.16: Evolution de la réponse forcée en fonction de Ω ($\zeta_n = 0.05$)

Remarques :

- Le faible couplage du système S_1 par $k_{r1}(t)$ et la faible amplitude de la force de balourd (proportionnelle à Ω^2) en régime sous-critique expliquent que la modélisation classique non paramétrique ($j_{max} = 0$) soit suffisante. La modélisation jusqu'à l'ordre j_{conv} est plus adaptée au système S_2 .
- Dans cet ouvrage, seule la réponse physique est représentée (figure 2.16), i.e. qu'on ne représente pas le régime permanent d'un système instable. On s'assure donc, à l'aide des diagrammes de Campbell à l'ordre j_{max} , que le système soit positivement amorti.
- Plus l'harmonique j est faible et plus la résonance qui lui est associée est importante. Ainsi, la résonance principale est la plus préjudiciable. Par analogie avec le diagramme de Campbell, on peut utiliser un ordre de troncature $j_{max} < j_{conv}$ pour obtenir les informations données par la figure 2.16.

4.2 Régime permanent sous poids propre

Dans le repère Galiléen, le poids propre est une force constante, sa fréquence d'excitation peut être considérée nulle. En s'inspirant toujours de l'expression des modes (2.30), la réponse au poids propre sera donc de fréquence fondamentale nulle et s'écrira

$$\begin{cases} z_1(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pDj} e^{i2j\Omega t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pRj} e^{-i2j\Omega t} & \text{pour } S_1 \\ z_2(t) = \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pDj} e^{ij\Omega t} + \sum_{-j_{conv}}^{+j_{conv}} Z_{pRj} e^{-ij\Omega t} & \text{pour } S_2 \end{cases} \quad (2.41)$$

En remplaçant $z_2(t)$ par son expression (2.41) dans l'équation d'équilibre (2.38), on obtient les contributions Z_{pj} de la réponse sur chaque harmonique dans \mathbf{R}_n . Dans le cas du système S_2 soumis au poids propre, le système linéaire s'écrit, dans le domaine fréquentiel et au premier ordre

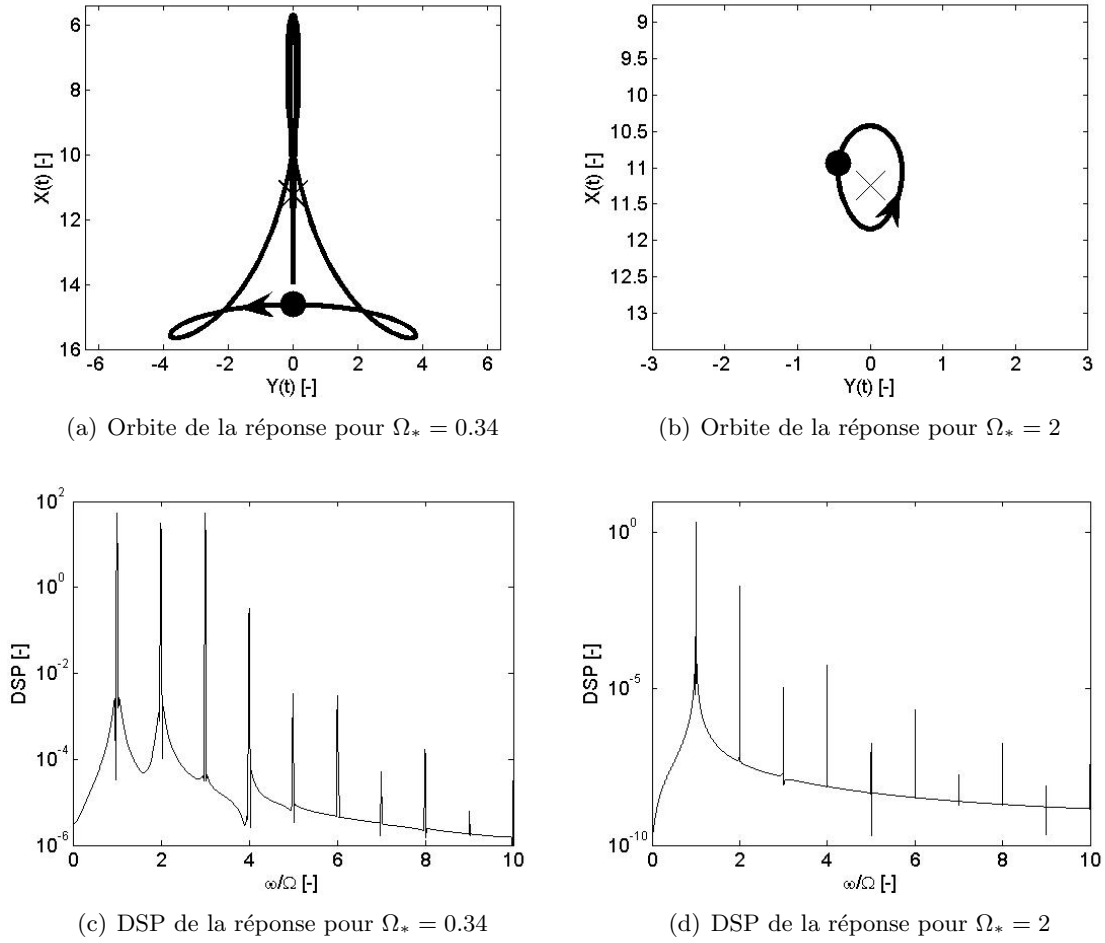


Figure 2.17: Réponse sous poids propre du système S_2 non amorti

$$\begin{bmatrix}
 - & - & - & - & - & - & - & - \\
 - & A_{-1} & \epsilon_n & \epsilon_R & 0 & \epsilon_{-1} & 0 & - \\
 - & \epsilon_n & B_{-1} & 0 & \epsilon_D & 0 & \epsilon_1 & - \\
 - & \epsilon_D & 0 & A_0 & \epsilon_n & \epsilon_R & 0 & - \\
 - & 0 & \epsilon_R & \epsilon_n & B_0 & 0 & \epsilon_D & - \\
 - & \epsilon_1 & 0 & \epsilon_D & 0 & A_1 & \epsilon_n & - \\
 - & 0 & \epsilon_{-1} & 0 & \epsilon_R & \epsilon_n & B_1 & - \\
 - & - & - & - & - & - & - & -
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 - \\
 Z_{pD-1} \\
 \bar{Z}_{pR-1} \\
 Z_{pD0} \\
 \bar{Z}_{pR0} \\
 Z_{pD1} \\
 \bar{Z}_{pR1} \\
 -
 \end{Bmatrix}
 \approx
 \begin{bmatrix}
 - \\
 0 \\
 0 \\
 m \times g \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -
 \end{bmatrix}
 \quad (2.42)$$

avec $A_j = \delta + \epsilon_0 - m(j\Omega)^2 + icj\Omega - i\Omega c_r$ et $B_j = \delta + \epsilon_0 - m(j\Omega)^2 + icj\Omega + i\Omega c_r$.

La réponse est toujours poly-harmonique (d'autant plus que la vitesse de rotation est faible) mais l'harmonique fondamentale est statique ($\omega = 0$). En régime sur-critique ($\Omega > \omega_{0y}$), le système s'apparente à un oscillateur harmonique classique ($j_{max} = 0$) et la réponse devient statique (cas du chapitre 1). Cette fois, les modes propres paramétriques sont excités aux fréquences de rotation $\Omega = \frac{\omega_{x,y}}{2j}$ pour

S_1 et $\Omega = \frac{\omega_{x,y}}{j}$ pour S_2 (pour $j \neq 0$). Le comportement principal ($j = 0$) est statique mais il existe des résonances secondaires dues au poids propre ($j \neq 0$) ce qui n'arrive pas dans le cas des oscillateurs harmoniques classiques.

On montre sur la figure 2.17 l'orbite de la réponse sous poids propre de la masse m du système S_2 non amorti pour la vitesse de rotation sous-critique $\Omega_* = 0.34$ et sur-critique $\Omega_* = 2$. En régime sous-critique, la présence des contributions sur les harmoniques secondaires n'est pas négligeable alors qu'une modélisation avec $j_{max} = 0$ devient suffisante en régime sur-critique (on ne représente pas la contribution statique sur les DSP). Dans le cas de l'oscillateur S_2 , les résonances secondaires sont bien visibles (figure 2.16.b) étant donné le contenu fréquentiel important des modes paramétriques dû à la raideur tournante variable $k_{r2}(t)$. On distingue toujours les deux pics à chaque résonance qui sont dus aux deux degrés de liberté selon x et y .

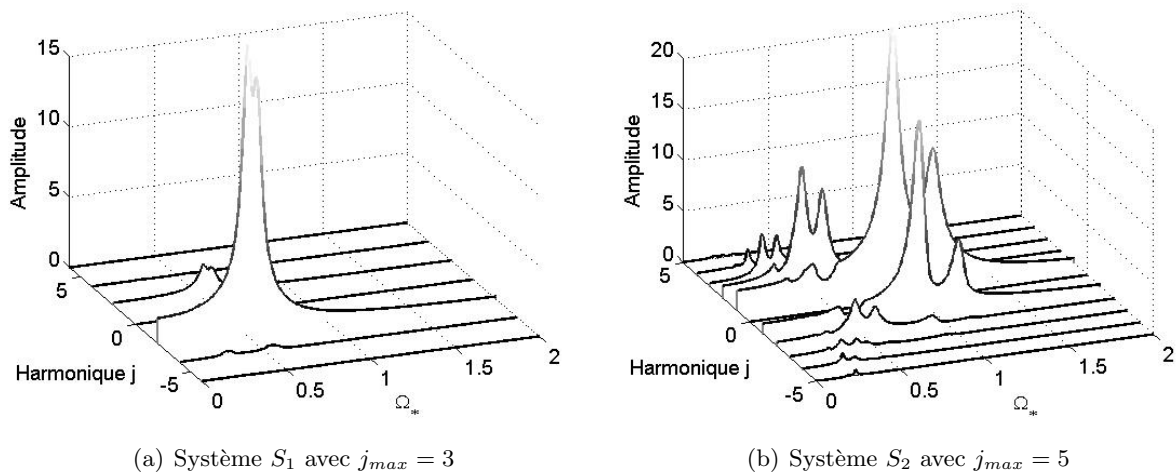


Figure 2.18: Représentation en cascade de l'évolution de la réponse sous poids propre ($\zeta_n = 0.025$)

Une représentation très pratique dans le cas du régime permanent des oscillateurs paramétriques est la représentation en cascade des contributions sur chaque harmonique, en fonction de la vitesse de rotation (figure 2.18). On observe tout de suite la densité de pics plus importante sur le système S_2 due à $k_{r2}(t)$. La réponse du système S_1 converge plus rapidement. L'influence du nombre de degrés de liberté n se retrouve dans le nombre de pics par résonance, le nombre de résonances se retrouve dans l'ordre de troncature fréquentiel j_{max} .

5 Remarques

Dans cette dernière partie, nous faisons quelques commentaires sur la méthode numérique mise en place pour l'étude des systèmes S_1 et S_2 . En effet, l'étude précédente ne se restreint pas exclusivement à l'exemple de base des deux oscillateurs paramétriques tournants à deux degrés de liberté. A travers quelques remarques, on peut généraliser les équations d'équilibre (2.21) et ainsi étendre le champ d'application aux nombreux oscillateurs paramétriques linéaires réels.

5.1 Méthode d'analyse générale des oscillateurs paramétriques

Nous avons décrit un cheminement numérique simple et rigoureux pour modéliser le comportement vibratoire des deux oscillateurs S_1 et S_2 . Ce raisonnement est généralisable aux équations différentielles linéaires à coefficients périodiques à n degrés de liberté

$$\ddot{\vec{q}}(t) + \mathbb{C}(t) \dot{\vec{q}}(t) + \mathbb{B}(t) \vec{q}(t) = \vec{F}(t) \quad (2.43)$$

où $\vec{q}(t)$ est un vecteur colonne de dimension n . $\mathbb{B}(t)$ et $\mathbb{C}(t)$ sont deux matrices réelles carrées de dimension $n \times n$ dont les coefficients $b_{ij}(t)$ et $c_{ij}(t)$ sont périodiques de période T . $\vec{F}(t)$ est un vecteur colonne de dimension n représentant les forces extérieures harmoniques s'exerçant sur le système.

On étudie dans un premier temps l'équation homogène associée à (2.43)

$$\ddot{\vec{q}}(t) + \mathbb{C}(t) \dot{\vec{q}}(t) + \mathbb{B}(t) \vec{q}(t) = \vec{0}. \quad (2.44)$$

L'équation pouvant se mettre sous la forme $\dot{u}(t) = \mathbb{D}(t) u(t)$ où u est de dimension $2n$ et $\mathbb{D}(t)$ de période T , on peut appliquer la théorie de Floquet. En passant dans le domaine fréquentiel, on construit le déterminant de Hill. Pour un ordre de convergence associé j_{conv} , on obtient les modes propres paramétriques poly-harmoniques qui nous renseignent sur le contenu fréquentiel de l'oscillateur libre.

Etant donnée l'hypothèse de linéarité, le calcul des valeurs propres du déterminant de Hill à l'ordre j_{max} détermine la stabilité de la solution de l'équation (2.43). Si l'on soumet le système (2.44) à de petites oscillations périodiques $\epsilon > 0$, on peut réécrire le système sous la forme

$$\ddot{\vec{q}} + \epsilon \mathbb{C}(t) \dot{\vec{q}} + \left(\mathbb{B}^{(0)} + \epsilon \mathbb{B}'(t) \right) \vec{q} = \vec{0}. \quad (2.45)$$

On peut toujours s'arranger pour normaliser le système (2.45) et rendre la matrice $\mathbb{B}^{(0)}$ diagonale avec $\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \omega_n^2$ ses éléments. En exprimant $\mathbb{C}(t)$ et $\mathbb{B}'(t)$ en série de Fourier à l'ordre S , on peut alors exprimer le critère de Hsu qui nous renseigne, au premier ordre, sur la stabilité des équations différentielles à coefficients périodiques à n degrés de liberté. On peut donc prédire les apparitions des domaines d'instabilité ($\epsilon \rightarrow 0$) en s'inspirant des équations (2.35), (2.36) et (2.37) où $i, j = 1, \dots, n$. On peut donc établir les cartes de stabilité de l'oscillateur paramétrique d'équation d'équilibre (2.43) (ou le diagramme de Campbell dans le cas des oscillateurs tournants).

Le régime permanent de l'oscillateur paramétrique régi par l'équation de mouvement (2.43) s'exprime sur la base des n modes propres paramétriques. La réponse forcée est alors poly-harmonique et sa fréquence fondamentale est la fréquence de l'excitation harmonique $\vec{F}(t)$. Outre les fréquences de résonance pouvant être associées aux degrés de liberté physiques de l'oscillateur (cas des oscillateurs classiques), il existe des fréquences de résonance secondaires, aux multiples de la fréquence d'excitation, dans le cas des oscillateurs paramétriques.

Remarques :

- Dans ce document, la résolution des équations à coefficients périodiques se fait dans le domaine fréquentiel à travers le déterminant de Hill. Transformer l'équation d'équilibre dépendante du temps en un ensemble d'équations à coefficients constants est un moyen plus robuste que l'intégration temporelle directe pour arriver à la solution fondamentale [Lee et al., 2007]. Ceci est d'autant plus vrai que le nombre de degrés de liberté à traiter est important.

- L'hypothèse de linéarité des équations de mouvement peut ne pas être justifiée pour certains oscillateurs. L'étude de la stabilité des oscillateurs non linéaires se fait alors dans le domaine fréquentiel au moyen de la balance harmonique [Cheikh, 1995, Villa et al., 2008] ou par intégration directe dans le domaine temporel [Berlioz et al., 2000, Patel and Darpe, 2008].
- C'est la méthode des éléments finis qui sera retenue pour l'étude des oscillateurs paramétriques à n degrés de liberté. Dans le chapitre suivant, on donne le principe de cette méthode à travers l'étude d'une machine tournante avec couplage rotor-stator (avec ou sans défauts de forme).

5.2 Cas particuliers

Les oscillateurs classiques étudiés dans le chapitre 1 ne sont finalement que des cas particuliers d'un oscillateur paramétrique associé. Ainsi, le pendule classique peut être vu comme le pendule suspendu à un point mobile (figure 2.1) dont l'amplitude D est nulle (annexe A).

Dans le cas de nos systèmes tournants, l'exemple traité dans le chapitre 1 n'est rien d'autre que l'oscillateur du chapitre 2 où Δ_r est nul. Dans ce cas particulier, le déterminant de Hill est alors exact quelle que soit la vitesse de rotation et nous donne l'équation caractéristique associée à l'oscillateur libre. Les modes propres ne dépendent plus de la vitesse de rotation, la stabilité n'est plus paramétrique et la réponse forcée est mono-harmonique.

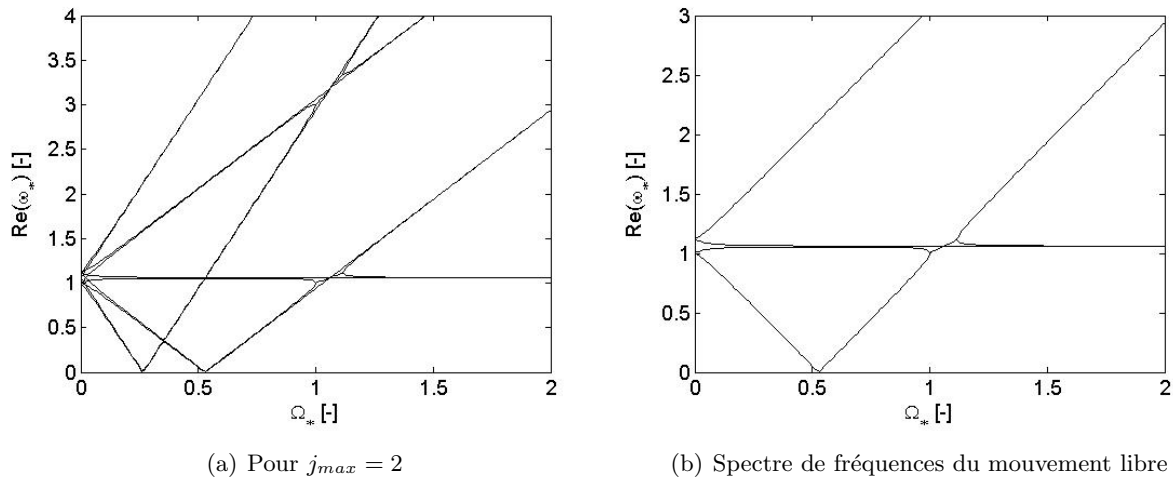


Figure 2.19: Evolution des fréquences de S_1 dans le cas particulier où $\alpha_n = 1$

Dans le cas des oscillateurs tournants, il existe un cas particulier où, bien que Δ_r ne soit pas nul, l'oscillateur n'est pas strictement paramétrique. En effet, l'oscillateur S_1 dont le degré d'anisotropie α_n est unitaire admet pour équation d'équilibre

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + (\delta - i\Omega c_r)z(t) + k_{r1}(t)\bar{z}(t) = md\Omega^2 e^{i\Omega t}. \quad (2.46)$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2.46) est exacte (c'est un mode propre) et s'écrit sous la forme

$$z(t) = Z_{gD0} \exp^{i\omega t} + Z_{gR-1} \exp^{-i(\bar{\omega} - 2\Omega)t}. \quad (2.47)$$

L'équation (2.46) n'est pas une équation différentielle à coefficients périodiques au sens strict et la théorie de Floquet n'est pas nécessaire dans ce cas particulier. En d'autres termes, comme dans le cas où $\Delta_r = 0$, il n'est pas nécessaire d'utiliser le déterminant de Hill à un ordre de troncature j_{max} (figure 2.19.a) ; quelle que soit la vitesse de rotation, le contenu fréquentiel du système sera donné par (2.47) (figure 2.19.b).

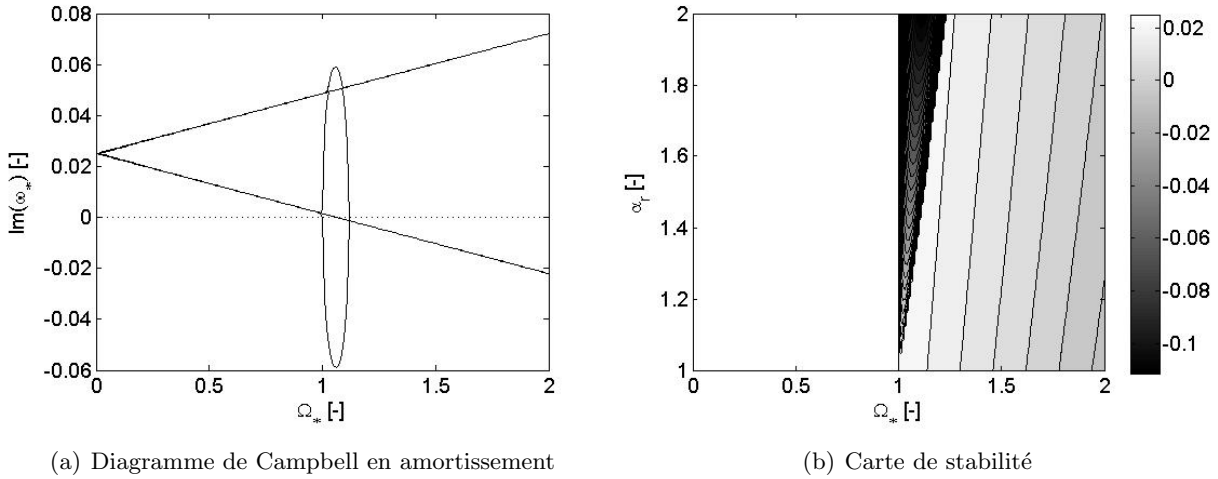


Figure 2.20: Stabilité de S_1 dans le cas particulier où $\alpha_n = 1$

Le défaut Δ_r n'entraîne qu'une seule région d'instabilité qui apparaît pour une vitesse de rotation comprise entre $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{r\xi} + k_{nx}}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{r\eta} + k_{nx}}{m}}$ (figure 2.20). Sans anisotropie de rigidité fixe α_n , l'amortissement visqueux tournant déstabilise le système pour $\Omega > \omega_1 \left(1 + \frac{c_n}{c_r}\right)$ (figure 2.20).

On calcule le déterminant de Hill du système S_1 où $\alpha_n = 1$ et $\alpha_r = \frac{k_{r\eta}}{k_{r\xi}} = 1.5$. La figure 2.19 représente la partie réelle du diagramme de Campbell de l'oscillateur pour $j_{max} = 2$ et dans le cas exact donné par (2.47) lorsque le système n'est pas amorti. La figure 2.20 illustre la partie imaginaire des valeurs propres données par le déterminant de Hill dans différents espace de paramètres. Le résultat obtenu est le même que l'on choisisse $j_{max} = 2$ ou la modélisation exacte.

Remarque :

- On peut comprendre physiquement pourquoi l'équation (2.46) n'est pas une équation non autonome au sens strict. Il suffit que l'on se place dans le repère tournant \mathbf{R}_r pour que l'équation devienne à coefficients constants [Suh et al., 2005]. C'est ce qui différencie l'oscillateur S_1 de S_2 ; la raideur tournante $k_{r1}(t)$ est constante dans le repère \mathbf{R}_r alors que dans ce même repère, la raideur $k_{r2}(t)$ est variable.

Chapitre 3

Modélisation 3D : prise en compte du couplage rotor-stator

On généralise l'étude des oscillations paramétriques linéaires d'une masse m du chapitre précédent à une structure réelle S modélisée par éléments finis. On s'intéresse au couplage rotor-stator du système, ce qui nous permet de traiter les cas de type S_1 à n degrés de liberté (défauts de forme, fissure ouverte). Etant donné la forme des solutions fondamentales, le comportement vibratoire d'ensemble (oscillations libres, stabilité, régime permanent) sera naturellement modélisé par synthèse modale. Afin de prendre en compte des géométries complexes de la machine, la modélisation sera tridimensionnelle.

Sommaire

1	Modélisation tridimensionnelle (dans le repère Galiléen)	52
1.1	Equations d'équilibre du rotor dans le repère tournant	53
1.2	Equations d'équilibre du stator dans le repère fixe	53
1.3	Equivalence entre les deux repères	54
1.4	Forme des solutions fondamentales	55
2	Analyse vibratoire par synthèse modale	57
2.1	Conditions de liaison entre sous-structures	57
2.2	Calcul modal par sous-structuration dynamique	61
3	Comportement vibratoire du système libre	63
3.1	Calcul par recombinaison modale	63
3.2	Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes	65
4	Etude du régime permanent	69
4.1	Calcul par recombinaison modale	69
4.2	Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes	71

1 Modélisation tridimensionnelle (dans le repère Galiléen)

La figure 3.1 est la représentation schématique d'une machine tournante et de son environnement dans le cas général. Nous distinguons deux domaines S et S' qui sont respectivement le domaine du stator, fixe dans le repère Galiléen \mathbf{R}_n , et le domaine du rotor, fixe dans le repère tournant \mathbf{R}_r . Nous considérons que le rotor est animé d'un mouvement de rotation constant Ω , selon l'axe z , par rapport au repère Galiléen.

Les vecteurs $\vec{U}(t)$ et $\vec{U}'(t)$ sont respectivement le champ de déplacements de S et S' au temps t . Tout comme dans les chapitres précédents, on considère que les déplacements sont petits autour de l'équilibre sous l'effet des forces extérieures ; ce qui implique la linéarité des équations de mouvement.

Sur chaque domaine peuvent s'appliquer des sollicitations extérieures harmoniques. On distinguera les forces de volume $\vec{f}_d(t)$ et $\vec{f}'_d(t)$ et les forces de surface $\vec{F}_d(t)$ et $\vec{F}'_d(t)$ pouvant s'exercer respectivement aux contours Γ_{Fd} et Γ'_{Fd} de S et S' .

Les conditions aux limites éventuelles sont appliquées aux champs de déplacements $\vec{U}_d(t)$ et $\vec{U}'_d(t)$ des contours Γ_{Ud} et Γ'_{Ud} des domaines S et S' . Le bâti est fixe dans le repère \mathbf{R}_n , c'est-à-dire qu'il y aura au moins une condition aux limites de champ de déplacements nul (encastrement parfait) sur le contour Γ_B du domaine S . Notons également qu'il existe une condition d'interface entre les champs de déplacements $\vec{U}_L(t)$ et $\vec{U}'_L(t)$ des contours Γ et Γ' des domaines S et S' afin de modéliser les interactions rotor-stator. Les champs de déplacements des contours Γ_{Fd} , Γ_{Ud} , Γ_B et Γ sont contenus dans $\vec{U}(t)$, il en va de même des contours Γ'_{Fd} , Γ'_{Ud} et Γ' dans $\vec{U}'(t)$.

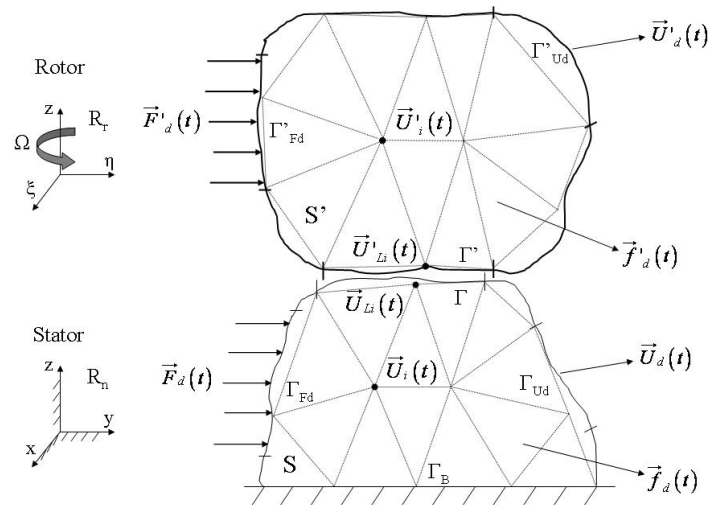


Figure 3.1: Modélisation éléments finis d'une machine tournante dans le cas général

Les domaines S et S' sont discrétisés par la méthode des éléments finis. Afin de modéliser un défaut de forme quelconque, la modélisation est tridimensionnelle : on modélise donc le rotor dans son repère \mathbf{R}_r alors que le stator sera discrétisé dans \mathbf{R}_n . L'étude du comportement vibratoire d'une machine tournante schématisée figure 3.1 est réalisée au moyen du logiciel libre Cast3m.

Remarque :

- Contrairement au chapitre 2, il est possible ici de tenir compte du couplage gyroscopique.

1.1 Equations d'équilibre du rotor dans le repère tournant

En écrivant la formulation faible de l'équilibre du domaine S' de la figure 3.1 dans le repère tournant \mathbf{R}_r et en utilisant la méthode des éléments finis [Combescure and Lazarus, 2008], on obtient l'équation d'équilibre partiel du domaine S'

$$\mathbb{M}_r \ddot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{C}_r + \mathbb{G}) \dot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma) \vec{U}'(t) = \vec{F}'(t). \quad (3.1)$$

Le vecteur du champ de déplacements discrétisé $\vec{U}'(t)$ est de dimension m où m est le nombre de degrés de liberté physiques du système S' . Le vecteur des forces extérieures harmoniques $\vec{F}'(t)$ est également de dimension m , il regroupe les forces de contact (forces de balourd) et les forces volumiques (poids propre). Ces deux vecteurs s'expriment en coordonnées cartésiennes dans le repère \mathbf{R}_r . En chaque noeud i de coordonnées ξ_i , η_i et z_i du maillage S' , on peut écrire

$$\vec{U}'_i(t) = \begin{Bmatrix} U_{\xi_i}(t) \\ U_{\eta_i}(t) \\ U_{z_i}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F}'_i(t) = \begin{Bmatrix} F_{\xi_i}(t) \\ F_{\eta_i}(t) \\ F_{z_i}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Les matrices \mathbb{M}_r , \mathbb{C}_r et \mathbb{K}_r sont carrées de dimension $m \times m$; ce sont respectivement les matrices classiques de masse, d'amortissement et de rigidité du système discretisé S' . Tout comme dans le chapitre 1, on considèrera que le matériau du rotor est de type visqueux et que \mathbb{C}_r est proportionnel à \mathbb{K}_r .

Les matrices \mathbb{G} et \mathbb{K}_c sont de dimensions $m \times m$; ce sont respectivement les matrices de couplage de Coriolis et de raideur centrifuge. Elles sont dues à la rotation constante Ω du rotor lorsqu'on exprime l'équilibre du système dans le repère tournant. \mathbb{G} est une matrice antisymétrique proportionnelle à Ω ; bien que de nature différente, elle se rapproche de la matrice de couplage gyroscopique par son écriture. \mathbb{K}_c est proportionnelle à Ω^2 , elle est due aux forces centrifuges. On donne l'expression de ces deux matrices dans la suite du chapitre.

Enfin, il faut introduire la matrice \mathbb{K}_σ , dite de précontrainte. On doit sa présence à l'état d'équilibre étudié à chaque vitesse de rotation Ω qui, dans le repère tournant, est un état de référence précontraint sous l'effet des forces centrifuges.

Remarques :

- L'équation d'équilibre (3.1) nous donne le comportement vibratoire d'un rotor seul dans le repère \mathbf{R}_r en négligeant l'influence du stator (e.g. rigidité infinie, amortissement fixe négligeable).
- L'équation (3.1) est un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants dans le repère tournant dans le cas d'un défaut de forme (\mathbb{K}_r anisotrope). Dans le cas d'un rotor fissuré (cas S_2 du chapitre 2), cette équation serait à coefficients périodiques. Cette remarque illustre bien la différence physique entre les deux cas.

1.2 Equations d'équilibre du stator dans le repère fixe

A l'image de l'équation d'équilibre écrite sur le rotor S' dans son repère, on peut écrire l'équilibre partiel du stator S , dans le repère Galiléen

$$\mathbb{M}_n \ddot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \dot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) \vec{U}(t) = \vec{F}(t). \quad (3.3)$$

Le vecteur $\vec{U}(t)$ est de dimension n où n est le nombre de degrés de liberté physiques du système S . Le vecteur des forces extérieures harmoniques $\vec{F}(t)$ est également de dimension n . Ces deux vecteurs

s'expriment en coordonnées cartésiennes dans le repère \mathbf{R}_n . En chaque noeud i de coordonnées x_i , y_i et z_i du maillage S , on peut écrire

$$\vec{U}_i(t) = \begin{Bmatrix} U_{xi}(t) \\ U_{yi}(t) \\ U_{zi}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F}_i(t) = \begin{Bmatrix} F_{xi}(t) \\ F_{yi}(t) \\ F_{zi}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

Le système S étant fixe dans le repère \mathbf{R}_n , l'équation d'équilibre est l'équation classique de la mécanique vibratoire. Les matrices \mathbb{M}_n , \mathbb{C}_n et \mathbb{K}_n sont respectivement la matrice de masse, d'amortissement et de rigidité du système S . On conserve l'hypothèse \mathbb{C}_n proportionnel à \mathbb{K}_n . Les matrices \mathbb{C}_L et \mathbb{K}_L sont respectivement la matrice d'amortissement et de rigidité de palier ; elles seront définies dans la suite de l'ouvrage.

1.3 Equivalence entre les deux repères

On étudie le comportement d'ensemble de la machine tournante $S \cup S'$ dans le repère d'étude, à savoir le repère Galiléen \mathbf{R}_n . Pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter aux équations d'équilibre partielles (3.1) et (3.3) la relation qui exprime le champ de déplacements $\vec{U}'(t)$ de S' dans \mathbf{R}_n

$$\left\{ \vec{U}'(t) \right\}_{\mathbf{R}_r} = \mathbb{R}(\Omega t) \left\{ \vec{U}'(t) \right\}_{\mathbf{R}_n}. \quad (3.5)$$

La relation (3.5) exprime le changement de repère entre \mathbf{R}_r et \mathbf{R}_n à travers la rotation constante Ω du champ de déplacement $\vec{U}'(t)$.

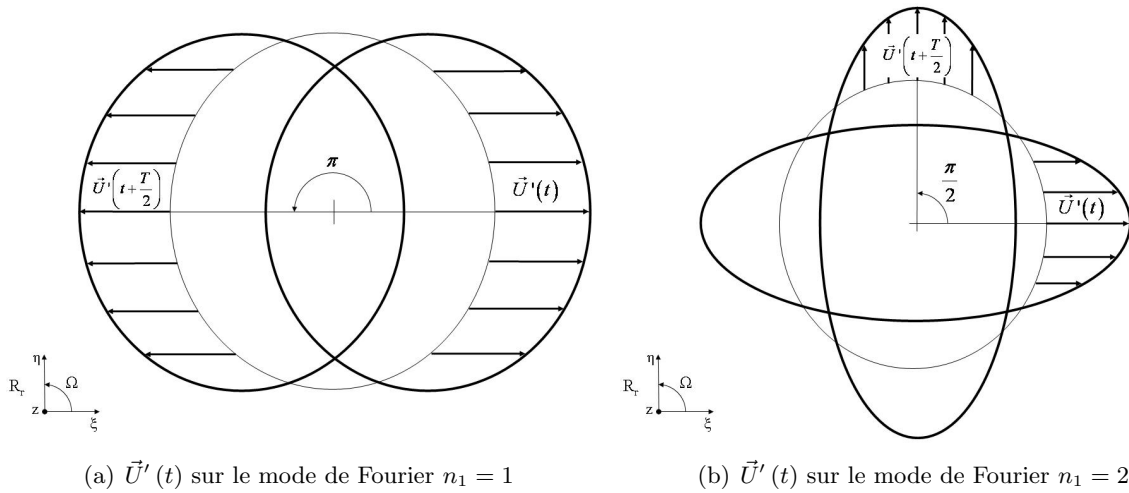


Figure 3.2: $\vec{U}'(t)$ en fonction du mode de Fourier considéré pour une demi-période dans \mathbf{R}_n

Dans le cas du modèle éléments finis, l'expression de la matrice $\mathbb{R}(\Omega t)$ est loin d'être triviale. En effet, dans le cas des oscillations d'un point matériel (chapitre précédent), le déplacement de la masse m s'exprime d'un repère à l'autre au moyen d'une simple matrice de rotation ; ce déplacement est donc périodique de période $\frac{2\pi}{\Omega}$ dans le repère Galiléen. Dans le cas d'une structure réelle S' animée d'un mouvement de rotation constante Ω , la périodicité de l'opérateur $\mathbb{R}(\Omega t)$ dépend du mode de Fourier n_1 sur lequel est projeté le champ de déplacements $\vec{U}'(t)$ (figure 3.2 où $T = \frac{2\pi}{n_1\Omega}$) [Combescure and Lazarus, 2008]. On choisit dans ce document de se limiter aux champs de

déplacements $\vec{U}'(t)$ contenus dans la base des modes de Fourier $n_1 = 1$ pour se focaliser uniquement sur l'influence du couplage rotor-stator sur les vibrations transverses d'ensemble. Sous cette hypothèse, on se retrouve dans le cas du chapitre précédent où la matrice $\mathbb{R}(\Omega t)$ s'apparente à une matrice de rotation classique. Dans la suite, on précisera la prise en compte de la relation (3.5) dans le code Cast3m.

L'éventuel défaut de forme présent sur S' peut être lui aussi projeté sur des modes de Fourier spatiaux n_2 [Lazarus, 2005]. En remplaçant alors $\vec{U}'(t)$ par la relation (3.5) et en considérant toujours les vibrations transverses d'ensemble ($n_1 = 1$), la raideur associée à ce défaut \mathbb{K}_r devient périodique de période $T = \frac{2\pi}{n_2\Omega}$ dans le repère Galiléen. Dans cet ouvrage, on présente la modélisation éléments finis du comportement vibratoire de la machine dans le cas où la raideur tournante est elliptique (cas S_1 du chapitre précédent). Dans ce cas (e. g. rotor rectangulaire), on a $n_2 = 2$ et l'équation d'équilibre du système $S + S'$ comporte une raideur périodique de période $T_1 = \frac{\pi}{\Omega}$ (se référer à l'annexe B pour une explication plus générale).

Remarques :

- Les oscillations de la masse m des chapitres précédents sont contenues dans le mode de Fourier $n = 1$. Dans le cas des éléments finis, le champ de déplacements associé à ce mode de Fourier contient tous les modes de poutre mais aussi l'inclinaison d'un volant d'inertie. Ces champs sont généralement suffisants pour étudier les machines tournantes classiques.
- Pour étudier le comportement du rotor S' seul dans le repère fixe, on peut se contenter des équations (3.1) et (3.5). On néglige alors les matrices \mathbb{M}_n , \mathbb{C}_n et \mathbb{K}_n .
- De nombreux travaux ont été consacrés à la modélisation tridimensionnelle du comportement vibratoire d'ensemble des rotors axisymétriques [Tseng et al., 2005] d'une part, et à la modélisation éléments finis simplifiée (généralement avec des éléments filaire de type poutre) des machines tournantes avec défauts de forme [Onescu et al., 2001, Nandi, 2004, Nandi and Neogy, 2005, Lee et al., 2007] d'autre part.

1.4 Forme des solutions fondamentales

L'équation d'équilibre du système $S \cup S'$ dans \mathbf{R}_n ((3.1) + (3.3) + (3.5)) est une équation différentielle à $n + m$ degrés de liberté physiques à coefficients périodiques de période T_1 . On peut appliquer la théorie de Floquet et par analogie avec le chapitre précédent, on peut écrire le champ de déplacements des systèmes S' et S dans leur repère respectif

$$\vec{U}'(t) = \vec{U}'_R(t) + \vec{U}'_I(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}'^j \cos(\lambda' + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}'^j \sin(\lambda' + 2j\Omega)t \quad (3.6)$$

et

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_R(t) + \vec{U}_I(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}^j \cos(\lambda + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}^j \sin(\lambda + 2j\Omega)t. \quad (3.7)$$

λ' et λ sont respectivement la fréquence fondamentale de $\vec{U}'(t)$, exprimée dans le repère tournant, et de $\vec{U}(t)$, exprimée dans le repère fixe. En reprenant la remarque faite figure 3.2 sur la dépendance au mode de Fourier n_1 , on peut écrire la relation sur les fréquences (voir annexe B)

$$\lambda' = \lambda - n_1\Omega. \quad (3.8)$$

Comme décrit dans le chapitre précédent, la rotation du système couple les degrés de liberté transverses. Cependant, le logiciel Cast3m ne traitant pas les coordonnées complexes, nous utilisons une modélisation équivalente en introduisant les contributions aux champs de déplacements $\vec{U}'_I(t)$ et $\vec{U}_I(t)$. De plus, étant donné que la réponse vibratoire du système est vue comme la somme des contributions sur les harmoniques $2j\Omega$, les degrés de liberté du système S et S' seront respectivement

$$\tilde{U}^j = \begin{Bmatrix} \vec{U}^j \\ I\vec{U}^j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{U}'^j = \begin{Bmatrix} \vec{U}'^j \\ I\vec{U}'^j \end{Bmatrix} \quad \text{pour } j \in [-j_{max}, j_{max}]. \quad (3.9)$$

j_{max} est l'ordre de troncature fréquentiel des expressions (3.6) et (3.7). \vec{U}^j et $I\vec{U}^j$ sont de dimension n et s'expriment selon (3.4) pour chaque j . \vec{U}'^j et $I\vec{U}'^j$ sont de dimension m et s'expriment selon (3.2) pour chaque j . Dans Cast3m, le maillage initial $S \cup S'$ (figure 3.1) à $n + m$ degrés de liberté devient le maillage composé des sous-structures $S^j \cup S'^j$ (figure 3.3) à $(2 \times j_{max} + 1) \times (2n + 2m)$ degrés de liberté. Les sous-structures associées à $j \neq 0$ sont des "clones" de la sous-structure fondamentale $S^0 \cup S'^0$; leurs noeuds ont les mêmes coordonnées mais leurs degrés de liberté sont indépendants.

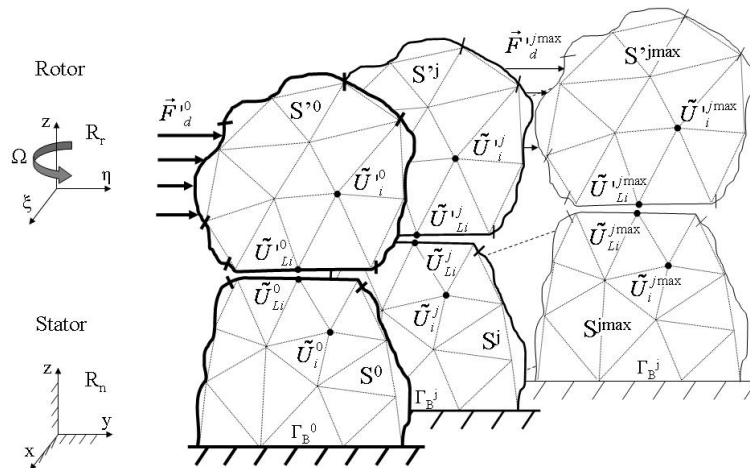


Figure 3.3: Modélisation de la machine tournante par sous-structuration

Le champ de déplacements se discrétise donc non seulement en espace (troncature éléments finis classique) mais aussi en temps (modélisation poly-harmonique due à la théorie de Floquet). De même que l'on observe une convergence éléments finis, il existera une convergence du spectre de fréquences [Poincaré, 1886]. Il va falloir tenir compte des deux convergences pour minimiser l'écart entre la solution réelle et la solution éléments finis. On travaillera donc sur base modale, non seulement pour tenir compte de la relation (3.8), mais aussi pour réduire la taille de notre problème numérique qui devient de dimension importante dans le domaine fréquentiel. Le calcul de cette base se fera naturellement par synthèse modale, la démarche adoptée est donnée dans la suite du chapitre.

Remarques :

- En pratique, seule la sous-structure fondamentale $S^0 \cup S'^0$ est à mailler, les maillages secondaires n'étant que de simples répliques.

- Plus l'ordre de troncature j_{max} est important et plus l'utilisation de la synthèse modale est justifiée. Dans le cas d'un système sans défaut ($j_{max} = 0$), l'utilisation de cette méthode n'est plus pertinente et un calcul classique par la méthode de Ritz est suffisant.

2 Analyse vibratoire par synthèse modale

Dans cette partie, on décrit la méthode de synthèse modale utilisée pour calculer la base de mode propre Φ_{ss} du modèle éléments finis illustré figure 3.3. Cette méthode a été abordée dans le chapitre 1, dans le cas des systèmes classiques ; on la présente ici dans le cas particulier des oscillations paramétriques à travers l'exemple des machines tournantes avec défauts de forme.

2.1 Conditions de liaison entre sous-structures

Dans notre cas particulier, les conditions de liaison entre les sous-structures S^j et S'^j modéliseront la rotation constante Ω . En se limitant au cas des modes de Fourier $n = 1$, cette condition se traduit par une matrice de rotation classique et nous permet d'exprimer le comportement vibratoire de l'ensemble $S \cup S'$ dans le repère Galiléen (voir annexe B).

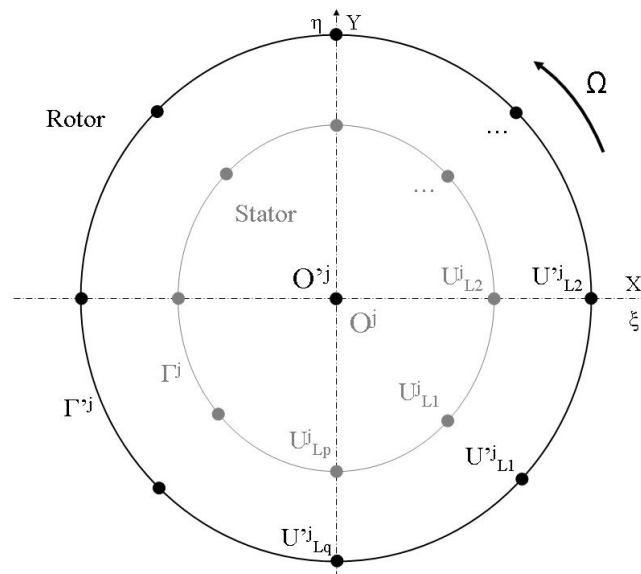


Figure 3.4: Représentation schématique des conditions de liaison entre sous-structures

Dans l'espace physique, la relation de changement de repère s'applique à tous les degrés de liberté des sous-structures S'^j . En pratique, et notamment dans la future base modale, les conditions de liaison vont pouvoir s'écrire sur les interfaces Γ'^j dont les q degrés de liberté $\vec{U}'^j_{L_i}(t)$ sont contenus dans les champs de déplacements $\vec{U}'^j(t)$ (voir figure 3.3 et 3.4). Sur le même principe, ces conditions de liaison s'écriront sur les interfaces Γ^j dont les p degrés de liberté $\vec{U}^j_{L_i}(t)$ sont contenus dans les champs de déplacements $\vec{U}^j(t)$ de S^j .

Remarques :

- L'étude vibratoire du système $S \cup S'$ est modélisable avec des éléments 2D Fourier où les conditions d'interface Γ - Γ' s'écrivent directement en fonction du mode de Fourier considéré

[Combesure and Lazarus, 2008]. Cette modélisation ne vaut cependant que pour un système axisymétrique, ce qui exclut l'étude d'une structure soumise à un défaut de forme !

- Par un raisonnement similaire, les oscillations paramétriques d'une structure quelconque non tournante (pas de domaine S') à n degrés de liberté seraient modélisées par synthèse modale avec des conditions de liaison entre les sous-structures S^j du domaine S .

2.1.1 Projection sur le mode de Fourier $n = 1$

L'expression des conditions de liaison entre les parties fixes et tournantes dépend du mode de Fourier sur lequel s'expriment les champs de déplacements $\vec{U}_L(t)$ et $\vec{U}'_L(t)$. Dans notre cas, on écrit ces conditions sur les déplacements des interfaces Γ et Γ' du mode de Fourier $n = 1$. Le but de cet étape est d'exprimer respectivement les champs de déplacements $\vec{U}_L(t)$ et $\vec{U}'_L(t)$ au point de l'axe de rotation O et O' afin de pouvoir réutiliser la matrice de rotation $\mathbb{R}(\Omega t)$ analogue au chapitre 2 (voir annexe B).

Pour permettre de modéliser les modes de poutre dans le repère Galiléen, on impose les conditions sur le mode de Fourier plan $n = 1$. En coordonnées cartésiennes, cela revient à prendre en compte le champ de déplacements transverse moyen des interfaces Γ et Γ' . La réponse vibratoire étant polynôme, il faut projeter toutes les contributions \vec{U}_L^j et \vec{U}'_L^j des interfaces Γ^j et Γ'^j . En considérant toujours la rotation selon z (figure 3.4), on obtient respectivement les projections en O^j et O'^j dans le repère \mathbf{R}_n et \mathbf{R}_r , et ce pour chaque j ,

$$\vec{U}_L^j = \begin{Bmatrix} UO_x^j \\ UO_y^j \\ IUO_x^j \\ IUO_y^j \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{Bmatrix} U_{xi}^j \\ U_{yi}^j \\ IU_{xi}^j \\ IU_{yi}^j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{U}'_L^j = \begin{Bmatrix} UO'_\xi^j \\ UO'_\eta^j \\ IUO'_\xi^j \\ IUO'_\eta^j \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \begin{Bmatrix} U_{\xi i}^j \\ U_{\eta i}^j \\ IU_{\xi i}^j \\ IU_{\eta i}^j \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

De la même manière, pour modéliser les modes de disque, on peut imposer des conditions sur le mode de Fourier $n = 1$ longitudinal (inclinaison d'un disque). En coordonnées cartésiennes, cela revient à imposer les relations sur la rotation moyenne des interfaces Γ et Γ' . Par exemple, la projection en O'^j s'écrirait dans le repère \mathbf{R}_r , pour chaque j et sur chaque interface Γ'^j

$$\begin{Bmatrix} RO_\xi^j \\ RO_\eta^j \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \begin{Bmatrix} \frac{\eta_i U_{zi}^j - z_i U_{\eta i}^j}{p(\zeta_i^2 + \eta_i^2 + z_i^2)} \\ \frac{z_i U_{\xi i}^j - \xi_i U_{zi}^j}{p(\zeta_i^2 + \eta_i^2 + z_i^2)} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} IRO_\xi^j \\ IRO_\eta^j \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \begin{Bmatrix} \frac{\eta_i IU_{zi}^j - z_i IU_{\eta i}^j}{p(\zeta_i^2 + \eta_i^2 + z_i^2)} \\ \frac{z_i IU_{\xi i}^j - \xi_i IU_{zi}^j}{p(\zeta_i^2 + \eta_i^2 + z_i^2)} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

La projection nous permet d'imposer les conditions de rotation constante entre les sous-structures S^j et S'^j en limitant toutefois l'étude vibratoire à un champ restreint de déplacements.

Remarques :

- On impose les conditions de déplacements nuls sur la translation et la rotation moyenne en z (mode de Fourier longitudinal et plan pour $n = 0$) des interfaces Γ'^j . C'est une hypothèse courante des machines tournantes où les paliers empêchent le mouvement axial et où le couple d'entraînement du moteur impose la vitesse de rotation sur une portion de l'arbre.
- Les points O'^j et O^j sont les barycentres des interfaces Γ'^j et Γ^j . Sous le logiciel éléments finis Cast3m, on crée artificiellement le nombre de noeuds nécessaires (qui dépend directement de l'ordre de troncature j_{max} choisi).

2.1.2 Conditions imposées par la rotation constante Ω

Une fois la projection effectuée, on peut écrire les conditions de liaison entre les sous-structures S^j et S'^j . On explique la démarche de cette seconde étape uniquement sur le mode de Fourier plan $n = 1$ (équation (3.10)), les conditions imposées sur les modes de disque s'obtenant sur le même principe. Par les relations de projection (3.10), les noeuds O'^j appartiennent aux sous-structures S'^j . O' est le noeud de coordonnées identiques appartenant au maillage S' , on peut écrire dans le repère tournant, selon (3.6),

$$\vec{U}O'(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} UO_{\xi}^j \\ UO_{\eta}^j \end{Bmatrix} \cos(\lambda' + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} IUO_{\xi}^j \\ IUO_{\eta}^j \end{Bmatrix} \sin(\lambda' + 2j\Omega)t. \quad (3.12)$$

De la même manière, O est le noeud appartenant à S , de coordonnées identiques aux noeuds O^j et on peut écrire, dans le repère Galiléen, selon (3.7),

$$\vec{U}O(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} UO_x^j \\ UO_y^j \end{Bmatrix} \cos(\lambda + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} IUO_x^j \\ IUO_y^j \end{Bmatrix} \sin(\lambda + 2j\Omega)t. \quad (3.13)$$

$\vec{U}O'(t)$ est la projection du champ de déplacements $\vec{U}'_L(t)$ de Γ' sur le mode de Fourier $n = 1$ exprimé dans \mathbf{R}_r . De même, $\vec{U}O(t)$ est la projection du champ de déplacements $\vec{U}_L(t)$ de Γ sur le mode de Fourier $n = 1$ exprimé dans \mathbf{R}_n . Etant donné que O et O' sont des noeuds de l'axe de rotation et que la vitesse de rotation Ω de l'interface Γ' est constante, on peut écrire

$$\vec{U}O'(t) = \mathbb{R}(\Omega t) \vec{U}O(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \vec{U}O(t). \quad (3.14)$$

La relation (3.14) est l'expression mathématique du changement de repère ; $\vec{U}O(t)$ est l'expression du champ de déplacements $\vec{U}'O'(t)$ dans le repère d'étude. Le champ de déplacements étudié étant sur le mode de Fourier $n = 1$, l'équivalence entre la fréquence du système $S \cup S'$ dans le repère tournant et celle dans le repère fixe s'écrit $\lambda' = \lambda - \Omega$! En remplaçant alors $\vec{U}O(t)$ et $\vec{U}'O'(t)$ respectivement par leur expression (3.12) et (3.13) dans la relation (3.14) et en annulant les différents termes pour chaque harmonique j , on obtient les conditions de liaison entre les sous-structures de la forme

$$\mathbf{L}^{j_{max}} \cdot \tilde{\vec{U}}_L^{j_{max}} \approx \{0\}. \quad (3.15)$$

La relation (3.15), exprimée dans le domaine fréquentiel, n'est pas exacte ; ce n'est qu'une approximation de la condition (3.14) écrite dans le domaine temporel. Pour un ordre de troncature $j_{max} = 1$, on obtient (voir annexe B)

$$\mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & \mathbb{R}_R & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 0 & \mathbb{R}_R & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\vec{U}}_L^1 = \begin{pmatrix} - \\ \tilde{\vec{U}}_L^{0-1} \\ \tilde{\vec{U}}_L^{-1} \\ \tilde{\vec{U}}_L^0 \\ \tilde{\vec{U}}_L^0 \\ \tilde{\vec{U}}_L^1 \\ \tilde{\vec{U}}_L^1 \\ - \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

\mathbb{I} est la matrice identité (de dimension identique à $\vec{U}\vec{O}'_L^j$). Les matrices \mathbb{R}_D et \mathbb{R}_R s'écrivent

$$\mathbb{R}_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Les conditions de liaison données en (3.16) nous permettent d'exprimer le champ de déplacements $\vec{U}'_L(t)$ contenu dans le mode de Fourier $n = 1$ dans \mathbf{R}_n . O appartenant à S , la matrice \mathbf{L}^{jmax} permet également de tenir compte des interactions rotor-stator et du couplage entre harmoniques induit.

Dans le cas particulier où la rigidité tournante \mathbb{K}_r est isotrope, l'équation d'équilibre du système $S \cup S'$ dans le repère Galiléen n'est plus à coefficients périodiques T_1 , le champ de déplacements $\vec{U}(t)$ de S , et donc $\vec{U}\vec{O}(t)$ de Γ , n'est plus poly-harmonique, d'où

$$\vec{U}\vec{O}(t) = \begin{Bmatrix} UO_x \\ UO_y \end{Bmatrix} \cos \lambda t + \begin{Bmatrix} IUO_x \\ IUO_y \end{Bmatrix} \sin \lambda t. \quad (3.18)$$

Les conditions de liaison entre sous-structures s'écrivent alors exactement

$$\mathbf{L}_{A_2} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 \\ 0 & \mathbb{R}_R & \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

On peut faire la même remarque sur le champ de déplacements $\vec{U}\vec{O}'(t)$ exprimé dans \mathbf{R}_r dans le cas particulier où la rigidité \mathbb{K}_n est isotrope. On obtient alors les conditions de liaison

$$\mathbf{L}_{A_3} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_D & 0 & 0 \\ \mathbb{R}_R & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D \\ 0 & 0 & \mathbb{R}_R \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Par le même raisonnement, on peut obtenir les conditions de liaison du cas classique du chapitre 1 où le système tournant est modélisé sans prendre en compte les défauts

$$\mathbf{L}^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{R}_D \\ 0 & \mathbb{R}_R \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Ce sont les conditions de liaison \mathbf{L} , qui par leur couplage, nous dicteront le nombre de sous-structures à utiliser afin de modéliser correctement la réponse vibratoire. La matrice \mathbf{L}^{jmax} tronquée ne s'utilise que dans le cas de la théorie de Floquet où les deux matrices \mathbb{K}_n et \mathbb{K}_r sont anisotropes.

Remarques :

- On impose sur les noeuds de l'interface Γ contenus dans S une matrice de rigidité \mathbb{K}_L et une matrice d'amortissement visqueux \mathbb{C}_L .
- Des matrices de rigidité et d'amortissement nulles correspondent alors à la modélisation du changement de repère seul, le stator S n'ayant pas d'influence sur le comportement vibratoire de Γ' et donc du rotor.
- Des matrices \mathbb{K}_L et \mathbb{C}_L quelconques correspondent à la modélisation d'un palier [Frêne, 1990]. Seules les caractéristiques du palier sur le mode de Fourier $n = 1$ peuvent être prises en compte. Notons que ces caractéristiques sont généralement les seules auxquelles nous puissions avoir accès par la mesure.
- Une matrice de rigidité $\mathbb{K}_L \rightarrow +\infty$ modélise une liaison parfaite et les champs de déplacements du rotor S' et du stator S sont identiques au niveau de la liaison.

2.2 Calcul modal par sous-structuration dynamique

Comme dans le cas du chapitre 1, la base modale non amortie du système $S \cup S'$ se calcule au repos (figure 3.5); ainsi, seules les matrices de rigidité et de masse seront prises en compte. On partitionne les degrés de liberté du stator et du rotor respectivement selon

$$\vec{U}_S^j = \begin{Bmatrix} \tilde{U}^j \\ \tilde{U}_{O_L}^j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{U}_{S'}^j = \begin{Bmatrix} \tilde{U}^j \\ \tilde{U}_{O_L}^j \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

où \vec{U}_S^j et $\vec{U}_{S'}^j$ sont de dimension $2n$ et $2m$. La base de projection des sous-structures S^j et S'^j sera respectivement caractérisée par les matrices

$$\Phi^j = [\phi^j \quad \psi^j] \quad \text{et} \quad \Phi'^j = [\phi'^j \quad \psi'^j]. \quad (3.23)$$

Les modes ϕ^j et ϕ'^j sont les modes normaux à interfaces bloquées, leurs degrés de liberté sont réels et imaginaires. Les modes ψ^j et ψ'^j sont les modes contraints, ces déformées statiques sont obtenues en appliquant des déplacements unitaires sur les degrés de liberté de liaison $\tilde{U}_{O_L}^j$ et $\tilde{U}_{O_L}'^j$.

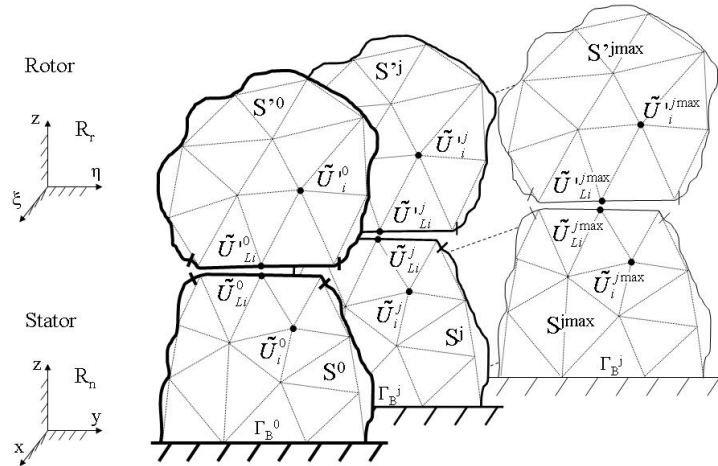


Figure 3.5: Sous-structuration pour le calcul de la base modale

La transformation de Ritz nous permet d'écrire respectivement sur les systèmes S^j et S'^j

$$\vec{U}_S^j = [\phi^j \quad \psi^j] \begin{Bmatrix} \eta_i^j \\ \eta_L^j \end{Bmatrix} = \Phi^j \vec{\eta}^j \quad \text{et} \quad \vec{U}_{S'}^j = [\phi'^j \quad \psi'^j] \begin{Bmatrix} \eta_i'^j \\ \eta_L'^j \end{Bmatrix} = \Phi'^j \vec{\eta}'^j. \quad (3.24)$$

Les coordonnées généralisées relatives aux déformées statiques sont les valeurs des degrés de liberté de liaison (voir chapitre 1). On obtient alors la relation dans S^j et S'^j

$$\{\eta_L^j\} = \vec{U}_L^j \quad \text{et} \quad \{\eta_L'^j\} = \vec{U}_L'^j. \quad (3.25)$$

En calculant les énergies cinétiques et de déformation de la sous-structure S^j , on obtient les matrices de rigidité et de masse généralisées des parties statoriques sous la forme

$$\bar{\mathbb{K}}_n^j = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{K}}_D^j & 0 \\ 0 & \psi^{jT} \tilde{\mathbb{K}}_n^j \psi^j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{M}}_n^j = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \phi^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_n^j \psi^j \\ \psi^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_n^j \phi^j & \psi^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_n^j \psi^j \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Pour prendre en compte les champs de déplacements $I\vec{U}^j$ et $I\vec{U}'^j$, on travaille avec les impédances $\tilde{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{A} \end{bmatrix}$. Les matrices de rigidité et de masse généralisées des parties rotoriques ont la forme

$$\bar{\mathbb{K}}_r^j = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{K}}_D^j & 0 \\ 0 & \psi'^{jT} \tilde{\mathbb{K}}_r^j \psi'^j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{M}}_r^j = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \phi'^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_r^j \psi'^j \\ \psi'^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_r^j \phi'^j & \psi'^{jT} \tilde{\mathbb{M}}_r^j \psi'^j \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Nous sommes ici dans un cas particulier où les sous-structures S^j et S'^j sont identiques pour chaque j (chaque noeud étant cependant indépendant). Il n'est donc pas nécessaire de recalculer les modes normaux et contraints pour $j \neq 0$; ces modes sont simplement obtenus en reproduisant les modes fondamentaux obtenus pour $j = 0$ sur les maillages secondaires S^j et S'^j . Il en va de même pour les matrices \mathbb{K}_n^j , \mathbb{K}_r^j , \mathbb{M}_n^j et \mathbb{M}_r^j . Le bénéfice en temps de calcul réalisé grâce à la méthode de synthèse modale est donc encore plus important dans le cas de la théorie de Floquet.

Au niveau de la structure complète, seules les énergies cinétiques et de déformation sont non nulles :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_S + \mathcal{T}_{S'} = \frac{1}{2} \sum_j \dot{\vec{\eta}}^{jT} \bar{\mathbb{M}}_n^j \dot{\vec{\eta}}^j + \frac{1}{2} \sum_j \dot{\vec{\eta}}'^{jT} \bar{\mathbb{M}}_r^j \dot{\vec{\eta}}'^j, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_S + \mathcal{U}_{S'} = \frac{1}{2} \sum_j \vec{\eta}^{jT} \bar{\mathbb{K}}_n^j \vec{\eta}^j + \frac{1}{2} \sum_j \vec{\eta}'^{jT} \bar{\mathbb{K}}_r^j \vec{\eta}^j. \quad (3.29)$$

Le travail des forces de liaison étant nul, le problème aux valeurs propres de la structure globale, muni de ses conditions aux limites, peut se mettre sous la forme

$$(\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} + \mathbf{L}^{j_{max}T} \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^{j_{max}} \vec{\eta} = \vec{0} \quad (3.30)$$

où $\vec{\eta}$ est le vecteur des déplacements généralisés et les matrices $\bar{\mathbb{K}}$ et $\bar{\mathbb{M}}$ sont respectivement les matrices de rigidité et de masse généralisées du système global (voir (1.38)). Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\vec{\lambda}$ permet de traduire la loi d'action-réaction à laquelle sont soumises les interfaces.

Le problème (3.30) est exprimé dans le repère fixe \mathbf{R}_n à travers la matrice $\mathbf{L}^{j_{max}}$ étant donné que les conditions de liaison entre sous-structures s'appliquent aussi bien aux degrés de liberté physiques qu'aux degrés de liberté généralisés d'après la relation (3.25). En pratique, on peut utiliser un champ de déplacements $\vec{U}'_L(t)$ de $\vec{U}'(t)$ (et $\vec{U}_L(t)$ de $\vec{U}(t)$) restreint sous la seule condition que les degrés de liberté physiques choisis impliquent les conditions de liaison sur les déplacements généralisés.

En posant Φ_{ss} la base modale de ce système obtenue par sous-structuration, l'obtention des modes propres dans la base physique se fait à l'aide de la relation

$$\vec{U}_{ss} = \Phi_{ss} \vec{\eta} \quad \text{où} \quad \vec{U}_{ss} = \left[\vec{U}'^{-j_{max}} \vec{U}'^{-j_{max}} \dots \vec{U}'^{j_{max}} \vec{U}'^{j_{max}} \right]^T. \quad (3.31)$$

Soit \vec{U} le vecteur des déformées modales du système $S \cup S'$ au repos obtenues dans le cas classique sans sous-structuration (sans les contributions $I\vec{U}'$ et $I\vec{U}$ et avec $j_{max} = 0$). En tronquant la base modale à l'ordre k , on obtient k déformées modales. Dans le cas de la sous-structuration, les déformées modales n'ont pas de sens physiques, elles sont un outil numérique nécessaire aux calculs vibratoires des

machines tournantes avec défauts. A une déformée classique \vec{U} est associée $2 \times (2j_{max} + 1)$ déformées \vec{U}_{ss} . En pratique, les modes propres représentés seront les déformées \vec{U} .

Remarques :

- La dimension de la base modale utilisée dépend non seulement de l'ordre de troncature modal k mais aussi de l'ordre de troncature fréquentiel j_{max} . Jusqu'à présent, rien ne justifie un choix particulier de j_{max} en dehors du cas particulier où \mathbb{K}_r (ou \mathbb{K}_n) est isotrope ; cette question sera abordée dans la suite du document lorsque la vitesse de rotation est non nulle.
- La matrice de rigidité \mathbb{K}_r^j , exprimée dans le domaine fréquentiel, ne serait pas identique sur chaque sous-structure j si la fissure respirante était modélisée par éléments finis. En effet, on a vu dans le chapitre 2 que la fonction raideur tournante $k_{r2}(t)$ était poly-harmonique dans \mathbf{R}_r .

3 Comportement vibratoire du système libre

On s'intéresse dans cette partie au comportement vibratoire en rotation de la machine tournante sans chargement extérieur. Le problème aux valeurs propres associé à l'équation de mouvement nous renseigne alors sur le contenu fréquentiel du mouvement libre et la stabilité du système. On valide notre approche à travers l'étude dynamique d'une poutre en rotation avec volant d'inertie souple.

3.1 Calcul par recombinaison modale

Afin d'utiliser la base modale Φ_{ss} définie en (3.31), on réécrit les équations d'équilibre partielles des systèmes S et S' dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire sur les sous-structures S^j et S'^j . Dans la base physique, les vibrations libres du système S' dans le repère tournant sont définies par

$$\mathbb{M}_r \ddot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{C}_r + \mathbb{G}) \dot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma) \vec{U}'(t) = \vec{0}. \quad (3.32)$$

De même, les oscillations libres du système S sont définies dans le repère Galiléen par

$$\mathbb{M}_n \ddot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \dot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) \vec{U}(t) = \vec{0}. \quad (3.33)$$

Sous l'hypothèse que les champs de déplacements $\vec{U}'(t)$ et $\vec{U}(t)$ sont contenus dans le mode de Fourier spatial $n = 1$, une anisotropie éventuelle des matrices de rigidité \mathbb{K}_r et \mathbb{K}_n nous incite à écrire ces champs sous la forme

$$\vec{U}(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}^j \cos(\omega + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}^j \sin(\omega + 2j\Omega)t \quad (3.34)$$

et

$$\vec{U}'(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}'^j \cos(\omega + (2j - 1)\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}'^j \sin(\omega + (2j - 1)\Omega)t \quad (3.35)$$

en considérant la relation sur leurs harmoniques fondamentaux $\omega' = \omega - \Omega$.

En remplaçant $\vec{U}'(t)$ par son expression (3.35) dans l'équation d'équilibre homogénéisée (3.32), on obtient l'équation d'équilibre partielle du système S' dans le repère tournant exprimée dans le domaine fréquentiel. En pratique, on obtient $2 \times (2j_{max} + 1)$ problèmes indépendants sur chaque sous-structure S'^j de la forme

$$\left(\omega^2 \tilde{\mathbb{A}}'^j + \omega \tilde{\mathbb{B}}'^j + \tilde{\mathbb{C}}'^j\right) \tilde{\mathbb{U}}'^j = \{0\} \quad \forall j \in [-j_{max}, j_{max}] \quad (3.36)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbb{A}}'^j = \begin{bmatrix} -\mathbb{M}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{M}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{B}}'^j = \begin{bmatrix} -2(2j-1)\Omega\mathbb{M}_r & (\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) \\ -(\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) & -2(2j-1)\Omega\mathbb{M}_r \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{\mathbb{C}}'^j = \begin{bmatrix} -((2j-1)\Omega)^2\mathbb{M}_r + (\mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma) & (2j-1)\Omega(\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) \\ -(2j-1)\Omega(\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) & -((2j-1)\Omega)^2\mathbb{M}_r + (\mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma) \end{bmatrix}.$$

De la même manière, on remplace $\vec{U}(t)$ par son expression (3.34) dans l'équation d'équilibre homogénéisée (3.33) pour obtenir l'équation d'équilibre partielle de S dans le domaine fréquentiel. On obtient alors $2 \times (2j_{max} + 1)$ problèmes indépendants sur chaque sous-structure S^j de la forme

$$\left(\omega^2 \tilde{\mathbb{A}}^j + \omega \tilde{\mathbb{B}}^j + \tilde{\mathbb{C}}^j\right) \tilde{\mathbb{U}}^j = \{0\} \quad \forall j \in [-j_{max}, j_{max}] \quad (3.37)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbb{A}}^j = \begin{bmatrix} -\mathbb{M}_n & 0 \\ 0 & -\mathbb{M}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{B}}^j = \begin{bmatrix} -4j\Omega\mathbb{M}_n & (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \\ -(\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) & -4j\Omega\mathbb{M}_n \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{\mathbb{C}}^j = \begin{bmatrix} -(2j\Omega)^2\mathbb{M}_n + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) & 2j\Omega(\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \\ -2j\Omega(\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) & -(2j\Omega)^2\mathbb{M}_n + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) \end{bmatrix}.$$

Par recombinaison modale, on obtient l'équation de mouvement du système $S \cup S'$ libre, dans la base modale Φ_{ss} et dans le domaine fréquentiel,

$$\left(\omega^2 [\Phi_{ss}^T \mathbb{A}^{j_{max}} \Phi_{ss}] + \omega [\Phi_{ss}^T \mathbb{B}^{j_{max}} \Phi_{ss}] + [\Phi_{ss}^T \mathbb{C}^{j_{max}} \Phi_{ss}]\right) \vec{\eta}_g = \vec{0} \quad (3.38)$$

$$\text{avec } \mathbb{A}^{j_{max}} = \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} \left(\tilde{\mathbb{A}}^j + \tilde{\mathbb{A}}'^j\right), \quad \mathbb{B}^{j_{max}} = \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} \left(\tilde{\mathbb{B}}^j + \tilde{\mathbb{B}}'^j\right) \text{ et } \mathbb{C}^{j_{max}} = \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} \left(\tilde{\mathbb{C}}^j + \tilde{\mathbb{C}}'^j\right).$$

Les conditions de liaison $L^{j_{max}}$ étant contenues dans la base modale Φ_{ss} , elles sont imposées implicitement dans l'équation (3.38). Cette équation régit donc le mouvement du système libre $S \cup S'$ sur la base modale restreinte aux modes de Fourier $n = 1$ dans le repère Galiléen. Le couplage entre les différentes sous-structures (équivalent aux couplages entre harmoniques) est introduit par la base modale, à travers la matrice de liaison $L^{j_{max}}$. La dimension du problème (réduite par rapport au problème sur base physique) dépend de l'ordre de troncature modal k et fréquentiel j_{max} . Le problème aux valeurs propres en ω est résolu pour chaque vitesse de rotation Ω , on obtient alors un jeu de $2k \times (2j_{max} + 1)$ valeurs propres, chacune associée à un vecteur propre de la forme \vec{U}_{ss} . L'équation homogène (3.38) est l'équivalent du déterminant de Hill du système $S \cup S'$ dans \mathbf{R}_n ; il existe donc un ordre de troncature $j_{max} = j_{conv}$, dépendant de Ω , pour lequel on obtiendra k modes paramétriques de la forme

$$\vec{U}_g^\Omega = \Phi_{ss} \vec{\eta}_g \quad \text{où} \quad \vec{U}_g^\Omega = \left[\tilde{\mathbb{U}}'^{-j_{conv}} \tilde{\mathbb{U}}'^{-j_{conv}} \dots \tilde{\mathbb{U}}'^{j_{conv}} \tilde{\mathbb{U}}'^{j_{conv}} \right]^T \quad (3.39)$$

et où les valeurs propres ω sont le spectre de fréquences de ces modes.

Le calcul des modes paramétriques nous permet d'obtenir le contenu fréquentiel du mouvement libre du système à une fréquence de rotation Ω donnée. C'est l'ordre de troncature j_{conv} qui détermine alors le nombre de sous-structures nécessaires au calcul de la base Φ_{ss} . En pratique, on visualise ce

mode au moyen de la recombinaison (3.34) et (3.35) ; le champ de déplacements $\vec{U}(t)$ et $\vec{U}'(t)$ est obtenu en sommant les contributions sur chaque harmonique j à chaque pas de temps t sur le maillage fondamental $S^0 \cup S'^0$.

L'évolution des valeurs propres complexes ω en fonction de la vitesse de rotation nous renseigne sur la stabilité du système (et le contenu fréquentiel de l'oscillateur dans les cas particuliers où \mathbb{K}_n ou \mathbb{K}_r est isotrope). Etant donnée la notation adoptée en (3.34) et (3.35), il suffit que la partie imaginaire d'une valeur propre soit négative pour entraîner l'instabilité dynamique du système. Suite aux remarques faites dans le chapitre précédent, un ordre de troncature $j_{max} < j_{conv}$ est généralement suffisant pour étudier la stabilité paramétrique de l'oscillateur amorti.

Remarque :

- Une analyse des modes à de faibles vitesses de rotation nécessite un nombre de sous-structures élevé. En étudiant la convergence de (3.38), on peut affirmer qu'une base modale Φ_{ss} nécessaire pour un mode à $\Omega = \Omega_A$ est suffisante pour un mode à $\Omega = \Omega_B$ si $\Omega_A < \Omega_B$.

3.2 Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes

Afin de valider la méthode éléments finis mise en place dans la partie précédente, on modélise, avec le logiciel Cast3m, les vibrations libres d'une poutre avec volant d'inertie en rotation supportée par des paliers aux caractéristiques mécaniques isotropes. Le système étant axisymétrique, sa modélisation se fait, d'une part, avec des éléments classiques de poutre directement dans le repère d'étude \mathbf{R}_n et, d'autre part, avec des éléments tridimensionnels où la machine tournante $S \cup S'$ est modélisée dans \mathbf{R}_n au moyen de l'équation (3.38) avec $j_{max} = 0$. Ce premier exemple académique nous montre l'intérêt que peut avoir la modélisation tridimensionnelle des modes d'ensemble d'une machine tournante.

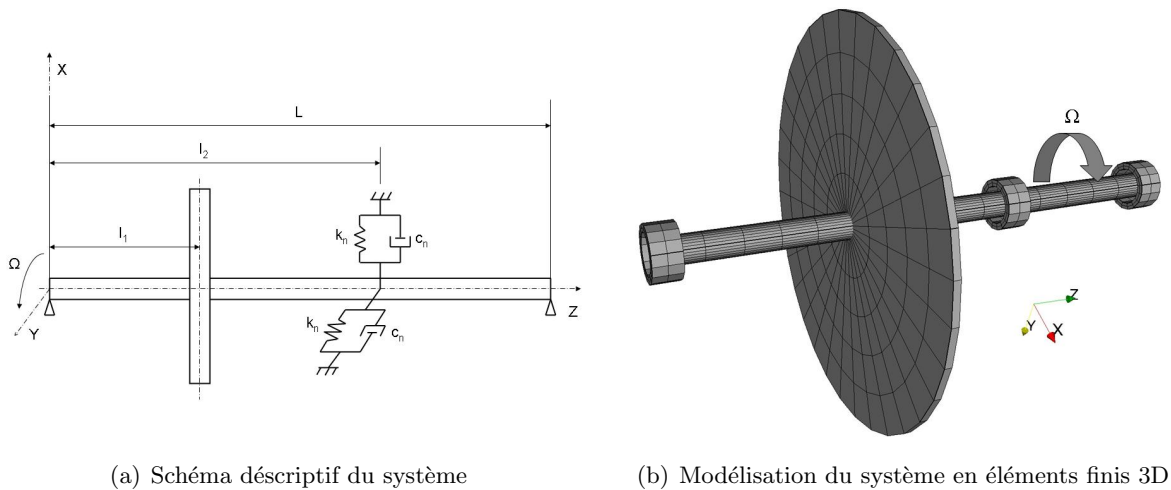


Figure 3.6: Poutre en rotation avec volant d'inertie sur appuis isotropes

3.2.1 Description du système étudié

La machine tournante étudiée est donnée figure 3.6, cet exemple est inspiré du chapitre 1 figure 1.9. Le comportement vibratoire du système est toujours linéaire et la vitesse de rotation du système

Ω est considérée constante. Il s'agit d'une ligne d'arbre horizontale en rotation autour de l'axe z munie d'un volant d'inertie au tiers de sa longueur, ce qui induit un couplage gyroscopique sur les vibrations transverses de l'arbre. Ce dernier est supporté par un palier magnétique d'amortissement fixe isotrope $c_n = 300$ N.s/m et de raideur isotrope $k_{nx} = k_{ny} = k_n = 0$ N/m (la rigidité fixe était anisotrope dans le cas du chapitre 1). En considérant que le matériau du rotor n'est pas visqueux, l'amortissement tournant peut être négligé dans le comportement vibratoire de l'arbre.

On donne les caractéristiques mécaniques de la machine :

- Données relatives au volant d'inertie :
 - Rayon intérieur : $R_1 = 0.01$ m,
 - Rayon extérieur : $R_2 = 0.15$ m,
 - Epaisseur : $h = 0.005$ m,
 - Masse volumique : $\rho = 7800$ kg/m³,
 - Module d'Young : $E = 2 \times 10^{11}$ N/m².
- Données relatives à l'arbre :
 - Rayon : $R = 0.01$ m,
 - Longueur totale : $L = 0.4$ m,
 - Module d'Young : $E = 2 \times 10^{11}$ N/m².

Le système tournant de la figure 3.6 est issu de [Lalanne and Ferraris, 1988]; seule l'épaisseur du volant d'inertie est diminuée de façon à le rendre plus souple et afin d'illustrer la pertinence d'une modélisation tridimensionnelle. La modélisation éléments finis (éléments quadratiques à vingt noeuds) du système est représentée sur la figure 3.6.b. Les calculs vibratoires sont réalisés sur base modale et dans le domaine fréquentiel. On valide notre méthode éléments finis en la comparant à la modélisation classique avec des éléments "poutre" [Combescure, 2003] (des éléments 2D Fourier auraient pu être utilisés).

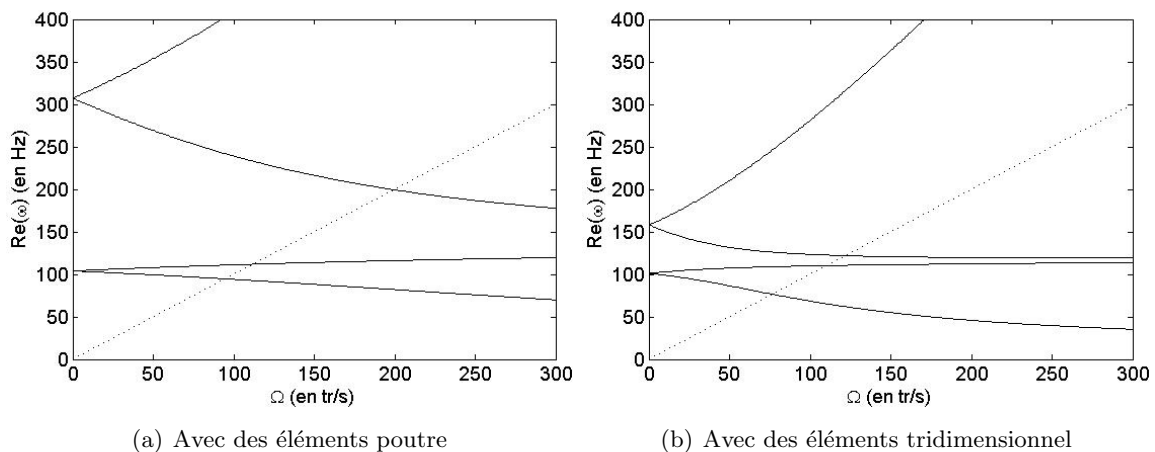


Figure 3.7: Evolution des fréquences des deux premiers modes de l'arbre dans \mathbf{R}_n

3.2.2 Modélisation avec des éléments "poutre"

En appliquant la transformation de Ritz, on passe de la base physique à la base modale à travers le problème aux valeurs propres associé au système non amorti au repos

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \vec{U} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{U}(t) = \Phi \vec{\eta}(t). \quad (3.40)$$

Le problème est écrit directement dans le repère Galiléen et la base Φ est tronquée de façon à ne garder que les quatre premiers modes d'ensemble de la machine. On obtient alors le premier mode double (identique dans les directions transverses x et y) de poutre à la fréquence propre $\omega_1 = 106$ Hz et le second mode double de poutre qui oscille à la fréquence $\omega_2 = 310$ Hz. Les fréquences ω_1 et ω_2 se retrouvent sur le diagramme de Campbell de la figure 3.7.a pour $\Omega = 0$ Tr/s.

Pour étudier les vibrations libres du système sur la base modale considérée, on résout l'équation d'équilibre homogénéisée, définie pour chaque Ω ,

$$\bar{\mathbb{M}} \ddot{\vec{\eta}}(t) + (\bar{\mathbb{C}} + \bar{\mathbb{G}}_{gyro}(\Omega)) \dot{\vec{\eta}}(t) + \bar{\mathbb{K}} \vec{\eta}(t) = \vec{0}. \quad (3.41)$$

Le chapitre 1 décrivait, entre autre, l'influence de la matrice $\mathbb{H}(\Omega)$, due à l'amortissement tournant visqueux, sur le comportement vibratoire des systèmes tournants. Ce chapitre aborde un autre phénomène qui était négligé jusqu'à présent : le couplage gyroscopique, modélisé à travers la matrice $\mathbb{G}_{gyro}(\Omega)$, qui couple elle aussi les vitesses transverses en x et y . En résolvant le problème aux valeurs propres associé à (3.42) pour chaque Ω , on obtient l'évolution des fréquences des modes complexes sur le diagramme de Campbell figure 3.7.

Sous l'effet de la rotation et à travers le couplage gyroscopique, on distingue pour chaque mode double une séparation entre la fréquence d'un mode tournant dans le sens direct (sens de rotation du rotor) et celle d'un mode rétrograde qui tourne dans le sens inverse du rotor. Dans le repère Galiléen, la fréquence du mode direct augmente et celle du mode rétrograde diminue. La force de balourd étant une force tournante directe dans le repère fixe, le mode direct est excité. Sur le diagramme de Campbell, on peut trouver la fréquence critique principale du système vis-à-vis des forces de balourd en recherchant le point d'intersection entre la fréquence du mode de flexion et la droite $\omega_1^{direct} = \Omega$. Ici, la fréquence critique du système se trouve à $\Omega_c = 113$ tr/s. Le système est stable quelle que soit la vitesse de rotation, on ne représente pas son amortissement $\Im(\omega)$.

Remarques :

- En notant J l'inertie d'un disque animé d'un mouvement de rotation Ω autour de l'axe z et ρ , sa masse volumique; la matrice de couplage gyroscopique du volant d'inertie s'écrit, sous l'hypothèse que les vibrations transverses restent petites,

$$\mathbb{G}_{gyro} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \rho J \\ -\Omega \rho J & 0 \end{pmatrix}_{(x,y)}. \quad (3.42)$$

- Les modes propres d'un oscillateur peuvent toujours être exprimés comme la somme d'une onde tournant dans le sens direct ou rétrograde. Dans le cas du couplage gyroscopique, les modes directs et rétrogrades n'ont pas la même fréquence propre. Dans le cas où il est négligé (chapitre 1), les oscillations transverses sont indépendantes; les modes sont alors réels selon x et y mais peuvent toujours être exprimés comme la somme d'une onde directe et rétrograde de même pulsation. On peut aussi voir les modes paramétriques comme la somme d'ondes tournantes dans le sens direct et rétrograde. Un mode dynamiquement instable par confusion de fréquences (instabilité paramétrique ou instabilité par amortissement tournant) sera direct.

3.2.3 Modélisation avec des éléments tridimensionnels

Soit \vec{U} le vecteur des déformées modales du système $S \cup S'$ au repos obtenu dans le cas classique sans sous-structuration (chapitre 1). Comme dans le cas des éléments poutre, notre base modale est tronquée de façon à ne garder que les quatre premiers modes du système. On obtient alors le premier mode double de poutre à la fréquence $\omega_1 = 101$ Hz et le premier mode double de disque (légèrement couplé au mode de poutre) à la fréquence $\omega_2 = 160$ Hz. Deux déformées modales de \vec{U} sont visibles sur la figure 3.8.

Afin d'étudier le comportement vibratoire du système $S \cup S'$ libre, en rotation, dans le repère Galiléen, on calcule la base modale Φ_{ss} du système $S^0 \cup S'^0$ au repos au moyen du problème aux valeurs propres

$$(\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} + \mathbf{L}^{0T} \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^0 \vec{\eta} = \vec{0}. \quad (3.43)$$

L'arbre et son volant d'inertie sont modélisés dans le repère tournant \mathbf{R}_r , les déplacements du rotor sont donc bloqués à ses deux extrémités. Afin d'imposer la condition de rotation constante Ω aux modes propres que l'on désire étudier ; on impose la matrice \mathbf{L}^0 , d'une part, sur le contour du volant d'inertie projeté sur le mode de Fourier $n = 1$ longitudinal (mode de disque), d'autre part, sur le contour de l'arbre à $z = l_2$ projeté sur le mode de Fourier plan $n = 1$ (mode de poutre). Les interfaces Γ associées seront des noeuds fictifs fixes O_1 et O_2 situés respectivement en $z = l_1$ et $z = l_2$ étant donné que l'influence de la partie statorique S' est négligeable ($\mathbb{M}_n = \mathbb{C}_n = \mathbb{K}_n = 0$). Il faut introduire cependant la matrice \mathbb{C}_L au noeud O_2 afin de modéliser l'amortissement de palier c_n .

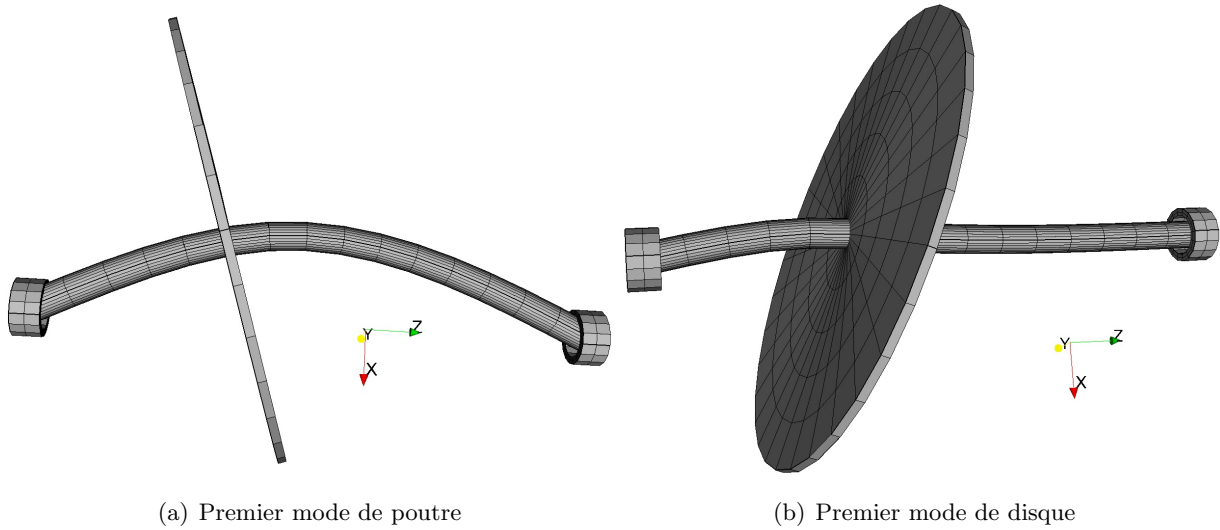


Figure 3.8: Modes propres d'ensemble du modèle éléments finis tridimensionnel

L'équation des vibrations libres s'écrit par recombinaison modale dans la base Φ_{ss} , à l'ordre $j_{max} = 0$, dans le domaine fréquentiel,

$$\left(\omega^2 \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{A}}'^0 \Phi_{ss} \right] + \omega \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{B}}'^0 \Phi_{ss} \right] + \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{C}}'^0 \Phi_{ss} \right] \right) \vec{\eta}_g = \vec{0} \quad (3.44)$$

où l'on considère les matrices $\mathbb{M}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{K}_n$ et \mathbb{K}_L nulles. En résolvant le problème aux valeurs propres complexes pour chaque vitesse de rotation [Benech, 1995], on obtient le diagramme de Campbell du système $S \cup S'$ dans \mathbf{R}_n sur la base modale considérée. L'évolution des fréquences des modes de poutre

et de disque est représentée sur la figure 3.7.b. Le mode rétrograde de poutre est numériquement influencé par le mode de disque (cinématique 3D), ce qui n'est pas le cas du mode direct (la vitesse de rotation critique au balourd sera toujours la même). L'amortissement des modes n'est pas représenté à travers la partie imaginaire de ω étant donné que le système reste stable pour tout Ω .

Remarques :

- Pour un point matériel de masse m et dans le cas d'une rotation Ω autour de l'axe z , la raideur centrifuge et la matrice de couplage de Coriolis s'écrivent respectivement

$$\mathbb{K}_c = \begin{pmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{pmatrix}_{(x,y)} \quad \text{et} \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{pmatrix}_{(x,y)}. \quad (3.45)$$

La matrice de couplage de Coriolis est très proche de la matrice de couplage gyroscopique ; elle couple aussi les déplacements transverses en x et y . Cependant, à cause de leur différence de signes, les fréquences ω' des modes direct diminueront alors que celles des modes rétrogrades augmenteront dans le repère \mathbf{R}_r .

- En négligeant complètement l'influence de S ($\mathbb{C}_L = 0$), on aurait pu modéliser le rotor dans le repère \mathbf{R}_r (avec la même base modale Φ_{ss}) et tracer le diagramme de Campbell en ω' . Par la relation $\omega' = \omega - \Omega$, les fréquences obtenues seraient différentes mais les parties imaginaires des valeurs propres resteraient identiques dans les deux repères.
- Pour un ordre de troncature $j_{max} = 0$, il n'est pas nécessaire de calculer Φ_{ss} par sous-structuration ; les matrices de masse et de rigidité du système au repos sont alors directement les matrices de l'ensemble $S \cup S'$.

4 Etude du régime permanent

On complète l'étude dynamique du système tournant $S \cup S'$ en modélisant les oscillations permanentes d'ensemble dans le repère Galiléen. Le système matriciel linéaire associé à l'équation d'équilibre nous donne la réponse forcée de la structure en rotation soumise aux forces extérieures harmoniques. La modélisation est présentée à travers la réponse au balourd de du cas précédent (i.e. la poutre en rotation avec volant d'inertie souple).

4.1 Calcul par recombinaison modale

Afin d'utiliser la base modale Φ_{ss} définie précédemment et pour une économie de temps de calcul, on réécrit les équations d'équilibre partielles des systèmes S et S' dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire sur les sous-structures S^j et S'^j . Dans la base physique et dans le domaine temporel, les vibrations forcées du système S' dans le repère tournant sont définies par

$$\mathbb{M}_r \ddot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{C}_r + \mathbb{G}) \dot{\vec{U}}'(t) + (\mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma) \vec{U}'(t) = \vec{F}'(t). \quad (3.46)$$

La force de balourd $\vec{F}'(t)$ modélise un déséquilibre du rotor S' ; dans le repère tournant, c'est une force "statique" de fréquence d'excitation nulle, elle s'écrit

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}'. \quad (3.47)$$

De même, la réponse au balourd du système S est définie dans le repère Galiléen par

$$\mathbb{M}_n \ddot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \dot{\vec{U}}(t) + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) \vec{U}(t) = \vec{0}. \quad (3.48)$$

Une anisotropie éventuelle des matrices de rigidité \mathbb{K}_r et \mathbb{K}_n nous incite à écrire le champ $\vec{U}'(t)$ comme la somme des contributions sur les harmoniques 2Ω (voir (3.6)). Etant donné que la force de balourd est statique, la fréquence fondamentale λ' de $\vec{U}'(t)$ est nulle et ce dernier s'écrit

$$\vec{U}'(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}^j \cos(0 + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}^j \sin(0 + 2j\Omega)t. \quad (3.49)$$

La réponse forcée du système S se met sous la forme (3.49) et sous l'hypothèse que les champs de déplacements (et que le champ de forces \vec{F}') sont contenus dans le mode de Fourier spatial $n = 1$, la relation entre les fréquences dans les deux repères s'écrit $\lambda' = \lambda - \Omega$ et on peut alors écrire

$$\vec{U}(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \vec{U}^j \cos(\Omega + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} I\vec{U}^j \sin(\Omega + 2j\Omega)t. \quad (3.50)$$

En remplaçant la réponse au balourd du rotor $\vec{U}'(t)$ par son expression (3.49) dans l'équation d'équilibre partielle (3.46), on obtient dans le domaine fréquentiel, autrement dit sur chaque sous-structure S^j , le système matriciel partiel

$$\mathbb{H}^j \vec{U}^j = \vec{F}^j \quad \forall j \in [-j_{max}, j_{max}] \quad (3.51)$$

$$\text{avec } \mathbb{H}^j = \begin{bmatrix} -(2j\Omega)^2 \mathbb{M}_r + \mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma & 2j\Omega (\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) \\ -2j\Omega (\mathbb{G} + \mathbb{C}_r) & -(2j\Omega)^2 \mathbb{M}_r + \mathbb{K}_r + \mathbb{K}_c + \mathbb{K}_\sigma \end{bmatrix} \quad \text{et } \vec{F}^j = \begin{Bmatrix} \vec{F}^j \\ I\vec{F}^j \end{Bmatrix}.$$

La force de balourd ne s'applique que sur les contributions à l'ordre $j = 0$, elle sera précisée dans la partie suivante. En remplaçant le champ de déplacements sous balourd $\vec{U}(t)$ par son expression (3.50) dans l'équation d'équilibre partielle (3.48), on obtient, sur chaque sous-structure S^j , le système matriciel partiel

$$\mathbb{H}^j \vec{U}^j = \{0\} \quad \forall j \in [-j_{max}, j_{max}] \quad (3.52)$$

$$\text{avec } \mathbb{H}^j = \begin{bmatrix} -(\Omega + 2j\Omega)^2 \mathbb{M}_n + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) & (\Omega + 2j\Omega) (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) \\ -(\Omega + 2j\Omega) (\mathbb{C}_n + \mathbb{C}_L) & -(\Omega + 2j\Omega)^2 \mathbb{M}_n + (\mathbb{K}_n + \mathbb{K}_L) \end{bmatrix}.$$

Par recombinaison modale, l'équation de mouvement forcé du système $S \cup S'$ dans le domaine fréquentiel devient

$$\left[\Phi_{ss}^T \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} (\mathbb{H}^j + \mathbb{H}'^j) \Phi_{ss} \right] \vec{\eta}_p = \Phi_{ss}^T \vec{F}^0. \quad (3.53)$$

Les conditions de liaison $L^{j_{max}}$ étant contenues dans la base modale Φ_{ss} , elles sont imposées implicitement dans l'équation (3.53). Cette équation nous donne donc la réponse au balourd sur la base modale restreinte aux modes de Fourier $n = 1$ dans le repère Galiléen. La réponse forcée modale de la machine soumise à un défaut de forme est alors obtenue pour un ordre de troncature j_{conv} et une vitesse de rotation Ω donnée. Par la transformation de Ritz, on récupère les contributions de la réponse sur chaque sous-structure à travers le vecteur

$$\vec{U}_p^\Omega = \Phi_{ss} \vec{\eta}_p \quad \text{où} \quad \vec{U}_p^\Omega = \left[\tilde{U}^{j'-j_{conv}} \tilde{U}^{-j_{conv}} \dots \tilde{U}^{j_{conv}} \tilde{U}^{j_{conv}} \right]^T. \quad (3.54)$$

Comme dans le cas des modes paramétriques, l'ordre de troncature j_{conv} détermine le nombre de sous-structures nécessaires au calcul de la base Φ_{ss} . En pratique, on visualise la réponse \vec{U}_p^Ω dans le repère Galiléen au moyen de la recombinaison (3.49) et (3.50) en ramenant chaque contribution \tilde{U}^j et $\tilde{U}^{j'}$ à chaque pas de temps t sur le maillage fondamental $S^0 \cup S'^0$.

Remarques :

- Etant donné que la réponse sous balourd est statique dans \mathbf{R}_r , la contribution $I\vec{U}^0$ du champ de déplacements $\vec{U}^j(t)$ donné en (3.49) n'a pas raison d'être. Elle est cependant numériquement maintenue afin de réutiliser la même base Φ_{ss} . Pour retrouver le champ de déplacements physique, il est alors nécessaire d'ajouter numériquement une force fictive sur l'harmonique $j = 0$.
- Dans le repère tournant, le poids propre est un champ de forces harmonique, tournant dans le sens rétrograde de fréquence $-\Omega$; le champ de réponse $\vec{U}^j(t)$ s'exprime alors selon (3.49), avec pour fréquence fondamentale $\lambda' = -\Omega$. Sur le même principe, $\vec{U}^j(t)$ s'écrit sous la forme (3.50) avec $\lambda = 0$ étant donné que le poids propre est statique dans le repère Galiléen. En introduisant les champs de déplacements dans les équations d'équilibre partielles (3.46) et (3.48) et par recombinaison modale, on obtient l'équation de mouvement sous poids propre dans le repère Galiléen et sur base modale.

4.2 Poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes

On reprend le cas d'une poutre avec volant d'inertie sur appuis isotropes. Le régime permanent du système tournant $S \cup S'$ sera modélisé avec des éléments poutre ou tridimensionnels dans le repère Galiléen. Le modèle est toujours considéré sans défauts ($j_{max} = j_{conv} = 0$), les calculs se feront sur les bases modales déjà calculées, à savoir les bases Φ et Φ_{ss} . En étudiant le système tournant sous différents balourds, on valide la modélisation définie précédemment et on met en évidence la pertinence d'une modélisation 3D.

4.2.1 Régime permanent du système sous balourd statique

La première configuration observée est la réponse à un balourd statique du système $S \cup S'$. Ce type de balourd apparaît automatiquement lorsque le centre de gravité du système n'est pas sur l'axe de rotation de la machine. On modélise ce phénomène en ajoutant, sur le rayon extérieur du volant (noeud A de coordonnées $x_A = R_2$, $y_A = 0$ et $z_A = l_1$), une masse $m_b = 0.001$ kg (figure 3.9.a). Par recombinaison modale (sur la base Φ), on obtient l'équation en régime permanent modélisée avec des éléments de poutre (où $x_A = 0$, $y_A = 0$ et $z_A = l_1$) directement dans le repère \mathbf{R}_n

$$\mathbb{M} \ddot{\vec{\eta}}(t) + (\bar{\mathbb{C}} + \bar{\mathbb{G}}_{gyro}(\Omega)) \dot{\vec{\eta}}(t) + \bar{\mathbb{K}} \vec{\eta}(t) = \Phi^T \vec{F}_A(t) \quad \text{avec} \quad \vec{F}_A(t) = \begin{Bmatrix} m_b R_2 \Omega^2 \cos \Omega t \\ m_b R_2 \Omega^2 \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

La force de balourd est tournante dans le sens direct, de fréquence Ω . Pour chaque vitesse de rotation Ω , la transformation de Ritz nous permet d'obtenir le champ de déplacements sur base physique. La figure 3.9.b représente l'amplitude de ce champ de déplacements au noeud A . On observe un pic de

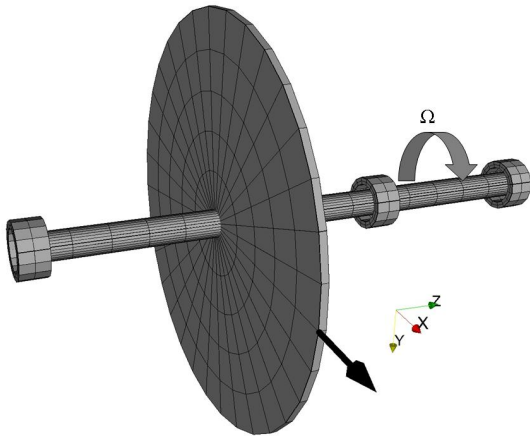
résonance amorti (avec l'amortissement de palier $c_n = 300$ N.s/m) à la fréquence de rotation critique de flexion $\Omega_c = 113$ Tr/s (fréquence cohérente avec le diagramme de Campbell figure 3.7.a).

En utilisant la base modale Φ_{ss} calculée dans la partie précédente et par recombinaison modale, on peut aussi modéliser le régime permanent du système tournant $S \cup S'$ dans le repère Galiléen avec des éléments tridimensionnels. Considérant le système sans défaut, on obtient à l'ordre $j_{max} = 0$

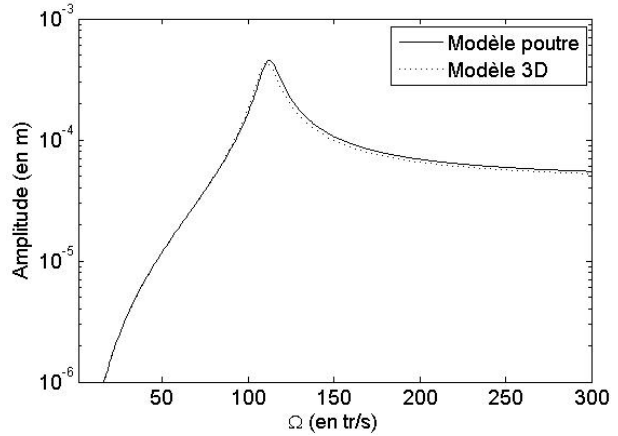
$$[\Phi_{ss}^T (\mathbb{H}^0 + \mathbb{H}'^0) \Phi_{ss}] \vec{\eta}_p = \Phi_{ss}^T \vec{F}_A'^0 \quad \text{avec} \quad \vec{F}_A'^0 = \begin{Bmatrix} m_b \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad I \vec{F}_A'^0 = \begin{Bmatrix} m_b \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.56)$$

La force de balourd en A est statique dans le repère \mathbf{R}_r , on exprime donc (3.56) dans \mathbf{R}_n par les conditions de liaison $L^{j_{max}}$ (contenues dans Φ_{ss}). Notons qu'il est nécessaire d'introduire numériquement la force fictive $I \vec{F}_A'^0$ afin d'obtenir la réponse au balourd physique du système. L'amplitude du champ de déplacements au point A est obtenu par la transformation de Ritz pour chaque Ω (figure 3.9.b).

Les modélisations tridimensionnelles et curvilignes sont équivalentes : la prise en compte du mode de disque n'a pas grand intérêt dans le cas d'un balourd statique.



(a) Modélisation du système en 3D



(b) Réponse au balourd en fonction de Ω

Figure 3.9: Réponse du système à un balourd statique

4.2.2 Régime permanent du système sous balourd dynamique

La seconde configuration étudiée est celle du balourd dynamique. Ce type de phénomène est souvent rencontré dans le domaine des machines tournantes, l'exemple le plus connu est l'inclinaison d'un volant d'inertie. Nous étudions donc l'influence que peut avoir l'inclinaison du disque de la figure 3.10.a d'un angle $\phi = 2^\circ$ autour de l'axe x sur la réponse vibratoire du système [Heo and Chung, 2004].

L'équation en régime permanent avec des éléments poutre est donnée par (3.55) où le chargement extérieur tournant est un moment au point A introduit par l'inclinaison du volant que l'on considère rigide (de masse m_{volant})

$$\mathcal{M}_A = \begin{Bmatrix} m_{volant} \tan \phi \Omega^2 \frac{R_2^2}{2} \cos \Omega t \\ m_{volant} \tan \phi \Omega^2 \frac{R_2^2}{2} \sin \Omega t \end{Bmatrix}_{(x,y)} \quad \text{avec} \quad m_{volant} = \pi R_2^2 h \rho. \quad (3.57)$$

Le champ de déplacements est recombinaé dans la base physique pour chaque Ω et l'amplitude de la réponse extraite au noeud A est illustrée sur la figure 3.10.b. On observe une résonance amortie à une fréquence de rotation critique Ω_c identique à celle obtenue dans le cas du balourd statique.

Dans le cas où l'on modélise le régime permanent $S \cup S'$ avec des éléments tridimensionnels (équation (3.56)), les forces extérieures sont simplement les forces centrifuges sur la configuration déformée (avec $\phi = 2^\circ$), à savoir

$$\tilde{\vec{F}}'^0 = \begin{bmatrix} -\mathbb{K}_c & 0 \\ 0 & -\mathbb{K}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}'^0 \\ I\vec{U}'^0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Les forces centrifuges $\tilde{\vec{F}}'^0$ sont suiveuses et proportionnelles à $m\Omega^2$. Elles sont statiques dans le repère \mathbf{R}_r et sont représentées figure 3.10.a. Comme dans le cas du balourd statique, il est nécessaire d'ajouter les forces centrifuges fictives $I\vec{F}'^0$ afin de retrouver les niveaux d'amplitude physiques du régime permanent. L'amplitude de la réponse au noeud A est donnée figure 3.10.b. On retrouve la fréquence critique de rotation Ω_c obtenue avec les éléments de poutre mais le niveau vibratoire est moins élevé.

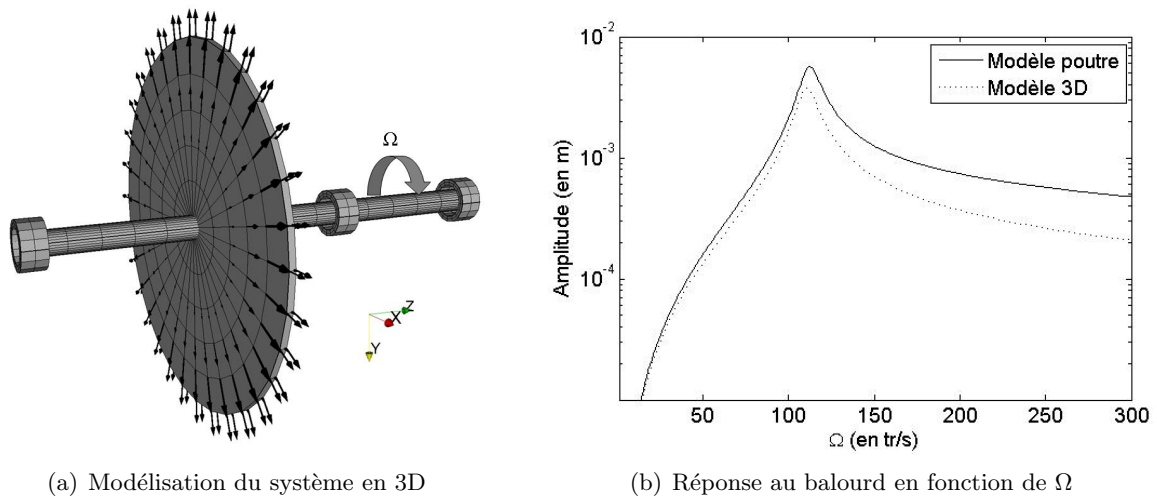


Figure 3.10: Réponse du système à un balourd dynamique

L'explication de la différence de niveaux vibratoires entre les deux modélisations est due à la prise en compte de la souplesse du disque lorsque l'on utilise des éléments tridimensionnels. En effet, sous l'effet de la rotation Ω , le volant d'inertie se redresse et le moment induit par celui-ci diminue. Les forces suiveuses $\tilde{\vec{F}}'^0$ et la matrice de raideur géométrique \mathbb{K}_σ permettent de modéliser ce phénomène.

On sait grâce aux études réalisées dans [Lazarus, 2005], que le disque se redresse pour une vitesse de rotation $\Omega = \omega_{disque}$ où ω_{disque} est la fréquence propre au repos du mode de disque $n = 1$. Les diagrammes de Campbell des fréquences des deux premiers modes de $S \cup S'$ dans le cas 1 où $E_{volant} = 100 \times E_{arbre}$ et le cas 2 où $E_{volant} = 1/10 \times E_{arbre}$ sont tracés sur les figures 3.11.a et 3.11.b. Le volant du cas 1 est rigide ; dans la plage de rotation étudiée, le disque ne s'est pas redressé ($\omega_{disque} > 300$ Hz), la réponse est alors identique à celle obtenue avec les éléments poutre. Le volant du cas 2 est souple ; ϕ diminue dès que $\Omega = \omega_{disque} = 50$ Hz, la réponse au balourd dynamique (qui porte bien son nom) est en réalité bien moins préjudiciable que celle obtenue avec l'hypothèse rigide des éléments de poutre.

Ce petit exemple caractérise simplement la souplesse d'un volant vis-à-vis du balourd dynamique qu'il induit : si le mode de disque est à plus basse fréquence (ou de même ordre de grandeur) que le mode d'arbre au repos, le volant est souple et une modélisation tridimensionnelle de l'ensemble est pertinente [Combescure and Lazarus, 2008].

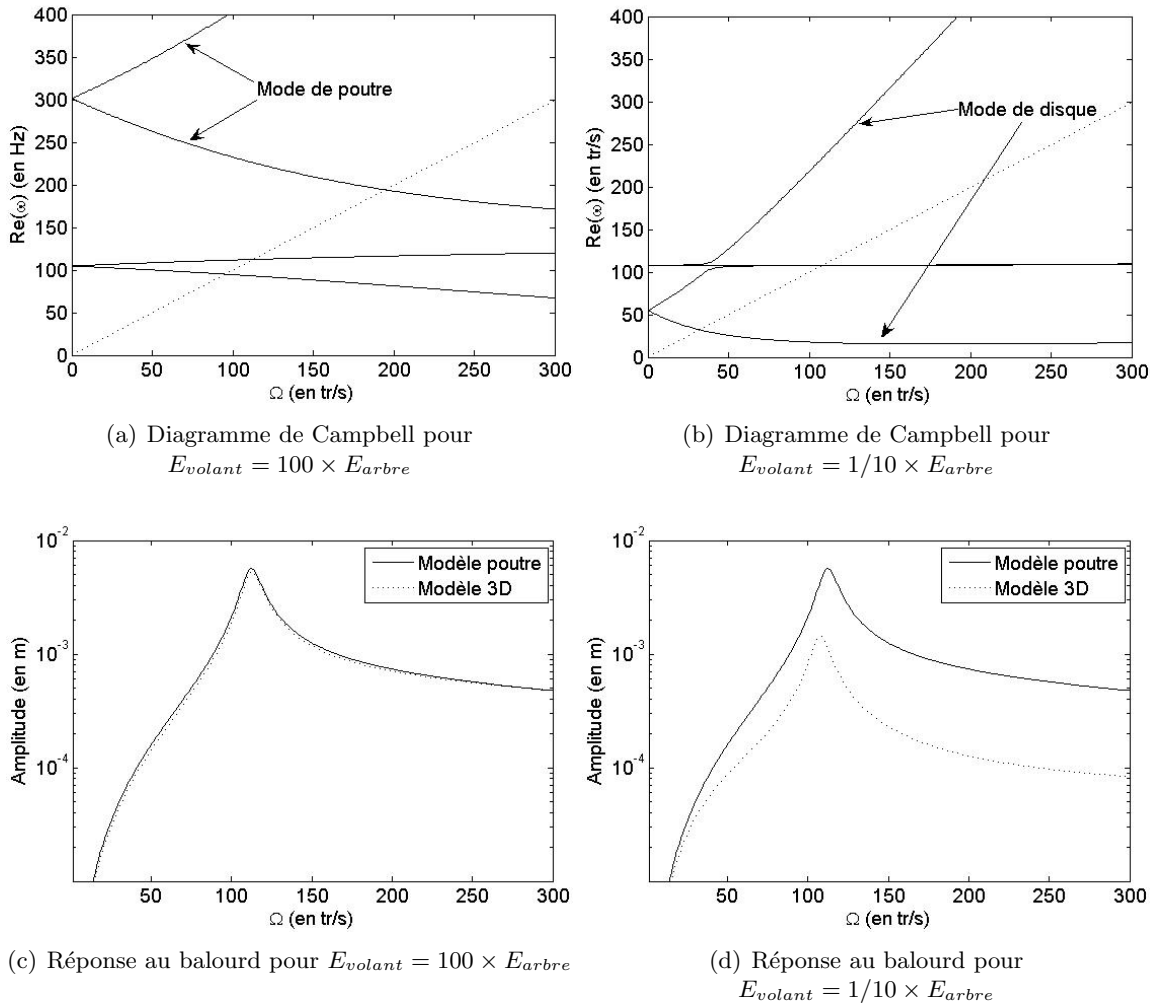


Figure 3.11: Influence de la rigidité du volant d'inertie sur la réponse à un balourd dynamique

Remarque :

- Le régime permanent du système $S \cup S'$ a été modélisé à l'ordre $j_{max} = 0$ ce qui signifie implicitement que l'on a considéré la structure axisymétrique. Le défaut d'inclinaison du volant induit un moment extérieur au second membre mais les matrices utilisées (masse, rigidité et amortissement) sont celles du système sain. On donne dans le chapitre suivant la modélisation éléments finis d'un système tournant avec défauts de forme; les équations d'équilibre seront écrites à l'ordre $j_{max} \neq 0$.

Chapitre 4

Influence d'un défaut de forme : Approche numérique et expérimentale

Ce dernier chapitre décrit un protocole expérimental, relativement "simple" à mettre en oeuvre, permettant d'illustrer concrètement quelques phénomènes physiques abordés précédemment. Le banc d'essai est composé d'une poutre verticale rectangulaire en rotation, supportée par un ensemble de colonnettes, elles-mêmes rectangulaires. En rotation, sous l'effet du couplage rotor-stator, on mesure alors les oscillations paramétriques du système libre. Le comportement vibratoire de la machine tournante avec défaut de forme est alors comparé aux résultats de calculs obtenus par la modélisation éléments finis tridimensionnelle mise en place dans le chapitre 3.

Sommaire

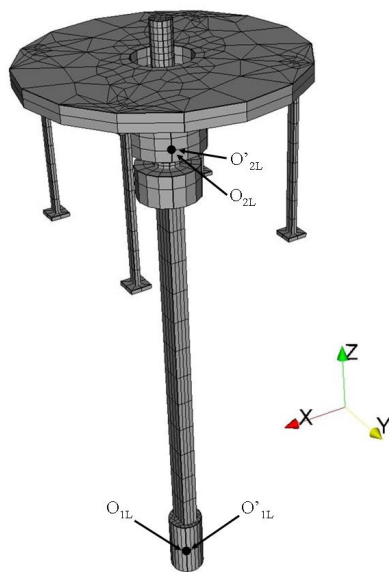
1	Présentation du banc d'essai	76
1.1	Description de la maquette	76
1.2	Instrumentation	78
1.3	Protocole expérimental	79
2	Cas particulier P_1 : rotor rectangulaire sur palier isotrope	80
2.1	Modélisation éléments finis tridimensionnelle	80
2.2	Résultats expérimentaux	84
2.3	Comparaison essais-calculs	86
3	Cas P_2 : étude des oscillations paramétriques libres	87
3.1	Modélisation éléments finis tridimensionnelle	87
3.2	Résultats expérimentaux	92
3.3	Comparaison essais-calculs	95

1 Présentation du banc d'essai

Dans cette première partie, nous présentons le programme expérimental utilisant la maquette ROTEC assemblée au CEA de Saclay. Cette maquette se devant d'être la plus simple et la plus rapide à mettre en place étant donné certaines contraintes de temps, ROTEC est l'adaptation de l'ancien banc d'essai ROTEX [Piteau and Valin, 1995a, Piteau and Valin, 1995b] qui traitait les oscillations d'un rotor excentré en immersion (certains éléments ainsi que l'essentiel de l'instrumentation de ROTEC est issu de ROTEX). ROTEC a été pensé comme le meilleur compromis entre la facilité de mise en oeuvre et la qualité des résultats obtenus.

1.1 Description de la maquette

Les figures 4.1 et 4.2 représentent différentes illustrations de l'oscillateur paramétrique ROTEC ; la figure 4.1.a est la modélisation par éléments finis tridimensionnel du système et la figure 4.1.b est une photo de la maquette avec son massif de réaction. Sur la figure 4.2, on décrit les différents composants du banc d'essai à l'aide de la modélisation tridimensionnelle.



(a) Modélisation éléments finis 3D



(b) Banc d'essai et massif de réaction

Figure 4.1: Présentation du banc d'essai ROTEC

Le banc est composé d'un rotor vertical rectangulaire en rotation dans une plate-forme rigide supportée par quatre colonnettes rectangulaires. Une masse cylindrique est usinée à l'extrémité basse de la poutre tournante afin d'obtenir une surface continue nous permettant d'effectuer les mesures vibratoires du rotor. La rotation du système est permise par deux paliers à roulements coniques qui établissent la liaison entre la plate-forme et un manchon cylindrique en aluminium (figure 4.2). Cette partie aluminium est assemblée à la poutre rectangulaire au moyen d'un système vis-écrou. Les quatre colonnettes sont liées à la plate-forme et au bâti (figure 4.1.b) par le même principe. Ce dernier provient

de l'ancienne expérience ROTEX (il en est de même pour la plate-forme) et consiste en une enceinte étanche, fixée à un massif de réaction en béton de manière à découpler les fréquences de la maquette de celles de son environnement extérieur. Sur la partie supérieure de l'enceinte, on relie l'extrémité du manchon aluminium à un moteur asynchrone à fréquence variable $[0 - 50]$ Hz, solidaire de l'enceinte, à travers un double cardan (figure 4.3.b). Mis à part le manchon en aluminium, les constituants du banc d'essai sont en acier inoxydable.

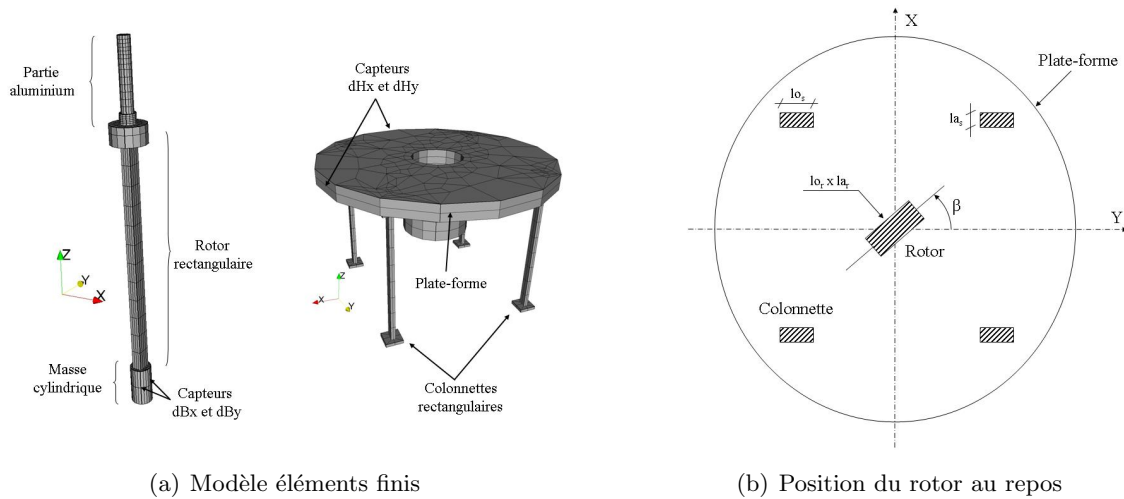


Figure 4.2: Schémas descriptifs de la maquette

Afin d'obtenir les résultats les plus pertinents possibles, les caractéristiques géométriques et mécaniques du système ne doivent pas être choisies au hasard. Un rotor souple sur un stator trop raide ou inversement un rotor rigide sur un stator souple ne nous permettrait pas d'illustrer le comportement vibratoire paramétrique du système par couplage rotor-stator. On réalise donc un prédimensionnement du banc d'essai de façon à obtenir ; d'une part, des modes propres au repos en accord avec la plage de rotation $[0 - 50]$ Hz imposée par le moteur, d'autre part, un couplage fort entre les parties fixes et tournantes. Certains éléments (bâti, plate-forme, manchon,...) ne pouvant être modifiés, on optimise sous contraintes uniquement les dimensions géométriques du rotor et des colonnettes en acier. Les caractéristiques géométriques obtenues sont alors :

- Données relatives au rotor :
 - Section de la poutre : $l_{o_r} \times l_{a_r} = 0.034 \times 0.024$ m,
 - Hauteur de la poutre : $h_r = 0.60$ m,
 - Hauteur de la masse cylindrique : $r_c = 0.027$ m,
 - Rayon de la masse cylindrique : $h_c = 0.10$ m.
- Données relatives au stator :
 - Section des colonnettes : $l_{o_s} \times l_{a_s} = 0.0119 \times 0.007$ m,
 - Hauteur des colonnettes : $h_s = 0.21$ m.

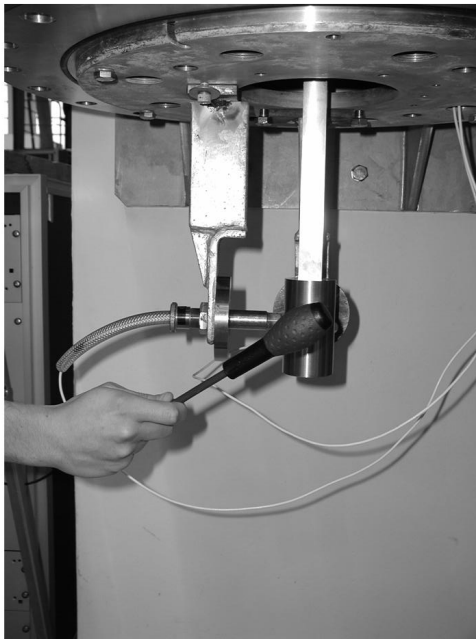
Les caractéristiques de l'acier inoxydable choisi sont un module d'Young $E = 200 \times 10^9$ Pa (71×10^9 Pa pour l'aluminium) et une masse volumique $\rho = 7900$ Kg/m³ (2700 Kg/m³ pour l'aluminium). Avec les dimensions choisies, la masse du rotor est alors de $m_r = 7.24$ kg et celle du stator (colonnettes + plate-forme) devient $m_n = 23$ kg.

Remarques :

- Tel qu'il a été usiné, ce banc d'essai nous permet de négliger l'influence du couplage gyroscopique sur son comportement vibratoire. On s'affranchit donc de ce phénomène physique dans l'expérience et dans la modélisation, ce qui nous permet de nous focaliser uniquement sur l'influence d'un défaut de forme.
- La figure 4.2.b est une coupe transversale de la maquette. On oriente les colonnettes de manière à ce que l'inertie la plus faible soit selon l'axe x . Au repos, la position du rotor est caractérisée par un angle β .
- On doit la présence du banc d'essai ROTEX aux nombreuses études concernant le comportement vibratoire des rotors immergés (rotors centrés [Axisa and Antunes, 1992, Antunes et al., 1992] ou excentrés [Antunes et al., 1996a, Antunes et al., 1996b, Grunenwald, 1994]) menées il y a quelques années pour les pompes du circuit primaire des surgénérateurs..

1.2 Instrumentation

Les appareils de mesures associés au banc d'essai ROTEC proviennent de l'expérience précédente ROTEX. On s'aidera des photos 4.3.a et 4.3.b pour visualiser l'instrumentation décrite dans la suite.



(a) "Marteau de choc" et capteurs



(b) Pots vibrants : excitation bruit blanc

Figure 4.3: Description de l'instrumentation du banc d'essai

Afin de mesurer le champ de déplacements de la maquette ROTEC, on utilise des capteurs sans contact à courant de Foucault. Ces capteurs génèrent un champ magnétique continu sensible aux mouvements de la cible métallique à étudier. En les étalonnant par rapport à la position d'équilibre de la cible, on obtient précisément la variation de déplacements. Pour modéliser le mouvement d'ensemble du banc, l'ensemble des capteurs dH et dB est positionné respectivement sur le stator et le rotor (la localisation de ces capteurs est donnée figure 4.2). Les vibrations transverses du système en rotation autour de

l'axe z sont prises en compte en plaçant les capteurs selon les axes x et y . Ainsi, les capteurs dBx et dB_y , situés autour de la masse cylindrique du rotor, nous permettent de mesurer les vibrations de la masse tournante m_{rotor} respectivement dans les directions x et y (figure 4.3.a). Les capteurs dHx et dHy , situés au niveau de la plate-forme, nous permettent de mesurer les déplacements de la masse fixe m_{stator} respectivement selon x et y . Les capteurs sont fixés sur le bâti de façon à ne mesurer que les vibrations de la maquette.

Le système tournant ROTEC est légèrement déséquilibré, on observe un faux rond de 4 dixième de millimètre sur la masse cylindrique à l'extrémité de la poutre tournante. La réponse vibratoire naturelle observée par les capteurs dH et dB est donc la réponse au balourd du système dont le signal est très fortement bruité, ce qui le rend difficilement interprétable. La maquette est donc artificiellement excitée afin de pouvoir extraire du signal les informations nécessaires à l'étude vibratoire de l'oscillateur. L'excitation du système peut être réalisée à l'aide d'un choc (mou) sur la masse cylindrique de la poutre tournante (figure 4.3.a), le contenu fréquentiel du choc produit étant suffisamment large pour exciter les modes propres dans la plage de fréquence observée $[0 - 50]$ Hz. La seconde solution retenue est l'excitation de la maquette par des pots vibrants situés au niveau de la plate-forme dans les directions x et y (figure 4.3.b). Les vibrations du pot sont de type bruit blanc de façon à obtenir une réponse vibratoire en dH et dB suffisamment riche en informations. On s'assure que les méthodes d'excitation utilisées ne modifient pas le comportement dynamique du banc.

Remarques :

- Les capteurs à courant de Foucault sont efficaces pour mesurer les petits déplacements des surfaces métalliques lisses. Notre expérience leur convient parfaitement étant données les cibles choisies et les vibrations étudiées qui sont de faibles amplitudes.
- On obtiendrait une excitation plus propre (signal maîtrisé) en utilisant un palier magnétique au niveau de la masse cylindrique de la poutre en rotation. Cependant, le coût et la mise en oeuvre d'un tel dispositif ne répondraient plus aux critères de dispositif expérimental "simple" de ROTEC.

1.3 Protocole expérimental

L'objectif du banc d'essai expérimental ROTEC est de caractériser le comportement vibratoire de la maquette en rotation afin de comparer les résultats obtenus à la modélisation éléments finis tridimensionnelle associée. On ne s'intéresse ici qu'aux oscillations libres du système et notamment à l'évolution de ses fréquences propres en fonction de sa rotation. En pratique, on considère deux configurations différentes du banc : dans le cas P_1 , on immobilise la plate-forme que l'on fixe à l'enceinte; dans le cas P_2 , elle est libre de se déplacer.

1.3.1 Cas P_1

Dans le cas P_1 , le système à étudier est celui d'une poutre rectangulaire en rotation supportée par un stator, considéré infiniment rigide : c'est le cas particulier du comportement vibratoire d'un rotor seul. Pour déterminer les oscillations libres du système, on excite la poutre en rotation dans la direction x au moyen du "marteau de choc" de la figure 4.3.a. Pour la vitesse de rotation considérée, on réalise alors une série de 10 chocs mous afin de faire répondre le rotor sur les modes propres qui nous intéressent, à savoir les premiers modes d'ensemble. Les fréquences propres de la maquette sont obtenues pour chaque Ω en moyennant les Densités Spectrales de Puissance des signaux obtenus sur les capteurs dBX et DBY [Max and Lacoume, 1996].

Remarques :

- Au repos, on choisit un angle $\beta = 45^\circ$ afin d'exciter les modes en x et y . Lorsque le système est en rotation, tous les modes du système participent.
- En pratique, pour que la rotation Ω étudiée soit considérée constante, on commence une campagne d'essai après avoir maintenu le moteur en rotation constante pendant 1 heure. Cette démarche nous permet aussi de mettre à température la graisse des paliers et ainsi de conserver un amortissement fixe constant.
- Nous ne pouvons pas utiliser les fonctions de transfert entre la réponse vibratoire des capteurs dB et le signal d'excitation étant donné que la force de choc n'est pas parfaitement maîtrisée (figure 4.3.a).

1.3.2 Cas P_2

Dans le cas P_2 , le comportement vibratoire d'ensemble de la maquette est celui d'un oscillateur paramétrique tournant étant donné le couplage rotor-stator. Pour déterminer les vibrations du système libre, on utilise deux pots vibrants qui excitent le banc au niveau de la plate-forme dans les directions x et y . Le signal de l'excitation est un bruit blanc de façon à obtenir l'ensemble des modes qui nous intéressent (on s'intéressera toujours aux premiers modes). On accède au comportement dynamique du banc en analysant les réponses vibratoires des capteurs dB et dH dans les différentes directions x et y . Les forces introduites étant parfaitement connues dans ce cas (les pots vibrants sont équipés de capteurs de force), les fonctions de transfert peuvent être calculées entre les forces d'excitation et les réponses des capteurs.

Remarques :

- On considère la configuration de référence avec $\beta = 0^\circ$ au repos.
- Contrairement au cas P_1 , le nombre de mesures par vitesse de rotation est beaucoup plus important grâce à l'utilisation des pots vibrants. On réalise en moyenne 100 mesures afin d'obtenir une réponse en fréquence la plus précise possible.

2 Cas particulier P_1 : rotor rectangulaire sur palier isotrope

Dans une première étape, les déplacements de la plate-forme sont bloqués et on étudie le comportement vibratoire du rotor dissymétrique seul étant donné que le stator est infiniment rigide. Ce système tournant est un cas particulier relativement connu de la littérature [Brosens and Crandall, 1961, Crandall and Brosens, 1961] de façon à valider notre processus expérimental sur un premier exemple plus simple que le cas général. En pratique, les oscillations libres du rotor sont modélisées par la synthèse modale mise en place dans le chapitre précédent puis comparées aux résultats de mesures effectuées in situ.

2.1 Modélisation éléments finis tridimensionnelle

Soit \vec{U} le vecteur des déformées modales de la poutre S' au repos obtenu dans le cas classique avec la méthode de Ritz du chapitre 1 (au moyen du logiciel Cast3m). La poutre rectangulaire est encastree à son extrémité supérieure au niveau des paliers de la plate-forme, les éléments finis utilisés sont des éléments quadratiques à 20 noeuds. On tronque alors la base modale Φ de façon à ne garder que les modes d'ensemble dont la fréquence propre est du même ordre de grandeur que la plage d'étude de la maquette, c'est-à-dire la plage de fonctionnement du moteur $[0 - 50]$ Hz. En bloquant le mode

de torsion du rotor (hypothèse vérifiée sur le banc d'essai par la présence du moteur qui impose la vitesse de rotation), les deux premiers modes de poutre du système sont conservés. Le rotor étant rectangulaire, on distingue le mode selon x à la fréquence $\omega_x = 20$ Hz du mode selon y à la fréquence $\omega_y = 23$ Hz. Ces deux déformées modales sont données figure 4.4 (la partie statorique est modélisée uniquement pour la compréhension visuelle).

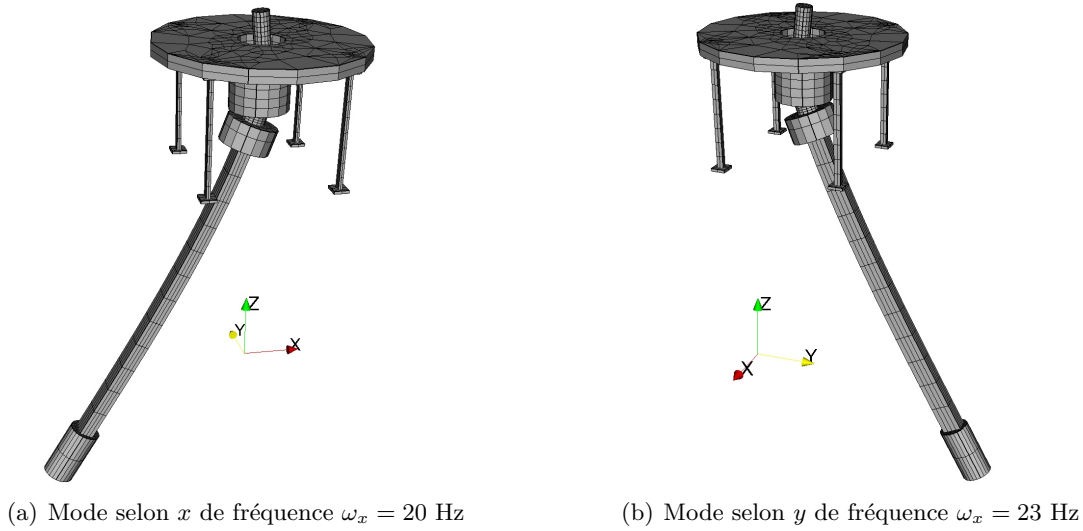


Figure 4.4: Visualisation des déformées modales du rotor seul au repos

Afin d'étudier le comportement vibratoire du système S' libre, en rotation, dans le repère Galiléen, on calcule une base modale Φ_{ss} du système au repos par sous-structuration au moyen du problème aux valeurs propres

$$(\bar{\mathbb{K}} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} + \mathbf{L}_{A_3}^T \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{A_3} \vec{\eta} = \vec{0}. \quad (4.1)$$

La poutre rectangulaire et sa masse cylindrique sont modélisées dans le repère tournant \mathbf{R}_r ; la base modale est donc calculée en imposant une condition d'encastrement à l'extrémité supérieure du rotor afin de modéliser les paliers. Pour prendre en compte la rotation constante Ω dans l'étude de nos modes d'ensemble figure 4.4, on introduit la matrice de liaison \mathbf{L}_{A_3} sur le contour inférieur Γ_1 de la masse cylindrique projeté sur le mode de Fourier $n = 1$ en son barycentre O'_{1L} (on applique la condition de liaison sur les modes de poutre). L'interface Γ_1 associée est un noeud fictif O_{1L} de mêmes coordonnées que O'_{1L} (figure 4.1.a). Dans le domaine fréquentiel, les conditions de liaison s'écrivent entre les noeuds O_{1L}^0 , O_{1L}^0 et O_{1L}^{-1} . Ces deux derniers noeuds sont directement les sous-structures S^0 et S^{-1} étant donné que l'on considère l'influence de la partie statorique nulle, ce qui implique $\mathbb{M}_n = \mathbb{K}_n = 0$ (et donc $\mathbb{K}_L = 0$ entre Γ_1 et S). Le noeud O_{1L}^0 appartient au sous-maillage S^0 qui discrétise le rotor. Nous sommes ici dans le cas particulier où l'équation dans le domaine fréquentiel (4.1) est exacte étant donné qu'il n'y a pas de couplage avec une raideur anisotrope fixe; il n'est donc pas nécessaire d'utiliser un ordre de troncature fréquentiel j_{max} (voir chapitre 2).

L'équation de mouvement libre s'obtient par recombinaison modale dans la base Φ_{ss} , dans le domaine fréquentiel, et s'écrit

$$\left(\omega^2 \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{A}}^0 \Phi_{ss} \right] + \omega \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{B}}^0 \Phi_{ss} \right] + \left[\Phi_{ss}^T \tilde{\mathbb{C}}^0 \Phi_{ss} \right] \right) \vec{\eta}_g = \vec{0}. \quad (4.2)$$

Les matrices $\tilde{\mathbb{A}}'^0$, $\tilde{\mathbb{B}}'^0$ et $\tilde{\mathbb{C}}'^0$ sont données dans le chapitre précédent en (3.36). Le problème (4.2) est résolu pour chaque vitesse de rotation Ω et nous donne un jeu de quatre valeurs propres (étant donné que l'on a tronqué notre base Φ de façon à ne garder que $k = 2$ modes). Pour chaque Ω , chaque valeur propre est associée à un vecteur propre de la forme

$$\vec{U}_g^\Omega = \Phi_{ss} \vec{\eta}_g \quad \text{où} \quad \vec{U}_g^\Omega = \vec{U}'^0. \quad (4.3)$$

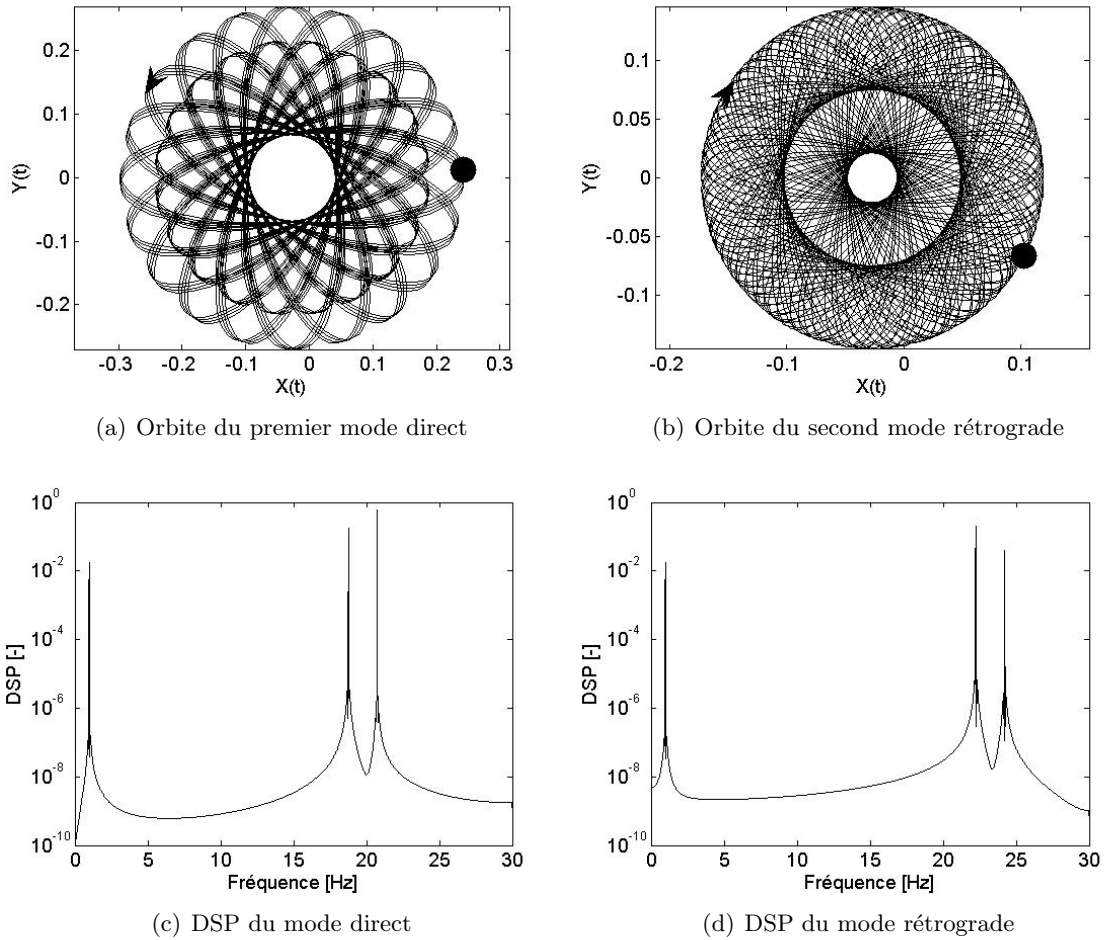


Figure 4.5: Modes propres du rotor en rotation en régime sous-critique ($\Omega = 60$ Tr/min)

Cette déformée est exprimée dans la base modale Φ_{ss} et dans le domaine fréquentiel. Les valeurs propres ω représentent le spectre de fréquences de ces modes. Les modes complexes (couplage des directions transverses x et y) du système en rotation sont obtenus dans le domaine temporel au moyen de la recombinaison (3.34) qui s'écrit dans notre cas particulier

$$\vec{U}_g'(t) = \vec{U}'^0 \cos(\omega - \Omega)t + \vec{I} \vec{U}'^0 \sin(\omega - \Omega)t. \quad (4.4)$$

Le champ de déplacements $\vec{U}_g'(t)$ du rotor est exprimé dans le repère tournant \mathbf{R}_r . En pratique, on observe le mode dans le repère fixe en appliquant la transformation due à la grande rotation en

chaque noeud i du maillage S' . Le champ de déplacements transverse au point O'_{1L} , extrait du mode complexe non amorti $\vec{U}'_g(t)$, exprimé dans \mathbf{R}_n , et calculé pour les fréquences de rotation sous-critiques et surcritiques $\Omega = 60$ Tr/min et $\Omega = 2000$ Tr/min est représenté sur les figures 4.5 et 4.6.

Sous l'effet de la rotation, les 2 modes paramétriques de poutre représentés figure 4.4 deviennent tournant dans le sens direct et rétrograde. Les modes obtenus sont bi-harmoniques de pulsation fondamentale ω et d'harmonique $\omega - 2\Omega$ pour le mode direct et $\omega + 2\Omega$ pour le mode rétrograde. La contribution sur l'harmonique fondamental (proche de la fréquence propre au repos) est prépondérante et l'influence de l'harmonique secondaire dépend de la sévérité du défaut (voir chapitre 2). En régime sur-critique, on observe un moyennage de la raideur apparente du mode de poutre et celui-ci peut se décomposer en un mode direct et rétrograde de fréquence propre $\frac{\omega_x + \omega_y}{2}$. On montre sur la figure 4.6 le mode direct du rotor pour $\Omega = 2000$ Tr/min. Par définition, et pour chaque vitesse de rotation Ω , les oscillations libres de la poutre s'exprime dans la base de ses modes propres.

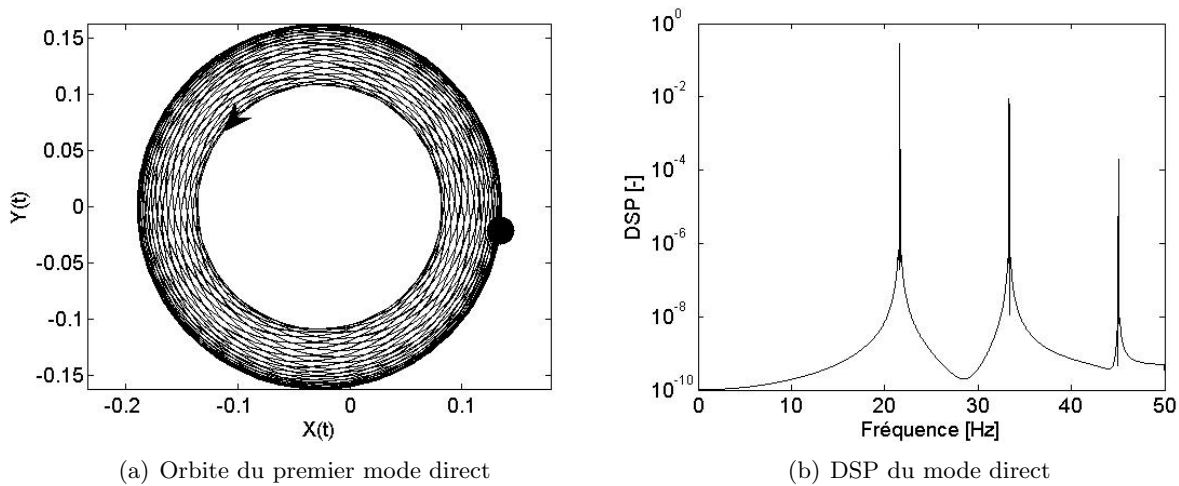


Figure 4.6: Mode propre du rotor en rotation en régime sur-critique ($\Omega = 2000$ Tr/min)

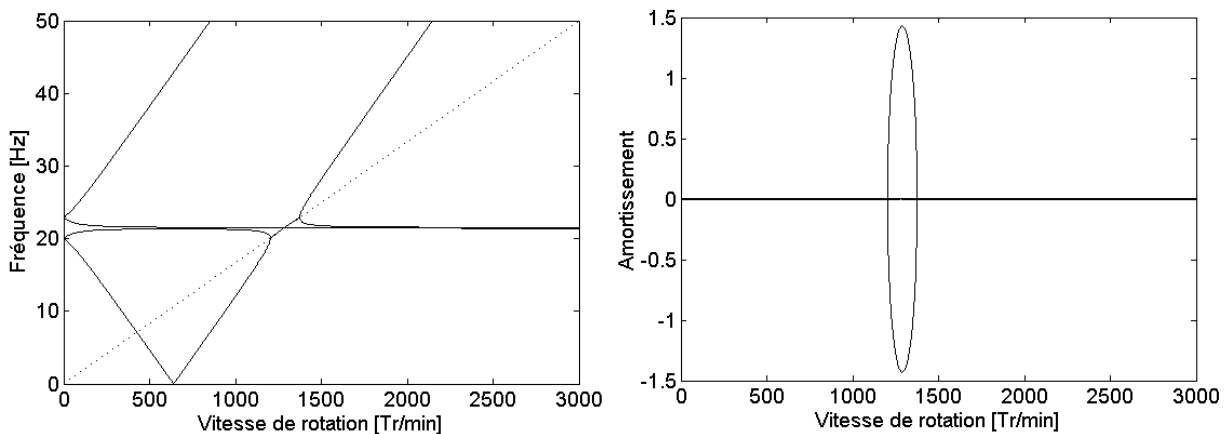
En résolvant le problème aux valeurs propres complexes (4.2) pour chaque vitesse de rotation Ω , on obtient le diagramme de Campbell du rotor dissymétrique dans le repère \mathbf{R}_n sur la base modale considérée. En admettant que l'amortissement tournant n'est pas connu sur le banc d'essai, on considérera que l'amortissement tournant \mathbb{C}_r est nul dans notre modélisation. L'évolution des fréquences des oscillations libres du mode de poutre du rotor non amorti est donnée figure 4.7. La partie réelle des valeurs propres représente l'évolution des pulsations des modes propres et donc du mouvement libre. Pour une vitesse de rotation critique $\omega_x < \Omega < \omega_y$, il y a confusion entre les fréquences du mode direct (fréquences complexes conjuguées) et c'est l'instabilité dynamique du système. On rappelle que ce diagramme de Campbell est un cas particulier du critère de Hsu (chapitre 2). Les pulsations fondamentales ω_x et ω_y se moyennent rapidement ; on les visualise directement en remarquant qu'elles n'évoluent pratiquement pas au cours de la rotation, contrairement aux cas des harmoniques dus aux défauts.

Remarques :

- Il y a bien quatre vecteurs propres associés au problème (4.2) mais les modes sont regroupés en deux familles de deux modes où chaque mode est associé à une des valeurs propres qui est un

harmonique de son spectre de fréquence. Un seul représentant suffit pour caractériser le rotor dans la base modale.

- Contrairement au cas du chapitre 2 où l'on utilisait une notation complexe, les fréquences calculées ne sont pas directement les pulsations du mode. Il est nécessaire de trier les couples valeurs propres - vecteurs propres afin de conserver ceux qui ont un sens physique.
- Sur les DSP associées aux modes représentés sur les figures 4.5 et 4.6, on prend en compte la fréquence de rotation du rotor ; pour visualiser l'influence des oscillations, il est nécessaire d'amplifier virtuellement le champ de déplacements $\vec{U}'_g(t)$.



(a) Partie réelle des 2 premiers modes en fonction de Ω (b) Partie imaginaire des 2 premiers modes en fonction de Ω

Figure 4.7: Diagramme de Campbell du rotor seul dans \mathbf{R}_n obtenu par calculs

2.2 Résultats expérimentaux

Conformément au protocole expérimental décrit dans la partie précédente, on réalise, tous les $\Omega = 1$ Hz (60 Tr/min), une série de 10 chocs mous sur la masse cylindrique avec un angle $\beta = 45^\circ$.

La moyenne des Densité Spectrale de Puissance des réponses transitoires observées à travers les capteurs dBx et DBy est illustrée sur la figure 4.8 pour différentes vitesses de rotation Ω dans la plage de fréquence réduite [15 – 30] Hz. Ces DSP nous renseignent sur le comportement vibratoire du rotor dissymétrique libre. Au repos (figure 4.8.a), on met en évidence les deux modes de poutre légèrement amortis dans la direction x et y respectivement de fréquence propre $\omega_x = 20$ Hz et $\omega_y = 23$ Hz. Les autres modes n'étant pas dans la plage de fréquence expérimentale, nous nous limitons à leur étude. Sous l'effet de la rotation, on observe un dédoublement des fréquences du rotor ; pour chaque mode, on mesure une contribution secondaire plus faible sur l'harmonique 2Ω . Les fréquences fondamentales ω_x et ω_y évoluent légèrement en fonction de Ω et tendent vers la fréquence $\frac{\omega_x + \omega_y}{2}$ (effet de "moyennage"). Les fréquences secondaires dépendent fortement de la vitesse de rotation.

En reportant directement les DSP expérimentales en dBx sur la plage de fréquences [0 – 50] Hz pour chaque vitesse de rotation Ω , on obtient le diagramme de Campbell sur la figure 4.9. La campagne d'essai s'arrête à la vitesse de rotation de 1020 Tr/min ($\Omega = 17$ Hz) où l'amplitude des vibrations de la masse cylindrique devient trop importante et dangereuse. L'ajout d'amortissement fixe n'étant pas envisageable simplement, notre banc est étudié en régime sous-critique. Le contenu fréquentiel

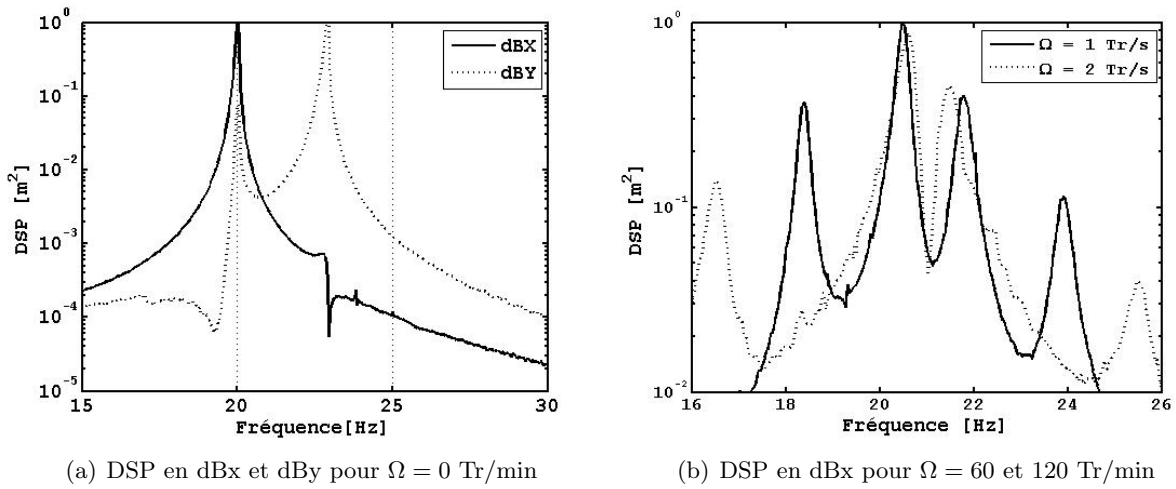


Figure 4.8: Contenu fréquentiel expérimental des oscillations libres du rotor seul

expérimental de la réponse vibratoire est dense. On distingue les deux fréquences fondamentales du mode de poutre qui restent pratiquement constantes au cours de la rotation ainsi que leurs harmoniques en 2Ω . Le signal est perturbé d'une part, par le moteur et sa fréquence de rotation Ω ainsi que ses harmoniques; d'autre part, par les modes de roulements du palier. Pour les faibles vitesses de rotation, le comportement vibratoire des modes de poutre est découplé des modes d'assemblage, on privilégie donc ces vitesses pour illustrer nos résultats expérimentaux (figure 4.8).

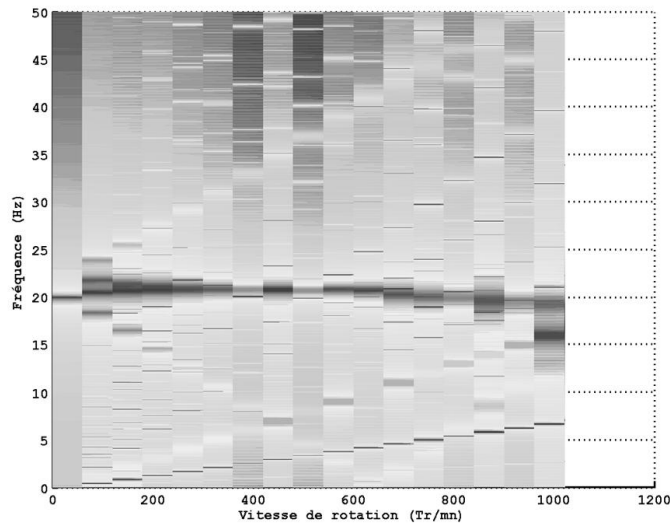


Figure 4.9: Diagramme de Campbell expérimental

Remarques :

- Dans cette expérience, on ne s'intéresse pas à l'influence de l'amortissement physique sur le comportement vibratoire du système; le banc d'essai a donc été assemblé de façon à le limiter au maximum (il est dû en grande partie aux paliers).

- Il aurait été intéressant de vérifier expérimentalement le comportement vibratoire du banc au-delà de la fréquence de rotation $\Omega = 17$ Hz mais la maquette n'était pas préparée à cette éventualité. L'utilisation d'un palier magnétique au niveau de la masse cylindrique aurait pu nous permettre de réaliser cette opération.
- Les fréquences vibratoires dues au moteur ou aux roulements des paliers sont connues (fournies par le constructeur). S'il est nécessaire, on peut donc filtrer les signaux de façon à ne conserver que le comportement vibratoire des modes de poutre étudiés.

2.3 Comparaison essais-calculs

Dans cette dernière partie, les résultats numériques calculés par la modélisation éléments finis sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus dans le cas particulier où l'on bloque la plate-forme de notre banc d'essai.

Les figures 4.10.a et 4.10.b représentent respectivement la comparaison entre la DSP expérimentale des oscillations libres de la masse cylindrique et la DSP des modes bi-harmoniques direct et rétrograde calculés par éléments finis à la vitesse de rotation de 60 Tr/min. Afin de pouvoir comparer ces deux DSP, on norme les modes sur la réponse expérimentale. Les deux approches nous donnent sensiblement les mêmes résultats ce qui signifie que les vibrations libres sont bien une combinaison linéaire des modes du système. A travers la modélisation des modes du rotor, on obtient le contenu fréquentiel de la réponse transitoire ainsi que le rapport entre les contributions de chaque harmonique. Comme souvent dans la modélisation éléments finis, les fréquences numériques surestiment les fréquences expérimentales. Les modes paramétriques implémentés dans le code éléments finis Cast3m sont définis sans amortissement (figure 4.10.b).

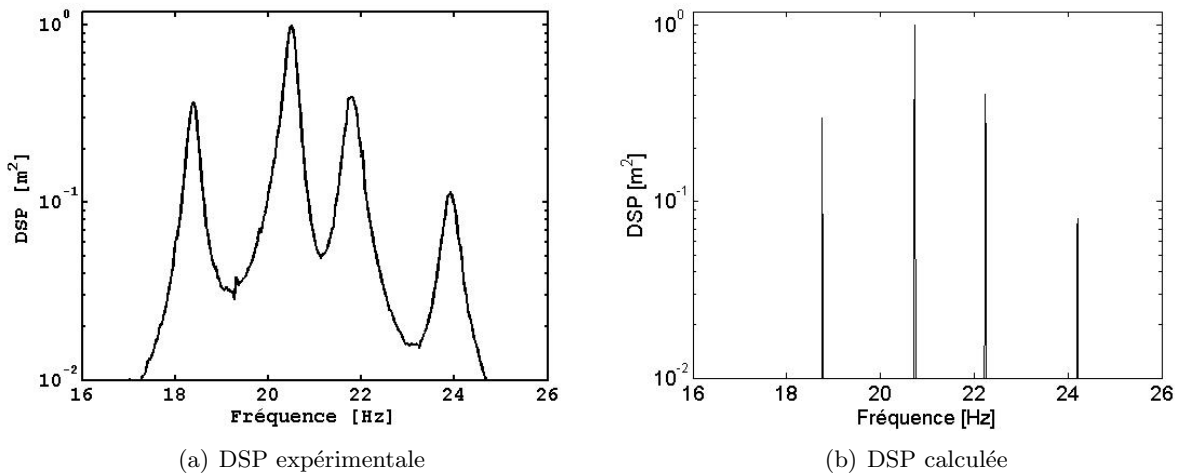


Figure 4.10: Comparaison essais-calculs du contenu fréquentiel de la réponse à $\Omega = 60$ Tr/min

Sur la figure 4.11, les DSP de la réponse impulsionnelle expérimentale sont filtrées de façon à ne garder que les fréquences des modes de poutre et reportées, pour chaque vitesse de rotation Ω , sur le diagramme de Campbell obtenu par la modélisation éléments finis figure 4.7.a. Les points expérimentaux se limitent à la plage de fréquences de rotation sous-critique $[0 - 17]$ Hz. Malgré le léger décalage dû à la modélisation, la comparaison des deux approches est très concluante. On modélise notamment

correctement le moyennage rapide des fréquences fondamentales et l'évolution des harmoniques secondaires est conforme à nos attentes. Il est cependant dommage de n'avoir pu prolonger la campagne d'essai au-delà des vitesses critiques.

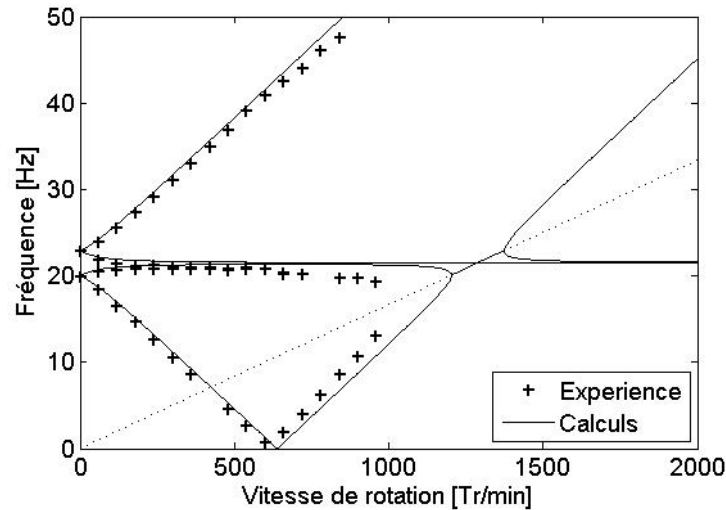


Figure 4.11: Comparaison essais-calculs des diagrammes de Campbell dans le domaine sous-critique

3 Cas P_2 : étude des oscillations paramétriques libres

Intéressons nous à présent au cas général où la plate-forme est libre de se déplacer. Dans ce cas, le banc d'essai, où l'influence des colonnettes rectangulaires n'est plus négligeable, devient paramétrique par interaction entre le rotor et le stator. Dans une première partie, le comportement vibratoire libre de la maquette en rotation sera modélisé par synthèse modale en utilisant un nombre de sous-structures j_{max} tronqué (voir chapitre précédent). Puis l'on présentera les résultats expérimentaux observés in situ afin de pouvoir, dans une dernière partie, comparer les deux approches afin de valider la pertinence du modèle éléments finis.

3.1 Modélisation éléments finis tridimensionnelle

Soit \vec{U} le vecteur des déformées modales du banc d'essai SUS' au repos obtenu dans le cas classique avec la méthode de Ritz du chapitre 1. \vec{U} est la solution du problème de minimisation mis sous la forme du problème aux valeurs propres

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \vec{U} = \vec{0}. \quad (4.5)$$

Les matrices de rigidité \mathbb{K} et de masse \mathbb{M} sont les matrices classiques du système au repos où les éléments utilisés sont toujours quadratiques à 20 noeuds et sont mis en oeuvre au moyen du logiciel Cast3m. Le palier composé de deux roulements coniques au niveau de la plate-forme est modélisé par une liaison parfaite entre le contour du rotor Γ'_2 et le contour du stator Γ_2 . En pratique, on impose un déplacement transverse \vec{U}'_L et \vec{U}_L identique au niveau de la liaison (rigidité de palier \mathbb{K}_L infinie). L'amortissement du banc n'étant pas connu, on considère l'amortissement de palier \mathbb{C}_L nul.

Les déplacements \vec{U}'_L et \vec{U}_L selon l'axe de rotation z ainsi que le mouvement de torsion du rotor sont bloqués (hypothèse vérifiée sur le banc d'essai par la présence du moteur).

La base modale Φ issue du problème (4.5) est tronquée de façon à ne garder que les modes d'ensemble dont la fréquence propre est de même ordre de grandeur que la plage d'étude de la maquette $[0 - 50]$ Hz. On obtient alors quatre modes de poutre (qui sont les premiers modes d'ensemble) dont la fréquence propre diffère selon que l'on soit dans la direction transverse x ou y (étant donnée l'anisotropie du système). Dans la base modale, le schéma équivalent est simplement un système masse-ressort à quatre degrés de liberté généralisés où la masse tournante m_r (poutre tournante) et la masse fixe m_n (plateforme rigide) sont en série. On distingue alors les deux modes où les masses sont en phase (figure 4.12) des modes où elles sont en opposition de phase (figure 4.13).

Contrairement au cas particulier précédent, la fréquence propre des modes d'ensemble du banc dépend de la position angulaire β de la poutre rectangulaire. Le cas P_2 est bien paramétrique, le paramètre β modifie le système étudié. En toute rigueur, il existe une infinité de configurations possibles pour un angle $\beta \in [0 - 90]^\circ$. Les modes propres au repos, dont les déformées sont données figure 4.12 et 4.13, sont calculés pour la configuration de référence $\beta = 0^\circ$.

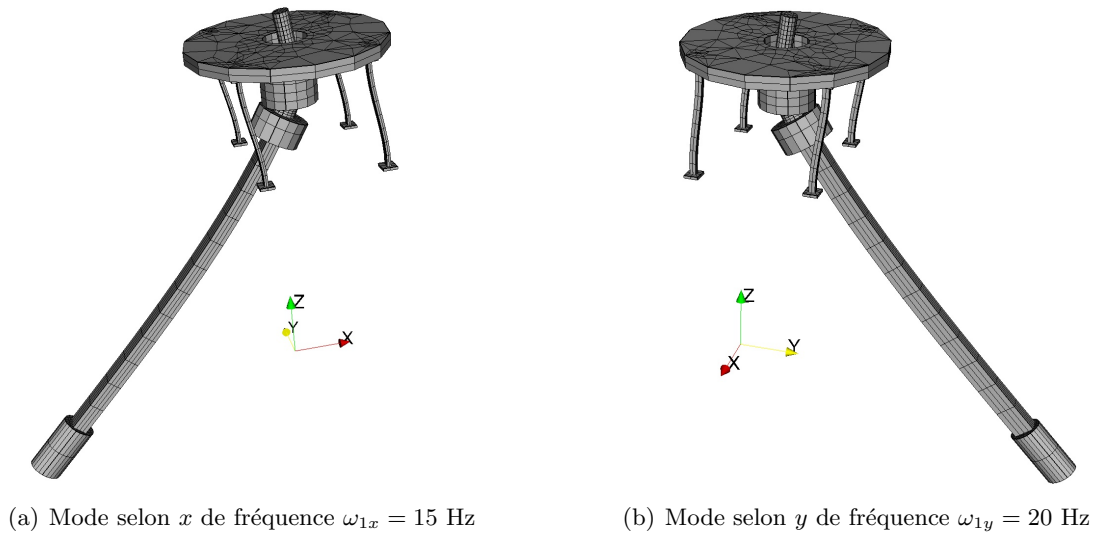


Figure 4.12: Déformées modales en phase de ROTEC au repos

Afin d'étudier le comportement vibratoire du système $S \cup S'$ libre, en rotation, dans le repère Galiléen, on calcule la base modale Φ_{ss} du système au repos, par sous-structuration, au moyen du problème aux valeurs propres

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \bar{\mathbb{M}}) \vec{\eta} + \mathbf{L}^{j_{max}T} \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^{j_{max}} \vec{\eta} = \vec{0}. \quad (4.6)$$

Afin de prendre en compte la condition de rotation constante Ω dans l'étude de nos modes de poutre, on réutilise la condition d'interface du cas P_1 entre les noeuds fictifs situés sur l'axe de rotation z , à savoir O'_{1L} et O_{1L} (figure 4.1.a). Cependant, dans le cas présent où les oscillations sont paramétriques, l'étude du banc dans le domaine fréquentiel nécessite d'écrire la condition de liaison $\mathbf{L}^{j_{max}}$ entre l'ensemble fini des noeuds O'_{1L}^j et O_{1L}^j où $j \in [-j_{max}, j_{max}]$. On considère toujours que \mathbb{K}_L est nulle, la liaison modélisant uniquement le changement de repère entre \mathbf{R}_r et \mathbf{R}_n .

L'influence de la partie statorique n'étant pas négligeable (\mathbb{M}_n et \mathbb{K}_n ne sont pas nulles), les conditions

d'interface sont modélisées entre les structures S et S' . Ces conditions sont représentées physiquement par la présence du palier entre la poutre tournante et la plate-forme. En pratique, on introduit les conditions d'interface de rotation constante entre les noeuds fictifs O'_{2L} et O_{2L} qui sont respectivement les barycentres des contours Γ'_2 de S' et Γ_2 de S situés sur l'axe de rotation z (figure 4.1.a). Dans le domaine fréquentiel où est réalisée l'étude vibratoire, la condition de liaison s'exprime au moyen de la matrice $\mathbb{L}^{j_{max}}$ entre les noeuds $O'_{2L}{}^j$ de $\Gamma'_2{}^j$ et $O_{2L}{}^j$ de $\Gamma_2{}^j$ où $j \in [-j_{max}, j_{max}]$. L'interface Γ'_2 - Γ_2 étant la modélisation d'un palier (que l'on considère sans raideur propre), on introduit la matrice $\mathbb{K}_L \rightarrow +\infty$ entre l'interface Γ_2 et S . Ainsi, le déplacement tournant \vec{U}'_L exprimé dans \mathbf{R}_n et le déplacement \vec{U}_L sont identiques sur le mode de Fourier $n = 1$.

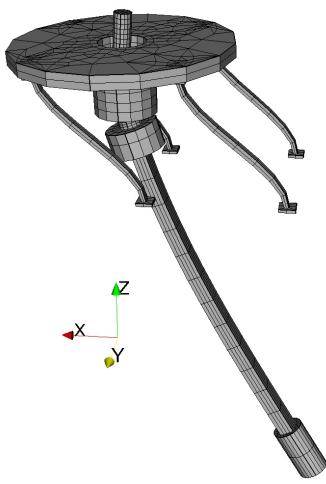
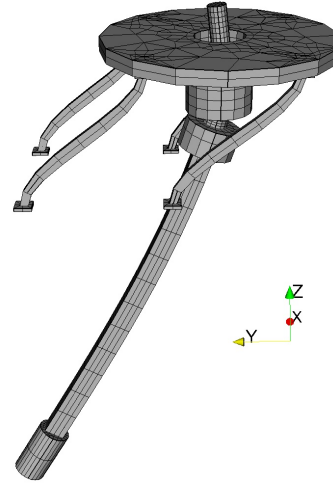
(a) Mode selon x de fréquence $\omega_{2x} = 24$ Hz(b) Mode selon y de fréquence $\omega_{2y} = 31$ Hz

Figure 4.13: Déformées modales en opposition de phase de ROTEC au repos

L'équation de mouvement libre s'obtient par recombinaison modale dans la base Φ_{ss} , dans le domaine fréquentiel, et s'écrit, dans le repère fixe, sous la forme du problème aux valeurs propres

$$(\omega^2 [\Phi_{ss}^T \mathbb{A}^{j_{max}} \Phi_{ss}] + \omega [\Phi_{ss}^T \mathbb{B}^{j_{max}} \Phi_{ss}] + [\Phi_{ss}^T \mathbb{C}^{j_{max}} \Phi_{ss}]) \vec{\eta}_g = \vec{0}. \quad (4.7)$$

Les matrices $\mathbb{A}^{j_{max}}$, $\mathbb{B}^{j_{max}}$ et $\mathbb{C}^{j_{max}}$ sont données dans le chapitre précédent. Le système étant considéré non amorti, elles font intervenir les matrices classiques \mathbb{M}_n , \mathbb{M}_r , \mathbb{K}_n et \mathbb{K}_r ainsi que les matrices spécifiques à la rotation constante \mathbb{G} , \mathbb{K}_c , \mathbb{K}_σ . Les conditions d'interface sont contenues dans la base modale Φ_{ss} . Le problème (4.7) est résolu pour chaque vitesse Ω et nous donne un jeu de $2k \times (2j_{max} + 1)$ valeurs propres (on rappelle que notre base classique Φ contient $k = 4$ modes). Pour chaque Ω , chaque valeur propre est associée à un vecteur propre et il existe un ordre de troncature j_{conv} pour lequel on peut déterminer les modes propres linéaires du système de la forme

$$\vec{U}_g^\Omega = \Phi_{ss} \vec{\eta}_g \quad \text{où} \quad \vec{U}_g^\Omega = [\tilde{U}^{l-j_{conv}} \tilde{U}^{-j_{conv}} \dots \tilde{U}^{l+j_{conv}} \tilde{U}^{j_{conv}}]^T. \quad (4.8)$$

\vec{U}_g^Ω est exprimé dans la base modale Φ_{ss} et dans le domaine fréquentiel. Pour chaque Ω , les valeurs propres ω représentent le spectre de fréquences de ces modes. Les modes paramétriques du système en rotation sont obtenus dans le domaine temporel au moyen de la recombinaison

$$\vec{U}_g(t) = \sum_{j=-j_{conv}}^{j=+j_{conv}} \vec{U}^j \cos(\omega + 2j\Omega)t + \sum_{j=-j_{conv}}^{j=+j_{conv}} I\vec{U}^j \sin(\omega + 2j\Omega)t \quad (4.9)$$

et

$$\vec{U}'_g(t) = \sum_{j=-j_{conv}}^{j=+j_{conv}} \vec{U}'^j \cos(\omega + (2j-1)\Omega)t + \sum_{j=-j_{conv}}^{j=+j_{conv}} I\vec{U}'^j \sin(\omega + (2j-1)\Omega)t. \quad (4.10)$$

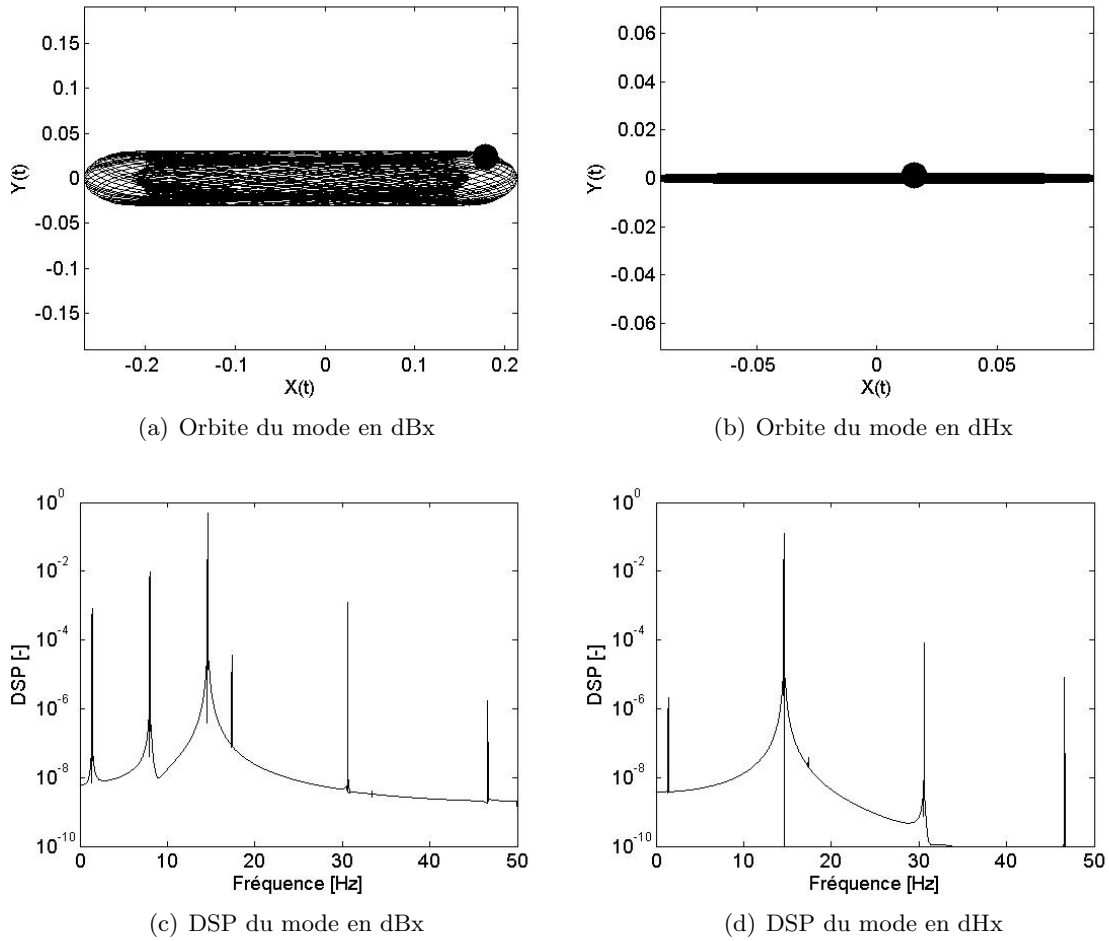


Figure 4.14: Modes propres paramétriques en x pour $\Omega = 480$ Tr/min et $j_{conv} = 2$

Comme dans le cas particulier P_1 , on observe le mode paramétrique du système $S \cup S'$ dans le repère fixe en appliquant la grande rotation au champ de déplacements $\vec{U}'_g(t)$. Les modes du banc sont calculés pour $\Omega = 480$ Tr/min au moyen du logiciel Cast3m et du problème aux valeurs propres complexes (4.7). A cette vitesse de rotation, un ordre de troncature $j_{conv} = 2$ est suffisant pour obtenir la convergence des vecteurs propres. Pour chaque vitesse de rotation, on retrouve la base des quatre modes propres en phase et opposition de phase dans les deux directions transverses. On montre respectivement sur les figures 4.14 et 4.15 les modes paramétriques en phase dans les directions x et y dans l'espace (x, y) aux

noeuds dBx et dB_y de S' d'une part, dHx et dHy d'autre part (figure 4.2.a). Les Densités Spectrales de Puissance nous permettent d'obtenir le spectre de fréquences des modes. La fréquence de rotation du système ($\Omega = 8$ Hz) peut être observée aux noeuds du rotor dBx et dB_y .

Sous l'effet de la rotation et du défaut de forme, il apparaît les harmoniques secondaires en $\pm 2\Omega$ dans les modes propres du système (et donc dans le régime transitoire du banc). La contribution sur l'harmonique fondamentale (proche de la fréquence propre $\omega_{1x,y}$ au repos) est prépondérante et l'on observe une légère influence du couplage rotor-stator à travers les faibles contributions en $\omega_{1x} \pm 2\Omega$ ou $\omega_{1y} \pm 2\Omega$ selon le mode considéré. Sur la partie statorique, l'influence des défauts n'est pratiquement pas visible. Plus la vitesse de rotation est faible et plus le nombre d'harmoniques secondaires est important. En régime sur-critique, on observe un moyennage de la rigidité tournante apparente, les modes deviennent ceux de l'oscillateur classique équivalent à quatre degrés de liberté généralisés.

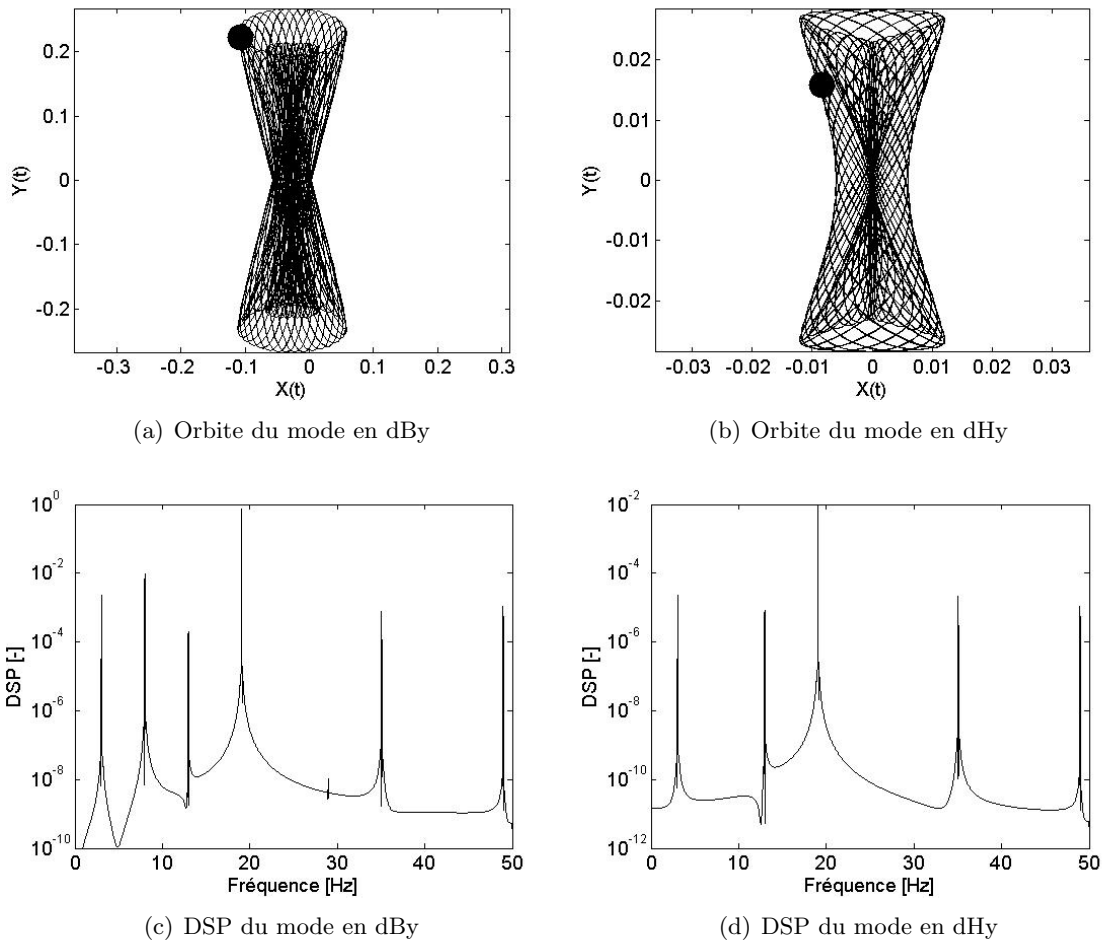


Figure 4.15: Modes propres paramétriques en y pour $\Omega = 480$ Tr/min et $j_{conv} = 2$

En résolvant le problème aux valeurs propres complexes (4.7) pour chaque vitesse de rotation Ω , on obtient l'évolution des fréquences complexes ω directement dans le repère \mathbf{R}_n sur la base modale considérée. L'évolution des valeurs propres du système non amorti en fonction de Ω nous permet de déterminer la stabilité du système (voir chapitre 2 et 3). La carte de stabilité du banc est donnée sur

tel-00370228, version 1 - 23 Mar 2009

la figure 4.16 pour un ordre de troncature $j_{max} = 2$.

Etant donné le type de défaut étudié, seule la région d'instabilité principale est à prendre en compte et un ordre de troncature $j_{max} = 2$ est suffisant pour localiser correctement cette région. En effet, cette région d'instabilité est obtenue d'une part, par la confusion de l'harmonique fondamental ω et de l'harmonique secondaire $\omega + 2\Omega$ de chaque mode, et d'autre part par la confusion de l'harmonique fondamental des différents modes. Les domaines de rotation où apparaît l'instabilité dynamique par amortissement négatif des modes peuvent être définis par le critère de Hsu.

En régime sur-critique, les pulsations fondamentales se stabilisent par le moyennage de la raideur tournante apparente du rotor. Contrairement aux harmoniques dus aux défauts, elles n'évoluent pratiquement pas au cours de la rotation.

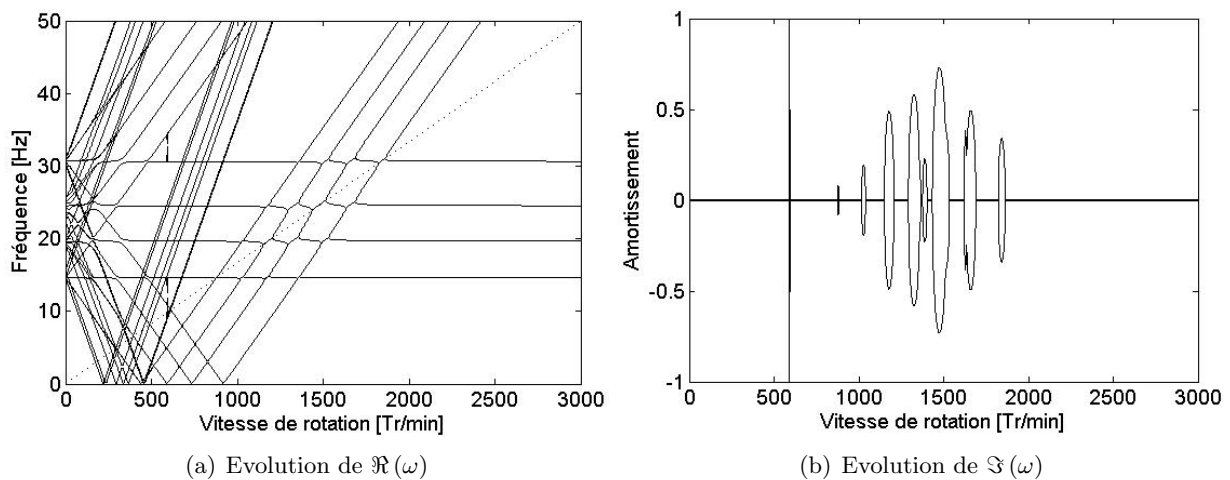


Figure 4.16: Carte de stabilité de ROTEC calculée sur base modale pour $j_{max} = 2$

Remarques :

- En reprenant la remarque faite dans le cas particulier P_1 , il existe $2k \times (2j_{max} + 1)$ vecteurs propres associés au problème (4.7) exprimé dans le domaine fréquentiel. Cependant les vecteurs, associés à une valeur propre qui est un harmonique de son spectre, sont regroupés en k familles. Un seul représentant pour chaque famille suffit pour déterminer la base des modes paramétriques. On choisit généralement le vecteur associé à la valeur propre fondamentale ($j = 0$) pour être sûr de sa convergence.
- On observe un effet de bord sur les cartes de stabilité de la figure 4.16 obtenues avec Cast3m. En effet, les valeurs propres limites $\omega + 2j_{max}\Omega$ ne sont pas exactes (impression de dédoublement des fréquences de la figure 4.16.a). Il faut donc résoudre le problème aux valeurs propres à l'ordre $j + 1$ pour étudier la stabilité à l'ordre j . Le pic obtenu sur la figure 4.16.b à $\Omega \approx 600$ Tr/min provient de cet effet numérique.

3.2 Résultats expérimentaux

L'utilisation de pots vibrants et des capteurs de forces, nous permet, contrairement au cas P_1 , d'accéder au contenu fréquentiel de la réponse transitoire du banc au moyen de la Fonction de Réponse en Transfert des capteurs dHx et dHy . La fonction de transfert de ces capteurs au repos est représentée sur la figure 4.17.a, dans la configuration de référence $\beta = 0^\circ$. On retrouve les fréquences propres

expérimentales des quatre premiers modes de poutre définis dans la partie précédente. Les fréquences obtenues diffèrent légèrement du calcul numérique étant donné que l'on observe $\omega_{1x} = 15$ Hz, $\omega_{1y} \approx 21$ Hz, $\omega_{2x} = 23$ Hz et $\omega_{1y} \approx 31$ Hz. On remarque cependant que les fréquences propres des modes en y sont dédoublés sans toutefois en comprendre la raison.

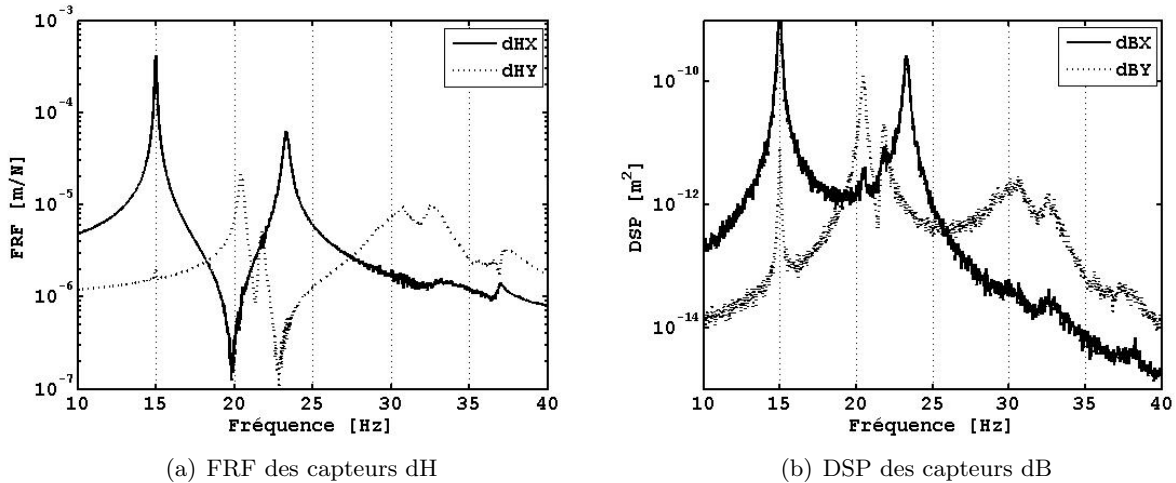


Figure 4.17: Contenu fréquentiel expérimental de ROTEC au repos pour $\beta = 0^\circ$

Comme dans le cas P_1 , la Densité Spectrale de Puissance du signal de réponse peut être calculée au niveau des capteurs dBx et dBx situés au niveau du rotor (figure 4.17.b). On accède ainsi aux mêmes informations avec une précision cependant plus faible.

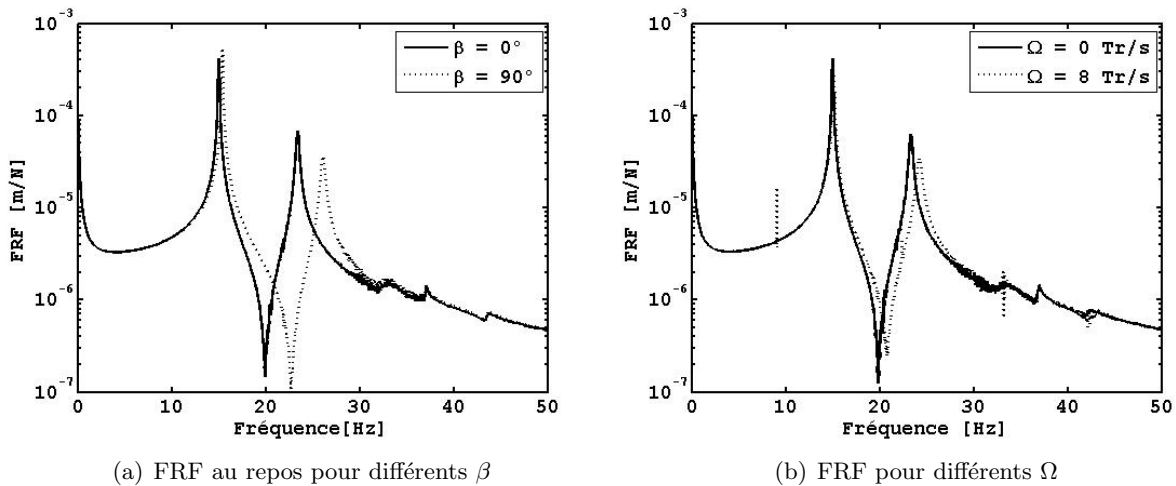


Figure 4.18: Influence de la rotation sur les fonctions de transfert du capteur dHx

La maquette est paramétrique dans le cas P_2 ; ainsi, en changeant le positionnement angulaire de la poutre tournante β , le système à étudier est différent (les modes propres ne sont plus les mêmes). La figure 4.18.a montre les fonctions de transfert en dHx dans le cas des deux configurations $\beta = 0^\circ$ et

tel-00370228, version 1 - 23 Mar 2009

$\beta = 90^\circ$. La configuration de référence est la configuration extrême où la fréquence propre en x est la plus faible (et celle en y la plus forte) alors que $\beta = 90^\circ$ correspond à la configuration où la fréquence propre en x est la plus importante.

Pour étudier l'influence de la rotation sur le comportement dynamique du banc, on trace sur la figure 4.18.b les fonctions de transfert du capteur dHx au repos, puis pour une vitesse de 480 Tr/min ($\Omega = 8$ Tr/s). Sous l'influence de la rotation, il se produit un moyennage de la raideur tournante apparente de la poutre rectangulaire; la fréquence des modes ω_{1x} et ω_{1y} augmente donc légèrement vis-à-vis de la configuration de référence. Comme dans le cas P_1 , on converge assez rapidement vers cette fréquence moyennée. Cependant, contrairement à nos attentes, il n'y a pas de trace d'harmoniques secondaires dans la réponse transitoire du système; l'influence des défauts par couplage rotor-stator n'est pas ressentie par la plate-forme.

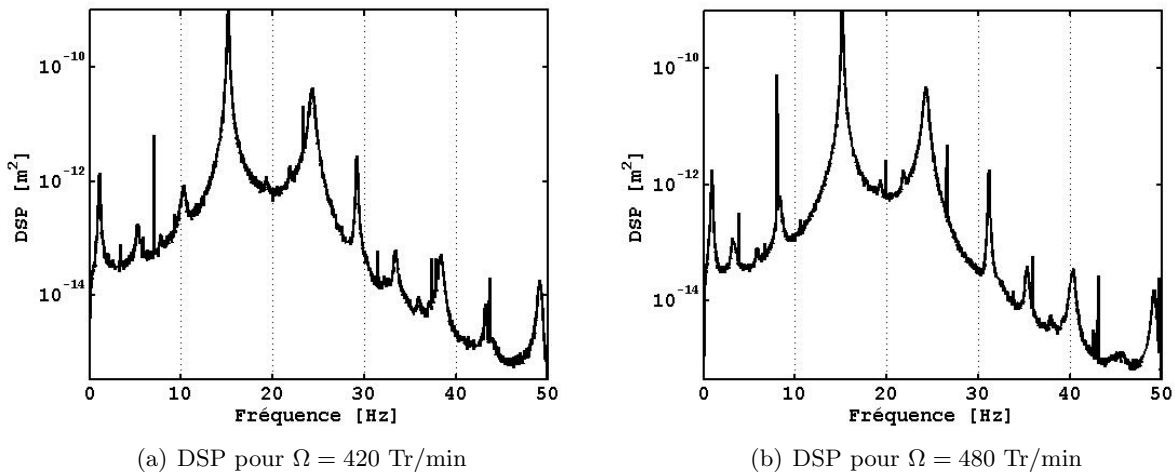


Figure 4.19: Contenu fréquentiel expérimental de ROTEC en rotation en dBx

Intéressons nous aux Densités Spectrales de Puissance de la réponse transitoire sur la masse cylindrique tournante. La figure 4.19 nous montre les DSP de la réponse de cette masse pour des vitesses de rotation de $\Omega = 420$ Tr/min et $\Omega = 480$ Tr/min dans la direction x . Cette fois, la réponse observée correspond bien à un phénomène oscillatoire paramétrique. Les mesures vibratoires se faisant sur le capteur dBx , on observe les harmoniques fondamentaux qui sont approximativement ω_{1x} et ω_{2x} et qui ne dépendent pratiquement pas de la vitesse de rotation. Sous l'influence des défauts, il apparaît des harmoniques en $\omega \pm 2\Omega$ dans la réponse. Contrairement aux fondamentaux, ces harmoniques secondaires ne dépendent pas de la direction d'observation (couplage des directions x et y). Le capteur dBx mesure donc également les harmoniques en 2Ω des pulsations fondamentales ω_{1y} et ω_{2y} . Etant donné le type de défaut étudié, les fréquences observables se limitent aux premiers harmoniques.

Remarques :

- Comme dans le cas P_1 , l'étude vibratoire du banc se limite à l'apparition de sa première vitesse critique qui, dans le cas P_2 , apparaît pour une vitesse de rotation $\Omega \approx 840$ Tr/min (approximativement 12 Hz).
- Les DSP représentées sur la figure 4.19 sont établies pour des vitesses de rotation où le spectre de fréquences est le plus large possible afin de pouvoir visualiser correctement les résultats. Aux

faibles vitesses de rotation, le spectre de fréquences est trop étroit et il est difficile d'analyser les mesures. Les signaux étant en plus extrêmement bruités dans le cas des DSP, il est nécessaire d'effectuer un filtre a posteriori de façon à éliminer les fréquences parasites.

3.3 Comparaison essais-calculs

La comparaison entre la modélisation numérique d'une part, et l'analyse expérimentale d'autre part est plus difficile que dans le cas particulier P_1 . Cela tient surtout de la difficulté à obtenir des mesures vibratoires propres sur un système au contenu fréquentiel dense. Contrairement au cas précédent, il existe des vitesses de rotation où les données sont inexploitable (faibles vitesses); on ne peut donc pas établir le diagramme de Campbell expérimental du banc dans le cas P_2 . On se concentrera donc uniquement sur la vitesse de rotation $\Omega = 480$ Tr/min.

La figure 4.20 nous donne le contenu fréquentiel des réponses transitoires du banc observé sur la masse tournante d'une part et sur la plate-forme fixe. On compare ces résultats au contenu fréquentiel prédit par la modélisation en donnant, sur la figure 4.21, les DSP des quatre modes paramétriques du banc. Ces DSP sont celles des modes aux noeuds dH et dB . On normalise les modes en imposant un déplacement maximal unitaire à leur déformée.

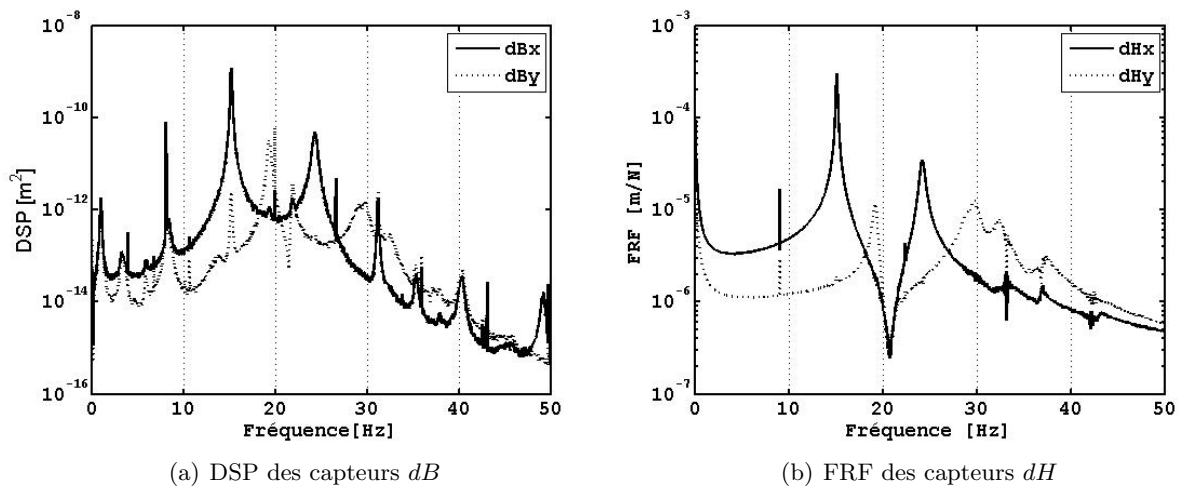


Figure 4.20: Contenu fréquentiel de la réponse transitoire expérimentale à $\Omega = 480$ Tr/min

La prédiction du contenu fréquentiel des oscillations libres du système est assez satisfaisante considérant la complexité du problème. Notamment, on modélise bien, par le calcul, la quasi insensibilité de la partie statique aux défauts de forme en rotation. En effet, seuls les harmoniques fondamentaux sont présents aux niveaux des noeuds dH du modèle. La localisation des harmoniques est concluante mais il semble que le rapport entre les contributions sur chaque fréquence ne soit pas conservé. Comme dans le cas P_1 , le système est modélisé sans amortissement étant donné la difficulté expérimentale de sa détermination ainsi que les difficultés numériques liées à sa mise en oeuvre.

La détermination expérimentale de la première vitesse critique du banc à $\Omega = 840$ Tr/min est bien en accord avec les prédictions numériques données par la carte de stabilité de la figure 4.16. On peut toutefois regretter de ne pas avoir pu se concentrer davantage sur la nature de ce domaine de rotation critique.

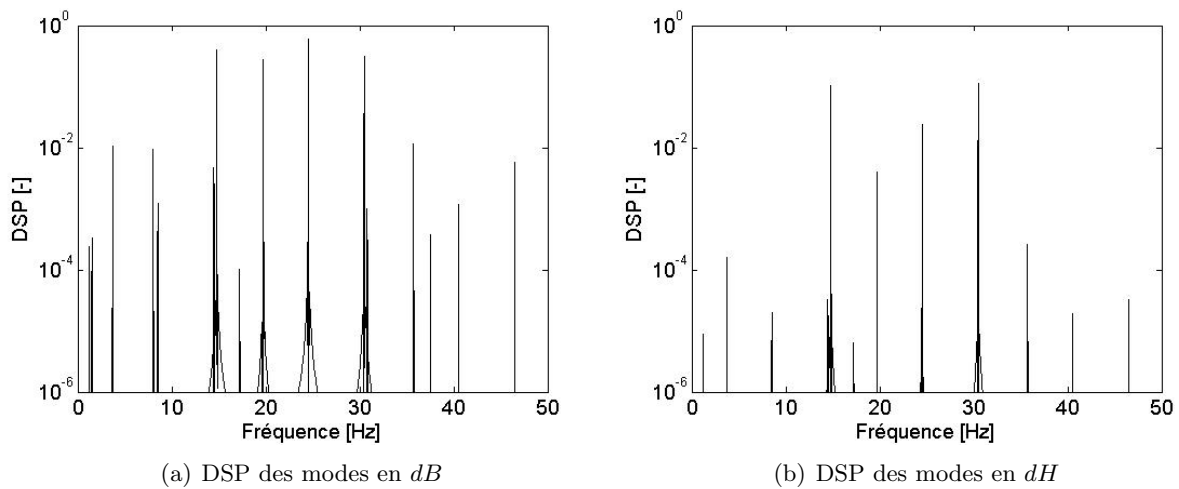


Figure 4.21: Contenu fréquentiel des oscillations libres calculées pour $\Omega = 480$ Tr/min

Remarques :

- Il subsiste quelques difficultés à introduire correctement l'amortissement structurel tournant \mathbb{C}_r ou fixe \mathbb{C}_n sur chaque contribution des harmoniques des oscillations paramétriques. Les cartes de stabilité du système physiquement amorti sont soumises à des erreurs numériques (ou du moins des incompréhensions) dans le cas de la modélisation éléments finis des défauts de forme par couplage rotor-stator. Ces faiblesses numériques ne se produisent cependant pas dans les cas exacts (cas P_1) où une modélisation à l'ordre j_{max} n'est pas nécessaire, il s'agirait donc d'un effet de troncature.
- Comme dans le cas P_1 , il aurait été intéressant de passer les vitesses critiques afin de valider la carte de stabilité établie numériquement. Le banc d'essai étant toujours disponible au CEA de Saclay et étant donnée sa facilité de mise en oeuvre, les résultats expérimentaux présentés dans cette thèse pourront, dans l'avenir, être complétés par des campagnes expérimentales supplémentaires.
- Le banc d'essai présenté ROTEC est une expérience permettant de mettre en évidence les oscillations paramétriques linéaires d'un système tournant par couplage rotor-stator. On peut trouver dans [Stoisser and Audebert, 2008] les résultats expérimentaux concernant l'étude du comportement vibratoire d'un rotor horizontal fissuré. L'hypothèse de linéarité peut être conservée dans ces deux exemples, ce qui n'est pas toujours le cas dans l'étude empirique des systèmes paramétriques [Berlioz et al., 1996, Berlioz et al., 2000].

Conclusion

L'utilisation de machines tournantes toujours plus performantes dans les domaines industriels de pointe nécessite une parfaite connaissance de leur comportement dynamique. Ainsi, l'étude de l'influence des défauts (rotors fissurés, défauts de forme) sur le comportement vibratoire d'ensemble de ces systèmes tournants est une étape obligatoire dans l'avancée technologique du domaine de l'énergie (turboalternateurs, pompes à vides). Le travail de thèse présenté dans cet ouvrage s'est attaché à réaliser cette étude en tentant de comprendre, dans un premier temps, les phénomènes physiques mis en jeu afin de proposer finalement une méthode de modélisation tridimensionnelle opérationnelle permettant de prédire le comportement dynamique d'ensemble des machines tournantes aux caractéristiques non axisymétriques.

Le premier chapitre est un travail bibliographique sur les oscillateurs linéaires harmoniques afin de familiariser le lecteur avec ces systèmes et les différentes notations qui seront réutilisées au cours du document. On a posé notamment, dans cette partie, les hypothèses qui seront valables tout au long de l'ouvrage, à savoir que les vibrations sont considérées petites de façon à conserver la linéarité des équations d'équilibre et que la vitesse de rotation des systèmes est constante, ce qui exclut la modélisation d'une accélération ou décélération du rotor. La modélisation classique du comportement vibratoire linéaire d'ensemble des machines tournantes axisymétriques sur base modale y est décrite : les oscillations libres et permanentes, ainsi que la stabilité du système sont simplement celles d'un oscillateur linéaire harmonique tournant.

Afin de comprendre l'influence des défauts sur la vibration d'une machine tournante, deux exemples d'oscillateurs tournants simplifiés à deux degrés de liberté ont été étudiés. L'exemple S_1 modélise une raideur tournante anisotrope dans le repère tournant (défaut de forme ou fissure ouverte). L'exemple S_2 modélise une raideur variable dans ce même repère (fissure respirante). Que ce soit par le couplage rotor-stator (cas S_1) ou par la respiration de la fissure (cas S_2), l'équation d'équilibre de ces oscillateurs devient une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques et l'influence de l'imperfection modifie notre système tournant en oscillateur paramétrique. L'équation d'équilibre de ce type d'oscillateur, plus générale que l'oscillateur classique associé, nécessite les méthodes de calcul spécifiques développées à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle.

Grâce à la théorie de Floquet, la solution de l'équation d'équilibre s'exprime comme la somme de contributions d'harmoniques qui dépendent de la forme de la raideur variable. Le problème aux valeurs propres associé aux oscillations libres du système se met sous la forme d'un déterminant infini de type Hill dans le domaine fréquentiel. En analysant la convergence de ce déterminant à l'aide des travaux de Poincaré, on peut déterminer les modes propres linéaires paramétriques de l'oscillateur. A l'image de l'oscillateur classique, le régime transitoire s'exprime comme une combinaison linéaire de

ces modes poly-harmoniques (contrairement aux cas classiques, ces modes paramétriques dépendent de la vitesse de rotation du système). La stabilité de l'oscillateur est obtenue en résolvant le déterminant de Hill du système amorti pour chaque vitesse de rotation. On observe une instabilité paramétrique du système par confusion des fréquences de ses modes (les régions d'instabilité sont localisées par le critère de Hsu). Enfin, les oscillations permanentes s'expriment sur la base des modes, elles sont donc poly-harmoniques ; il existe alors des fréquences de résonance secondaires spécifiques aux oscillateurs paramétriques.

En analysant les outils mathématiques de la littérature, on propose donc une méthode numérique élégante, simple et robuste (équations d'équilibre à coefficients constants dans le domaine fréquentiel) généralisant l'analyse vibratoire des oscillateurs linéaires harmoniques classiques aux oscillateurs paramétriques (grâce au principe de mode propre paramétrique comme dans l'annexe A) et notamment aux systèmes tournants non axisymétriques.

Afin d'étendre cette méthode numérique aux machines tournantes réelles, les concepts de modes et d'oscillations poly-harmoniques ont été adaptés à la méthode des éléments finis. Le troisième chapitre s'est focalisé sur la prise en compte du couplage rotor-stator dans le cas d'une modélisation complexe tridimensionnelle de manière à étudier l'influence d'éventuels défauts de forme sur le comportement vibratoire d'ensemble des machines. Les oscillations étant la somme de contributions sur différents harmoniques, le maillage initial dans le domaine temporel devient, pour chaque vitesse de rotation considérée, un ensemble convergent de sous-structures associées à chaque contribution dans le domaine fréquentiel. La base modale du système est alors calculée par sous-structuration avec la méthode de Craig-Bampton et les conditions entre chaque interface représentent la condition de rotation constante entre le rotor et le stator (couplage par relation linéaire entre chaque contribution). Dans le cas des oscillateurs paramétriques, la dimension de la base modale dépend non seulement du nombre de modes utilisés mais aussi d'une troncature fréquentielle selon le nombre d'harmoniques conservés. Les modes propres paramétriques du système sont alors calculés par recombinaison modale en modélisant le rotor dans le repère tournant et le stator dans le repère fixe. La stabilité est déterminée en résolvant le problème aux valeurs propres associé à l'équation d'équilibre homogénéisée du système, dans la base modale obtenue par synthèse modale, et pour chaque vitesse de rotation. Enfin, le régime permanent se calcule sur base modale au moyen du système linéaire entre chaque contribution. Afin d'illustrer la pertinence d'une modélisation tridimensionnelle, le chapitre est enrichi par l'exemple numérique de l'étude du comportement vibratoire d'ensemble d'un arbre tournant muni d'un volant d'inertie souple sur paliers isotropes.

Le dernier chapitre s'est intéressé à l'étude du comportement vibratoire d'ensemble d'un banc d'essai constitué d'un rotor rectangulaire vertical en rotation dans une plate-forme rigide elle-même supporté par quatre colonnettes rectangulaires souples. Par interaction entre la partie fixe et tournante, on tente de mettre en évidence les oscillations paramétriques de la maquette. Le comportement dynamique du banc non amorti est modélisé par la méthode éléments finis tridimensionnelle afin de prédire la stabilité et le contenu fréquentiel de la réponse transitoire du système en rotation (diagramme de Campbell, modes paramétriques). Les mesures expérimentales réalisées sur la maquette permettent alors de comparer les deux approches (numérique et empirique). On valide ainsi nos résultats de calcul sur deux configurations différentes : le cas P_1 où la plate-forme est bloquée et le cas P_2 où elle est libre de se déplacer. La modélisation des oscillations libres du premier cas particulier est très convaincante. Dans le cas P_2 plus complexe, les résultats expérimentaux exploitables sont plus restreints mais les approches théoriques et pratiques nous fournissent encore des résultats similaires.

Il existe d'intéressantes perspectives dans l'exploitation du banc d'essai ROTEC. En effet, il serait avantageux de pouvoir exciter plus proprement la poutre rectangulaire en rotation de façon à obtenir des mesures expérimentales moins bruitées, surtout aux faibles vitesses de rotation dans le cas général P_2 . De même, l'étude des vitesses de rotation critiques du système à travers l'évolution de l'amortissement de la maquette pourrait être une forte valeur ajoutée aux résultats empiriques déjà fournis. Enfin, réussir à entrer expérimentalement dans le domaine critique censé être instable en accord avec la modélisation complèterait la validation du diagramme de Campbell calculé avec Cast3m. Par manque de temps, ces protocoles expérimentaux n'ont pu être réalisés au cours de la thèse.

La modélisation présentée ici est valable dans le cas d'une base modale contenant des déplacements transverses sur le mode de Fourier $n_1 = 1$, ce qui nous permet d'écrire la relation entre les fréquences fondamentales des oscillations du rotor et du stator $\omega' = \omega - \Omega$. Dans l'avenir, il serait intéressant de pouvoir étudier le comportement vibratoire des déplacements transverses sur les modes de Fourier $n_1 > 1$. La relation précédente entre les fréquences fondamentales des parties fixes et tournantes deviendrait plus généralement $\omega' = \omega - n_1\Omega$. Dans les cas d'une base modale composée de nombreux modes d'ensemble (sur différents modes de Fourier), la modélisation tridimensionnelle devient alors fastidieuse (difficulté de trier les modes, temps de calculs en décalage avec le domaine industriel). La même remarque peut être faite dans la prise en compte du défaut étant donné que la périodicité de la raideur tournante dépend du mode de Fourier n_2 sur lequel on projète le champs de défauts (voir chapitre 3 et annexe B).

L'évolution future de la modélisation présentée dans le troisième chapitre devra donc faire appel à des méthodes alternatives. Dans le cas des structures de révolution, une méthode astucieuse et élégante serait d'utiliser des éléments finis de coques quasi axisymétriques développés par A. Combescure [Combescure, 1995, Brun et al., 2008]. Ces éléments sont développés en série de Fourier spatial classique mais leur formulation est enrichie de façon à prendre en compte un champ de défauts quelconque développé lui aussi en série de Fourier. Cette modélisation permettrait de ramener l'étude du problème tridimensionnel de la coque axisymétrique avec imperfection non axisymétrique à un problème bidimensionnel, ce qui, on le comprend, améliore considérablement l'efficacité numérique des outils. Dans cette dernière modélisation, la responsabilité et le sens physique de l'utilisateur sont davantage sollicités mais la pertinence de la méthode (temps de calcul, compréhension physique des modélisations) serait certaine.

Des concepts numériques (modes paramétriques surtout, troncature fréquentielle j_{max}) ont été expliqués au cours de cet ouvrage afin de résoudre de manière assez générale les oscillateurs paramétriques. Mais on l'a vu dans le troisième chapitre, l'extension de la méthode à un système à n degrés de liberté n'a été décrite qu'à travers la prise en compte du couplage rotor-stator. Ainsi, la modélisation du comportement vibratoire par la méthode éléments finis d'un rotor fissuré sur palier anisotrope nécessite de plus amples développements numériques. Cependant, ces développements ne nous semblent pas les plus compliqués si l'on conserve le principe de sous-structuration dans le domaine fréquentiel en exprimant les oscillations comme la somme de contributions sur les harmoniques adéquats. Dans le cas de la fissure respirante, l'idée serait par exemple de sous-structurer le rotor dans le repère tournant. La difficulté de ce problème réside alors dans la capacité à introduire la valeur de rigidité correcte et physique sur chaque contribution modale des harmoniques.

Annexe A

A propos de l'équation de Mathieu

Cette annexe concerne l'étude numérique (stabilité, forme des solutions) de l'équation de Mathieu abordée rapidement au début du chapitre 2. On présente dans un premier temps la démarche adoptée pour résoudre le cas général des équations différentielles à coefficients périodiques afin d'appliquer les outils numériques développés au cours de ce rapport au problème posé par Mathieu. A travers les différents résultats énoncés, en accord avec la littérature [Richards, 1983], on contribuera également à la compréhension du comportement vibratoire des oscillateurs tournants paramétriques S_1 et S_2 du chapitre 2.

1 Equations différentielles à coefficients périodiques

1.1 Stabilité de l'état fondamental

Pour commencer, étudions la stabilité d'un mouvement fondamental où la position d'équilibre est dynamique (cas des systèmes S_1 et S_2) et non pas statique comme dans le cas des oscillateurs du chapitre 1. Dans ce cas, l'évolution du système caractérisé par un ensemble de variables d'états noté u est décrit par l'équation différentielle

$$\dot{u} = F(u, t) \quad (\text{A.1})$$

à partir d'une condition initiale donnée à l'instant t_0 : $u(t_0) = u_0$.

Supposons qu'une perturbation initiale u_0^* , appliquée à l'état fondamental $u(u_0, t_0, t)$ conduise à un état perturbé $u + u^*$ avoisinant. Nous pouvons donc écrire

$$\dot{u} + \dot{u}^* = F(u_0 + u_0^*, t_0, u + u^*, t). \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant \dot{u} par son expression dans (A.1), il vient

$$\dot{u}^* = F(u_0 + u_0^*, t_0, u + u^*, t) - F(u_0, t_0, u, t) = h(u_0, u_0^*, t_0, u, u^*, t). \quad (\text{A.3})$$

Le système (A.3), généralement non-linéaire, est le système variationnel du système (A.1) relatif à la solution $u(u_0, t_0, t)$. Si l'on ne considère que les termes linéaires du système (A.3) (on linéarise autour de l'état fondamental $u(u_0, t_0, t)$: $\dot{u}^* = \frac{\partial F}{\partial u} u^*$), ce dernier pourra se mettre sous la forme matricielle

$$\dot{u}^* = \mathbb{D}(u(u_0, t_0, t), t) u^*. \quad (\text{A.4})$$

Le système (A.4) (déjà donné en (2.6) au chapitre 2) est le système linéarisé (appelé aussi système variationnel linéaire ou encore première approximation variationnelle). La matrice $\mathbb{D}(u(u_0, t_0, t))$ est la matrice tangente de ce système. Sa solution décrit l'écart entre la solution fondamentale et la solution perturbée.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que les exposants caractéristiques du système linéarisé sont déterminants pour la stabilité. De la même façon, l'évolution de la solution $u^*(u_0^*, t_0, t)$ est gouvernée par certains nombres caractéristiques de la matrice à coefficients variables $\mathbb{D}(t)$. En conséquence, la stabilité de celle-ci sera déterminée en fonction de ces valeurs caractéristiques. Nous nous limiterons au cas où les coefficients de la matrice $\mathbb{D}(t)$ sont périodiques conformément à l'hypothèse maintenue tout au long du rapport.

1.2 Théorie de Floquet

Pour l'analyse d'un système linéaire à coefficients périodiques (que nous considérerons de période T), nous utilisons la théorie de Floquet déjà explicitée au chapitre 2.

Soit $\phi(t)$ une matrice d'ordre $2n$ constituée de $2n$ vecteurs colonnes qui sont solutions du système (A.4) correspondant à $2n$ conditions initiales linéairement indépendantes (n est le nombre de degrés de liberté du système et ϕ est d'ordre $2n$ dans l'espace d'état). La matrice $\phi(t)$ est appelée matrice fondamentale. La théorie de Floquet [Floquet, 1879] consiste à démontrer que chaque matrice fondamentale $\phi(t)$ se met sous la forme

$$\phi(t) = \mathbb{P}(t) \exp^{\mathbb{A}'t} \quad (\text{A.5})$$

où

- $\mathbb{P}(t)$ est une matrice d'ordre $2n$, périodique et de période T ,
- \mathbb{A}' est une matrice constante d'ordre $2n$,
- $\exp^{\mathbb{A}'t}$ est définie par la série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}'t)^k}{k!}$.

On peut montrer que $\phi(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale. Comme $\phi(t)$ et $\phi(t+T)$ sont linéairement dépendantes, il existe une matrice \mathbb{C} non singulière telle que

$$\phi(t+T) = \mathbb{C}\phi(t). \quad (\text{A.6})$$

Or $\phi(t+T) = \mathbb{P}(t+T) \exp^{\mathbb{A}'(t+T)} = (\mathbb{P}(t) \exp^{\mathbb{A}'t}) \exp^{\mathbb{A}'T} = \phi(t) \exp^{\mathbb{A}'T}$.

La matrice \mathbb{C} , appelée matrice monodrome, peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbb{C} = \exp^{\mathbb{A}'T}. \quad (\text{A.7})$$

Les valeurs propres ρ_i ($i = 1, \dots, 2n$) sont les multiplicateurs caractéristiques de la matrice \mathbb{C} .

Chaque nombre complexe s_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) tel que

$$\rho_i = \exp^{s_i T} \quad (\text{A.8})$$

est appelé exposant caractéristique.

La relation (A.6) implique que le comportement de la matrice fondamentale $\phi(t)$ dépend de la forme de sa matrice monodrome. C'est en analysant les multiplicateurs ou exposants caractéristiques de cette dernière que l'on déterminera la stabilité des solutions. Le théorème de Liapunov exprime mathématiquement cette stabilité :

Si $\Re(s_i) < 0$ (ou $|\rho_i| < 1$) pour tout i , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} u^*(t) = 0$ et la solution fondamentale est asymptotiquement stable.

S'il existe un indice i tel que $\Re(s_i) > 0$ (ou $|\rho_i| > 1$), $i \in [1, n]$, alors la solution fondamentale est instable.

Si $\Re(s_i) \leq 0$ pour tout i et s'il existe au moins un indice k tel que $\Re(s_k) = 0$, on ne sait pas conclure. Il existe heureusement des méthodes complémentaires pour conclure sur la stabilité [Nguyen, 2000]

Remarques :

- Dans ce rapport, la stabilité des systèmes non autonomes est déterminée à travers l'étude des exposants caractéristiques (ou des pulsations propres grâce à la relation $s = i\omega$). On parviendrait aux mêmes conclusions en intégrant directement la matrice de transition $\phi(t)$. Dans le cas où l'équation (A.4) n'est pas linéaire, les méthodes de résolution diffèrent légèrement [Berlioz et al., 2000, Patel and Darpe, 2008, Villa et al., 2008].
- Malgré sa "simplicité", la théorie de Floquet présente un handicap majeur du fait de l'absence d'une méthode générale pour calculer systématiquement la matrice $\mathbb{P}(t)$, les exposants ou les multiplicateurs caractéristiques. Chaque problème nécessite donc une mise en équation et une résolution spécifique. Des ouvrages entiers sont consacrés à quelques unes d'entre elles [Arscott, 1964, Campbell, 1964]. On montrera dans cette annexe l'étude de l'équation particulière non autonome la plus connue : l'équation de Mathieu.

1.3 Equation de mouvement linéarisée

La solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants du type

$$\ddot{x} + h_1(t)\dot{x} + h_2(t)x = f(t) \quad (\text{A.9})$$

est la somme de la solution de l'équation homogénéisée et d'une solution particulière de l'équation complète. De plus, si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogénéisée, la solution générale de cette équation peut être obtenue par la combinaison linéaire $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$. Considérons l'équation (A.9) homogénéisée où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont des fonctions de période T . Sous la condition que $h_1(t)$ soit différentiable, on peut démontrer que l'équation homogénéisée se met sous la forme

$$\ddot{x}^* + h(t)x^* = 0 \quad (\text{A.10})$$

avec $h(t) = h(t+T)$, $x = x^*e^{-\frac{1}{2}\int h_1(t)dt}$ et $h(t) = h_2 - \frac{1}{4}h_1^2 - \frac{1}{2}\dot{h}_1$.

L'équation (A.10) est l'équation de Hill [Hill, 1886] mentionnée au chapitre 2 que l'on rencontre dans de nombreux domaines de la physique. La solution de la partie homogène de l'équation (A.9) peut alors s'écrire comme la combinaison linéaire des deux solutions indépendantes (théorie de Floquet) :

$$x_i(t) = e^{s_i t} p_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.11})$$

où les fonctions $p_i(t)$ sont périodiques de période T et les constantes s_i peuvent être complexes.

On comprend tout de suite grâce à l'équation (A.11) que si la partie réelle de s_i est positive, la solution augmentera exponentiellement et le système sera instable. Si la partie imaginaire de ces mêmes constantes n'est pas nulle, le résultat sera le produit d'une fonction de période T par une autre

fonction de période différente : la solution sera une oscillation, stable ou instable, dont la période pourra être différente de celle de $h(t)$.

2 L'équation de Mathieu

Une forme particulière de l'équation de Hill est l'équation de Mathieu rencontrée au début du chapitre 2 [Arscott, 1964, Campbell, 1964]. Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + [\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]\theta = 0. \quad (\text{A.12})$$

Cette équation est la plus connue des équations différentielles à coefficients périodiques (forme des solutions, stabilité du système). Sa compréhension ne nous permet pas de résoudre directement les équations de type Hill mais elle nous donne une bonne base nécessaire à la compréhension de ces dernières.

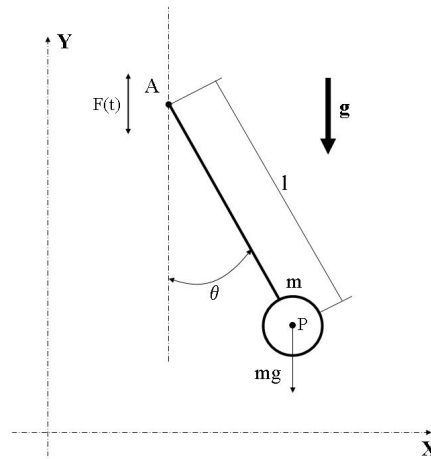


Figure A.1: Pendule suspendu à un point mobile

L'équation (A.12) est celle du pendule à un degré de liberté suspendu à un point libre de se déplacer sous contrainte de la figure A.1 [Genta, 1995]. Elle est obtenue lorsque le mouvement dans la direction y du point A est considéré comme harmonique d'amplitude D et de fréquence Ω en introduisant les variables adimensionnelles $\tau = \Omega/2t$, $\delta = 4g/l\Omega^2$ et $\epsilon = -2D/l$. Dans cette équation de mouvement linéarisée autour de l'équilibre, le coefficient non constant $[\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]$ de période $T = \pi$ agit comme une excitation paramétrique. On parlera alors d'instabilité paramétrique dans le cas de l'équation de Mathieu (et plus généralement dans le cas des systèmes non autonomes).

Si l'amortissement du pendule n'est pas négligé, l'équation linéaire homogène adimensionnelle du mouvement du pendule devient

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{d\theta}{d\tau} + [\delta + 2\epsilon \cos(2\tau)]\theta = 0 \quad \text{où} \quad \zeta = c/m\lambda. \quad (\text{A.13})$$

En utilisant la transformation déjà vue pour l'équation (A.9), l'équation (A.13) peut être réduite sous la forme d'une équation de Mathieu standard. Afin de simplifier les calculs, nous étudierons le pendule non amorti (ce qui est sans incidence sur la pertinence des résultats).

2.1 Equation d'équilibre dans le domaine fréquentiel

Conformément aux remarques précédentes, la solution de l'équation de Mathieu non amortie (A.12) peut s'écrire sous la forme

$$\theta(\tau) = p(\tau) e^{s\tau} \quad (\text{A.14})$$

où $p(\tau)$ est périodique de période π et peut donc être exprimée au moyen de la série de Fourier

$$p(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j e^{2ij\tau}. \quad (\text{A.15})$$

La solution $\theta(\tau)$, exprimée par (A.14) grâce à la théorie de Floquet, peut alors s'écrire comme la somme de différents harmoniques

$$\theta(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j e^{(s+2ij)\tau}. \quad (\text{A.16})$$

En remplaçant le degré de liberté généralisé $\theta(\tau)$ par son expression dans l'équation de mouvement non amortie (A.12) et en se souvenant que $2 \cos(2\tau) = e^{2i\tau} + e^{-2i\tau}$, on obtient

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j \left[(s+2ij)^2 + \delta \right] e^{(s+2ij)\tau} + \epsilon \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j \left\{ e^{[s+2i(j+1)]\tau} + e^{[s+2i(j-1)]\tau} \right\} = 0. \quad (\text{A.17})$$

En annulant les différents termes de l'équation (A.17) pour chaque j , il apparaît une infinité d'équations à coefficients constants dans le domaine fréquentiel que l'on peut mettre sous la forme du système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - \\ - & (s-4i)^2 + \delta & \epsilon & 0 & 0 & 0 & - \\ - & \epsilon & (s-2i)^2 + \delta & \epsilon & 0 & 0 & - \\ - & 0 & \epsilon & s^2 + \delta & \epsilon & 0 & - \\ - & 0 & 0 & \epsilon & (s+2i)^2 + \delta & \epsilon & - \\ - & 0 & 0 & 0 & \epsilon & (s+4i)^2 + \delta & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ p_{-2} \\ p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ - \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (\text{A.18})$$

L'équation (A.18) est le problème aux valeurs propres en s , associé à l'équation de Mathieu (A.12), et exprimé dans le domaine fréquentiel. Le déterminant de ce système linéaire est le déterminant infini de Hill. En pratique, pour un couple de paramètres (δ, ϵ) et un ordre de troncature j_{max} choisis, on obtient un jeu de $2 \times (2j_{max} + 1)$ valeurs propres s_i où $i \in [1, 2 \times (2j_{max} + 1)]$ de la forme adimensionnelle $\pm \left(s + \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} 2ij \right)$. Dans le cas général, on parle d'une approximation du $j_{max}^{\text{ème}}$ ordre où j_{max} est l'ordre de troncature de la série de Fourier de l'équation (A.16).

En appliquant les travaux de Poincaré [Poincaré, 1886] sur le déterminant de Hill, on peut affirmer que le déterminant (A.18) de l'équation de Mathieu convergera s'il y a convergence de la série

$$\Sigma = \sum_j \left| \frac{\epsilon}{\delta + (s+2ij)^2} \right|. \quad (\text{A.19})$$

En d'autres termes, plus l'ordre de troncature j_{max} du déterminant de Hill est élevé et plus le problème aux valeurs propres (A.18) évalue correctement l'équation de Mathieu dans le domaine fréquentiel. De plus, la convergence sera d'autant plus rapide selon que le paramètre ϵ soit faible (amplitude du point d'attache faible) ou que le paramètre δ soit élevé (fréquence d'oscillation du point d'attache faible vis-à-vis de la fréquence propre du pendule).

Soit $j_{max} = j_{conv}$ l'ordre de troncature où l'on considère que le déterminant converge et qu'il tend vers une expression exacte de l'équation de mouvement (A.12) dans le domaine fréquentiel. Pour un couple (δ, ϵ) donné, les parties imaginaires des exposants caractéristiques s_i obtenus tendent alors vers les pulsations exactes de la solution fondamentale $\theta(\tau)$. Les contributions p_j devenant négligeables pour les pulsations d'harmonique $j > j_{conv}$, les vecteurs propres associés tendent vers les modes paramétriques du système.

Remarque :

- L'oscillateur classique (pendule attaché à un point fixe) est le cas particulier de l'oscillateur paramétrique associé où ϵ tend vers 0 et δ tend vers $+\infty$; on peut l'étudier au moyen du déterminant de Hill à l'ordre $j_{max} = 0$. Dans ce cas, le problème aux valeurs propres dans le domaine fréquentiel est exactement équivalent à l'équation de mouvement du pendule dans le domaine temporel.

2.2 Les modes propres paramétriques

Pour un couple de paramètre (δ, ϵ) donné et un ordre de troncature $j_{max} = j_{conv}$, le déterminant de Hill nous permet d'accéder aux modes propres linéaires paramétrique du pendule. En effet, en choisissant comme valeur propre s_i la pulsation fondamentale de l'oscillateur associée à l'ordre $j = 0$ (qui est la pulsation dont la convergence est la plus rapide), le vecteur propre associé est le mode propre du pendule en θ pouvant s'écrire sous la forme

$$\theta(\tau) = \sum_{-j_{conv}}^{j_{conv}} p_j e^{(s+2ij)\tau}. \quad (\text{A.20})$$

Contrairement aux cas des oscillateurs classiques, ces modes linéaires sont poly-harmoniques et paramétriques : leur forme ainsi que leur contenu fréquentiel dépend du couple de paramètres (δ, ϵ) . La comparaison du contenu fréquentiel adimensionnel des figures A.2.c et A.2.d est parfaitement expliquée par la convergence du déterminant de Hill donnée par l'équation (A.19). Dans le cas des oscillations $\theta_1(\tau)$ ($\delta = 3$ et $\epsilon = 2$), le contenu fréquentiel est dense et il faut un ordre de troncature j_{max} élevé pour déterminer le mouvement du pendule. Autrement dit, le mouvement du point d'attache joue un rôle non négligeable (amplitude élevée et $\Omega > \omega_n$), la réponse diffère alors totalement de celle de l'oscillateur classique (figure A.2a). Pour les oscillations $\theta_2(\tau)$ ($\delta = 11$ et $\epsilon = 0.1$) par contre, le contenu fréquentiel du pendule tend vers la valeur adimensionnelle $\sqrt{\delta}$, à savoir un mouvement naturel de pulsation $\omega_n = \sqrt{g/l}$ (pulsation naturelle du pendule attaché à un point fixe). En d'autres termes, l'amplitude ϵ du point d'attache étant petite et la fréquence de l'excitation paramétrique étant faible devant la pulsation naturelle ω_n , le pendule se comporte sensiblement comme l'oscillateur classique associé. Une modélisation classique (équivalente au déterminant de Hill à l'ordre $j_{max} = 0$) est alors suffisante pour déterminer les oscillations de l'équation de Mathieu (figure A.2.b).

Le comportement vibratoire du pendule de la figure A.1 est déterminé au moyen du logiciel Matlab dans le domaine fréquentiel en implémentant le problème aux valeurs propres paramétrique (A.18). Les figures A.2.a et A.2.b représentent les modes propres paramétriques du pendule non amorti pour

différents jeux de paramètres. Contrairement aux oscillateurs paramétriques tournants du chapitre 2, le pendule possède un seul degré de liberté généralisé et par conséquent un seul mode propre. Les transformées de Fourier Rapide (calculées avec Matlab) des modes des figures A.2.c et A.2.d nous fournissent leur contenu fréquentiel.

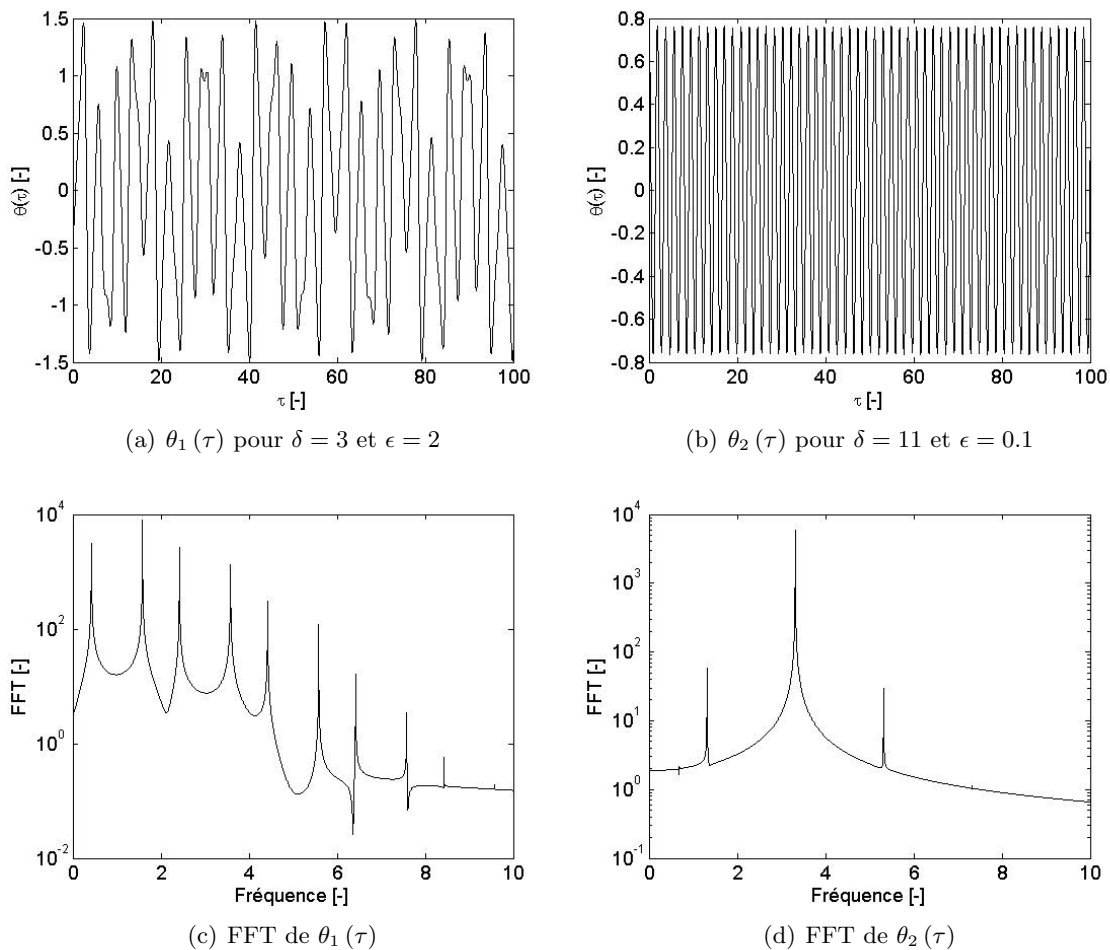


Figure A.2: Modes propres paramétriques pour différents couples (δ, ϵ)

A l'image des modes propres classiques, les modes propres paramétriques ou poly-harmonique sont linéaires. La solution de l'équation de l'oscillateur paramétrique libre peut donc s'exprimer sur la base de l'ensemble de ces modes comme une combinaison linéaire dépendant des conditions initiales. Le spectre de fréquences de la solution fondamentale est donc contenu dans celui de l'ensemble des modes. Ainsi, dans le cas d'un amortissement sous-critique ($\zeta = 0.02$), pour un couple de paramètre donné et une condition initiale choisie $\theta(0) = 0.1$ rad, les oscillations amorties de l'équation de Mathieu (A.13) calculées par intégration directe conservent les mêmes pulsations (rigoureusement appelées pseudo-pulsations) que celles obtenues dans les modes paramétriques associés (figure A.3). Alors que le mouvement du pendule pour $\delta = 11$ et $\epsilon = 0.1$ se rapproche de celui du pendule classique (figure A.3.a), le mouvement du pendule avec $\delta = 3$ et $\epsilon = 2$ se caractérise par un contenu fréquentiel plus riche. Contrairement au cas des oscillateurs paramétriques tournants du chapitre 2, le mode

paramétrique de l'équation de Mathieu (1.15) nous donne directement le spectre de fréquences du mouvement du pendule étant donné qu'il ne possède qu'un degré de liberté généralisé.

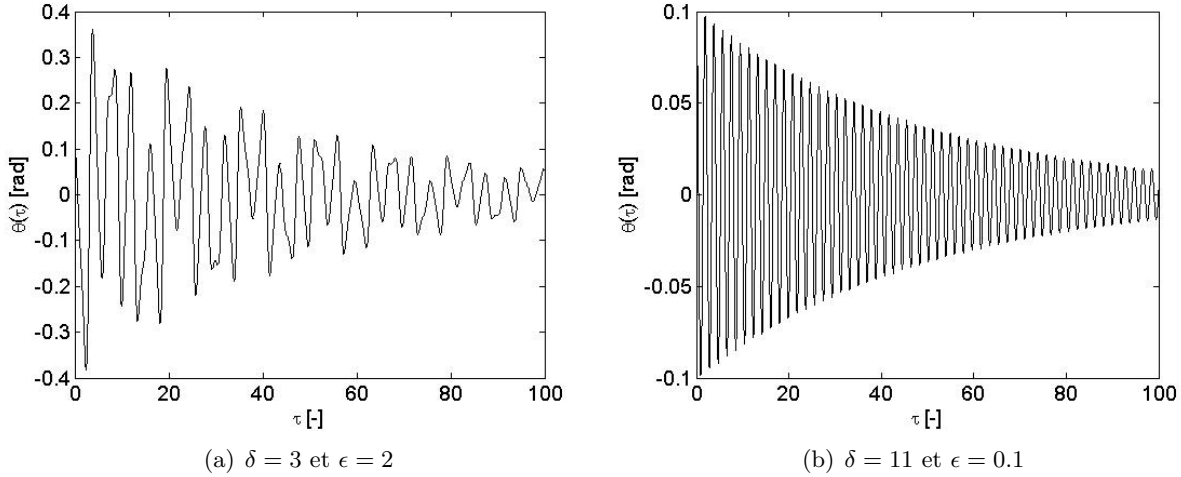


Figure A.3: Intégration directe de l'équation de Mathieu pour $\theta(0) = 0.1$ rad et $\zeta = 0.02$

Remarques :

- Etant donné la convergence (A.19), si le déterminant de Hill (A.18) converge pour un jeu de paramètres (δ_1, ϵ_1) , il convergera également pour le jeu (δ_2, ϵ_2) si $\delta_2 > \delta_1$ et $\epsilon_2 < \epsilon_1$. En pratique, on choisit la dimension fréquentielle j_{conv} en fonction de la plage de paramètres à étudier.
- A travers les modes linéaires paramétriques, on s'attache à donner une méthode simple permettant de traiter numériquement les oscillateurs paramétriques à travers la résolution de leur équation de mouvement différentielle à coefficients périodiques. Les résultats présentés sur les oscillateurs paramétriques tournants du chapitre 2 et sur l'équation de Mathieu paraissent proches. Les concepts introduits sont effectivement identiques mais il est nécessaire d'étudier les équations non-autonomes qui sont de nature mathématiques différentes. Notamment, même si le coefficient périodique de l'équation de Mathieu est harmonique, il est difficile d'établir un parallèle complet entre les modes paramétriques de cette dernière et ceux de l'oscillateur tournant S_1 du chapitre 2.

2.3 Stabilité du système

En accord avec le théorème de Liapunov, ce sont les parties réelles des exposants caractéristiques s_i de la solution fondamentale de l'équation de Mathieu qui détermine la stabilité du système. Notamment, s'il existe pour un couple (δ, ϵ) donné un seul exposant caractéristique tel que $\Re(s_i) > 0$, le système est dynamiquement instable.

Dans le cas de l'équation de Mathieu, les cartes de stabilité représentent la partie réelle de la valeur propre s_m la plus préjudiciable ($\Re(s_m) > \Re(s_i) \forall i \in [1, 2 \times (2j_{max} + 1)]$) dans l'espace (δ, ϵ) . La carte de stabilité obtenue est le diagramme de Strutt. Dans le cas du pendule non amorti (figures A.4), la partie réelle est nulle dans les domaines de stabilité alors qu'elle est positive dans les zones d'instabilité. Pour $\delta < 0$ (raideur négative), le système est presque toujours instable. Nous considérerons par la suite les cas où $\delta > 0$.

Conformément à la théorie de Floquet exposée précédemment, les limites des domaines d'instabilité s'obtiennent lorsque les multiplicateurs caractéristiques de la matrice monodrome \mathbb{C} vérifient $|\rho| = 1$. Cette relation nous conduit alors à deux cas différents :

- Si $\rho = \exp^{sT} = \exp^{s\pi} = 1$, $s = 0 + 0i$ et on obtient des oscillations non amorties de la forme $\theta(\tau + T) = \theta(\tau)$ de période $T = \pi$.
- Si $\rho = -1$, $s = 0 \pm 1i$ et on obtient des oscillations non amorties de la forme $\theta(t + T) = -\theta(t)$ de période $2T = 2\pi$.

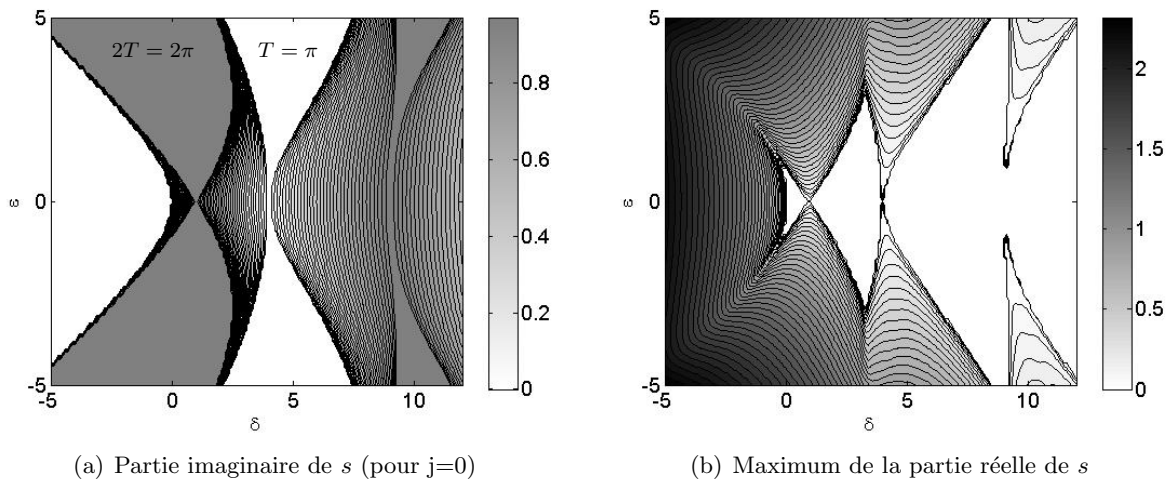


Figure A.4: Carte de stabilité du pendule dans le plan δ, ϵ avec $\zeta = 0$ et $j_{max} = 4$

En se référant à [Bolotin, 1964, Campbell, 1964] et en accord avec les diagrammes de stabilité de la figure A.4, on peut affirmer que deux solutions de même période (période T ou $2T$) limitent les régions d'instabilité alors que deux solutions de périodes différentes limitent les domaines où la solution est stable. Toujours grâce à [Bolotin, 1964] et en faisant tendre ϵ vers zero (méthode de perturbation), on montre que :

- Les solutions de période $2T = 2\pi$ apparaissent pour $\delta = j^2$ (c'est-à-dire $\Omega = \frac{2\omega_n}{j}$ où $\omega_n = \sqrt{g/l}$ est la fréquence propre du pendule attaché à un point fixe A) où j est le $j^{\text{ème}}$ harmonique impair de la série (A.20).
- Les solutions de période $T = \pi$ apparaissent pour $\delta = j^2$ où j est pair.

Contrairement aux cas des oscillateurs harmoniques classiques où l'on observe une résonance lorsque la fréquence de la charge appliquée est égale à la fréquence propre du système, les résonances paramétriques apparaissent quand la force excitatrice est un multiple de la fréquence propre du système. La région d'instabilité la plus "dangereuse" (région d'instabilité principale) est associée à $j = 1$, c'est à dire $\Omega = 2 \times \omega_n$. La largeur des régions d'instabilité secondaires décroît vite avec l'augmentation du numéro d'harmonique j . La précision des domaines d'instabilité obtenus augmente avec l'ordre de troncature j_{max} choisi, la convergence de la région d'instabilité principale est donc la plus rapide.

La figure A.4 représente le maximum de la partie réelle des valeurs propres (figure A.4.a) et la partie imaginaire de s (figure A.4.b) en fonction du couple de paramètres (δ, ϵ) pour $\zeta = 0$. On voit bien la région d'instabilité principale qui apparaît pour $\delta = j^2 = 1$ ($\Omega = 2\omega_n$), ainsi que la seconde et la troisième région d'instabilité (qui sont assez précises étant donné que l'on a pris $j_{max} = 4$).

Dans les domaines stables, la partie réelle de s est nulle étant donné que le système n'est pas amorti. On voit à travers la partie imaginaire de s que les domaines stables sont limités par des solutions de périodes différentes T ($s = 0 + 0i$) ou $2T$ ($s = 0 + 1i$).

Une représentation pertinente inspirée de l'étude des oscillateurs paramétriques tournants est l'évolution des exposants caractéristiques de l'équation de Mathieu en fonction du paramètre δ (pour un ϵ donné). La partie imaginaire de ces exposants nous renseigne alors sur l'évolution des fréquences adimensionnelles des solutions fondamentales $\theta(\tau)$ (figure A.5.a) alors que la partie réelle détermine la stabilité du pendule (figure A.5.b).

Pour certaines plages de fonctionnement (autrement dit de valeurs de paramètres), il y a confusion des fréquences du mode propre paramétrique et donc de la solution fondamentale associée. La partie réelle associée devient alors positive, c'est l'instabilité dynamique caractéristique des oscillateurs linéaires paramétriques (figure A.5). On observe aisément sur la figure A.5 la propriété de l'équation de Mathieu qui est l'alternance entre les confusions de fréquences d'une solution de période $2T$ ($\Im(s) = 1 + 2j$) associées aux régions d'instabilité qui apparaissent pour $\delta = j^2$ avec j impair et celles d'une solution de période T ($\Im(s) = 0 + 2j$) associées aux régions d'instabilité qui apparaissent pour $\delta = j^2$ avec j pair. Ce phénomène sera précisé dans la partie suivante.

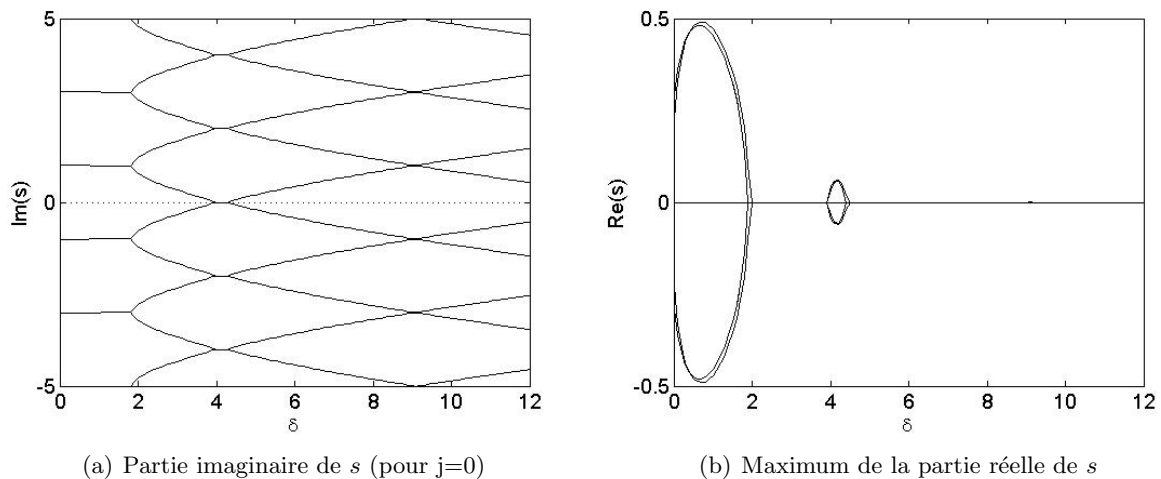


Figure A.5: Evolution de l'exposant caractéristique en fonction de δ (pour $\epsilon = 1$)

La figure A.5 illustre l'évolution des exposants caractéristiques de l'équation de Mathieu non amortie pour un ordre de troncature $j_{max} = 4$ et $\epsilon = 1$. On obtient une bonne approximation des exposants (jusqu'à l'ordre de troncature fréquentiel $j_{max} = 4$) et des quatre premières régions d'instabilité par confusion de fréquences du système. Ce qui suffit largement à étudier la stabilité du pendule étant donné que la troisième région d'instabilité n'est déjà plus visible sur la figure.

La présence d'amortissement modifie la valeur de l'exposant caractéristique de l'équation (A.13) de s à $s - \zeta$ (indépendamment du couple (δ, ϵ)) et la fréquence propre de l'oscillateur classique associé passe de $\sqrt{g/l}$ à $\sqrt{g/l - \zeta^2}$. L'influence de l'amortissement est donc positive vis-à-vis de la stabilité du pendule en diminuant le domaine d'instabilité (δ, ϵ) (figure A.6) tandis que le spectre de fréquences de la solution peut être considéré comme identique.

La présence d'amortissement dans les cas pratiques fait disparaître les régions d'instabilité d'ordre j

élevés. Seules quelques régions, dont la région d'instabilité principale qui est la plus sévère, subsistent. Contrairement aux cas des modes propres paramétriques qui sont obtenus pour $j_{max} = j_{conv}$, l'étude de la stabilité peut donc se faire en choisissant un ordre de troncature j_{max} plus faible suffisant pour modéliser correctement les premières régions d'instabilités.

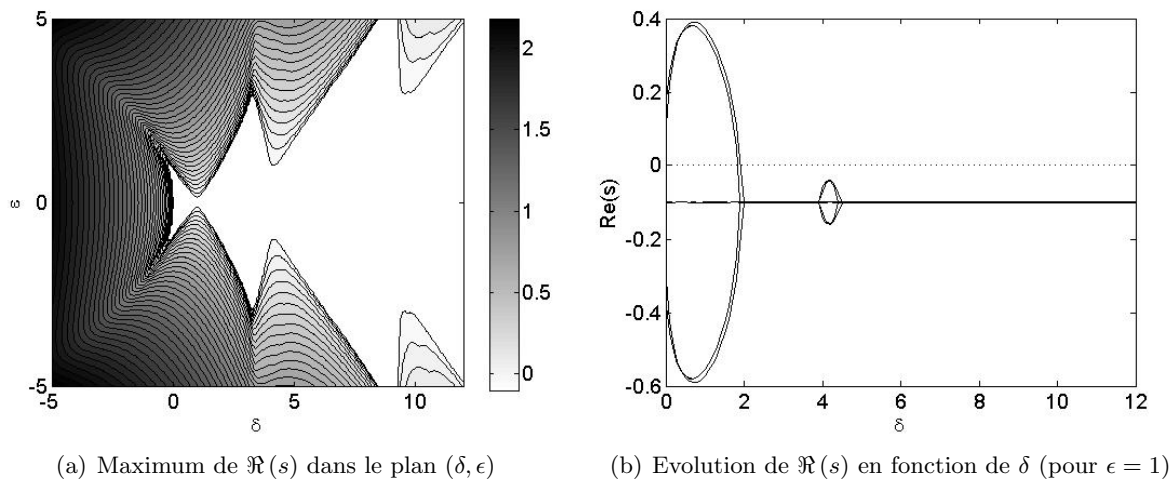


Figure A.6: Cartes de stabilité du pendule avec $\zeta = 0.1$ et $j_{max} = 4$

On ajoute maintenant un amortissement réduit $\zeta = 0.1$ au pendule étudié précédemment à travers les figures A.4 et A.5. La figure A.6.a trace la carte de stabilité associée et la figure A.6.b dessine l'évolution des parties réelles des exposants caractéristiques de l'équation de Mathieu amortie en fonction de δ (pour $\epsilon = 1$). On rappelle que pour une telle valeur d'amortissement, la partie imaginaires des exposants est identique à la figure A.5.a. En soustrayant ζ au graphe de la figure A.4.b, on réduit les domaines d'instabilité du pendule. La région d'instabilité est d'autant plus influencée par l'amortissement que l'ordre j qui lui est associé est élevé. On comprend alors pourquoi la première région d'instabilité est aussi la principale.

Remarques :

- Dans le cas de l'équation de Mathieu, le critère de Hsu, qui est une méthode de perturbation au premier ordre, permet uniquement de localiser la région principale d'instabilité [Hsu, 1963] et n'est donc pas adéquat dans le cas de cette équation. La détermination de toutes les régions passe par différents raisonnements [Bolotin, 1964].
- Le phénomène d'instabilité rencontré ici est commun aux oscillateurs paramétriques : c'est la confusion de fréquences des différents harmoniques des modes paramétriques. Dans le cas des oscillateurs tournants S_1 et S_2 à deux degrés de liberté, chaque harmonique j induisait plusieurs régions d'instabilité (instabilité du mode en x , y et des deux modes).
- La méthode présentée nous permet de déterminer les domaines d'instabilité de l'oscillateur paramétrique linéaire. Pour étudier les modes ou solutions instables (trajectoires, spectre de fréquences...), une analyse non-linéaire paraît plus adaptée (bifurcation de Hopf [Nguyen, 1995]). On se garde donc dans ce document de visualiser ces solutions qui seraient cependant des oscillations exponentielles de pseudo-période T ou $2T$ selon le domaine d'instabilité considéré.

2.4 Comportement aux limites de stabilité

L'équation de Mathieu est instable paramétriquement : il existe donc plusieurs domaines d'instabilité (δ, ϵ) . On s'intéresse dans cette partie au comportement de la solution aux limites des domaines stables à travers l'étude des modes paramétriques associés afin de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu.

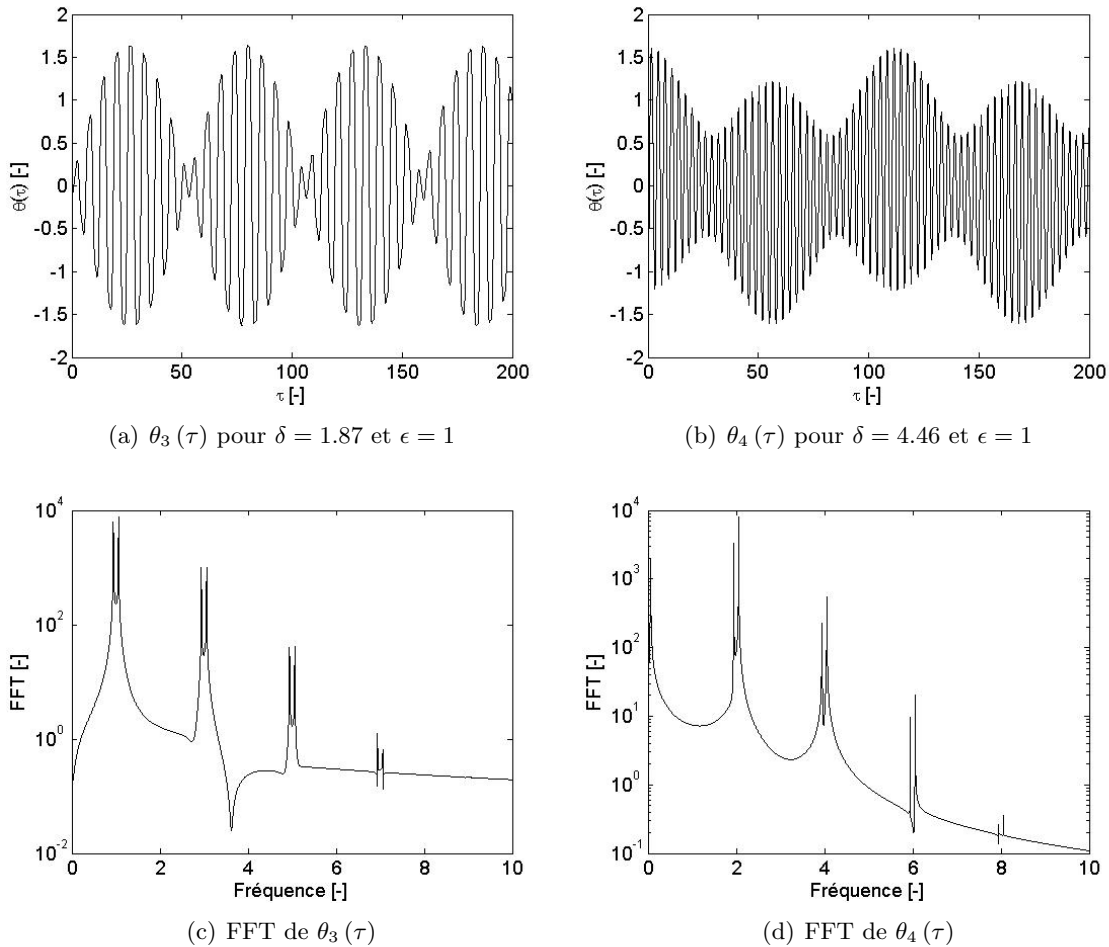


Figure A.7: Phénomène de battement de fréquence des modes propres

La solution de l'équation de Mathieu peut s'exprimer sur la base de ses modes propres paramétriques que l'on peut écrire sous la forme

$$\theta(\tau) = \sum_{-j_{conv}}^{j_{conv}} p_j e^{(s+2ij)\tau}. \quad (\text{A.21})$$

Aux limites de chaque domaine de stabilité, on sait que l'on tend à observer une réponse périodique de période T ou $2T$. En analysant l'exposant caractéristique adimensionnel s de l'équation de Mathieu non amortie (l'exposant s associé à l'ordre de troncature fréquentiel $j = 0$ est représenté sur les cartes de stabilité de la figure A.4), cette périodicité peut s'expliquer simplement.

Pour les couples (δ, ϵ) associés au cas limite où les exposants s valent $2ji$, le spectre de fréquences du mode paramétrique se met sous la forme $|2ji|$ où $j \in [-j_{conv}, j_{conv}]$ (figure A.8.b). Autrement dit, la solution s'exprime en série de Fourier sous la forme

$$\theta(\tau) = b_0 + \sum_{j=2,4,6}^{\infty} (a_j \sin j\tau + b_j \cos j\tau) \quad (\text{A.22})$$

de période $T = \pi$ (figure A.8.a).

Dans l'autre cas limite où les exposants s'écrivent sous la forme $s = (2j + 1)i$, le spectre de fréquences devient $|(2j + 1)i|$ où $j \in [-j_{conv}, j_{conv}]$. Cette fois la solution s'exprime également en série de Fourier mais sous la forme

$$\theta(\tau) = \sum_{j=1,3,5}^{\infty} (a_n \sin j\tau + b_j \cos j\tau) \quad (\text{A.23})$$

et est donc de période $2T = 2\pi$.

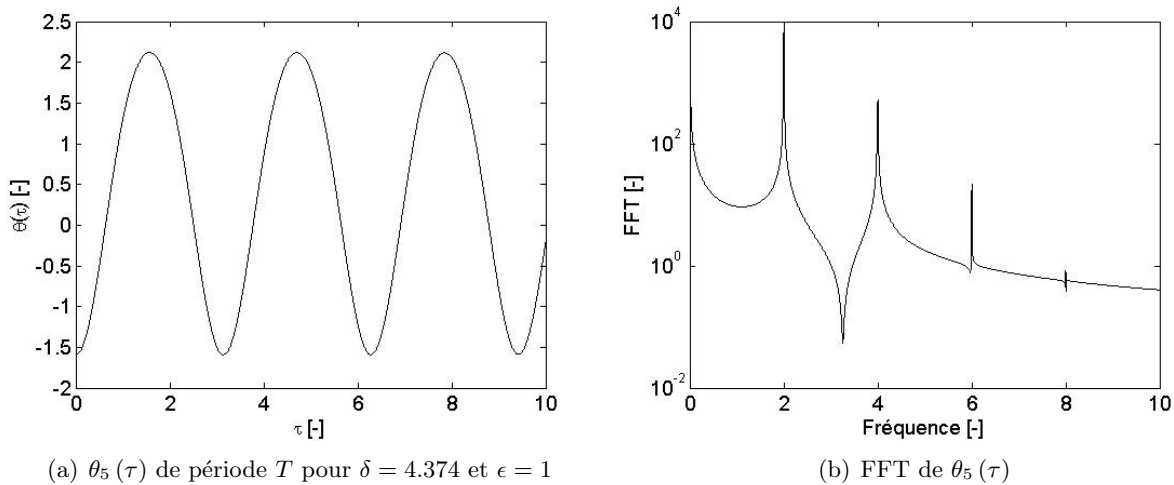


Figure A.8: Mode propre paramétrique aux limites des domaines de stabilité

Entre les deux types de solutions de période T ou $2T$ définissant les limites des domaines d'instabilité, les exposants caractéristiques calculés sont de la forme $s = (2j + f)i$ où $f \in]0, 1[$. En choisissant un couple de paramètres (δ, ϵ) tel que $f \rightarrow 0$, on observe un phénomène de battement des fréquences adimensionnelles $|(2j - \alpha)i|$ et $|(2j + \alpha)i|$ où α est considéré petit (figures A.7.b et A.7.d). Ce phénomène est annonciateur de la confusion de fréquences du mode paramétrique (et donc de la solution) qui sera de période T . De la même façon, en choisissant un couple de paramètres tel que $f \rightarrow i$ à l'image des figures A.7.a et A.7.c, on peut observer un phénomène de battement des fréquences $|(2j + 1 - \alpha)i|$ et $|(2j + 1 + \alpha)i|$ qui conduit à une confusion de fréquences du mode de période $2T$. Sur les transformées de Fourier des signaux, le battement est caractérisé par la présence de "double pic" sur chaque harmonique.

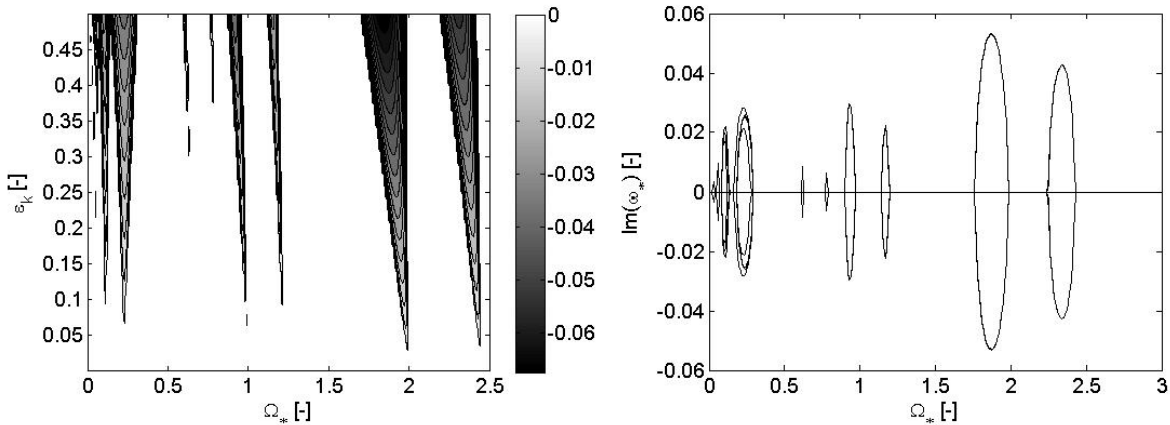
L'harmonique prépondérant du mode paramétrique en confusion de fréquences est différent selon la région d'instabilité considérée. Ainsi, les phénomènes de battement de la figure A.7.a, associés à la première région d'instabilité, concerne surtout le premier harmonique de la solution (figure A.7.c). Pour la seconde région d'instabilité (battements de la figure A.7.b), le second harmonique (en considérant l'harmonique fondamental statique) est prépondérant (figure A.7.d). Les régions d'instabilité secondaires sont les conséquences d'une confusion de fréquences des harmoniques secondaires, et sont logiquement moins préjudiciables.

Remarque :

- Si le pendule est considéré amorti, deux cas sont à distinguer dans les régions (δ, ϵ) stable. Prenons l'exemple de la figure A.6 où l'amortissement adimensionnel ajouté vaut $\zeta = 0.1$. Il existe alors les régions stables où $\Re(s) = -\zeta$ qui sont associées aux régions où le pendule non amorti équivalent était stable et où les solutions amorties contiennent deux pseudo-pulsations fondamentales. Mais il existe également des couples (δ, ϵ) pour lesquels on observe $-\zeta < \Re(s) < 0$ et qui correspondent aux domaines où le pendule non amorti équivalent était instable (figure A.6.a). Dans ce dernier cas, la réponse amortie est alors de pseudo-période T ou $2T$.

3 Remarques sur les oscillateurs paramétriques tournants

Nous nous sommes déjà longuement intéressé aux modes propres paramétriques dans le cas des oscillateurs tournants du chapitre 2 mais nous utilisons les résultats évoqués précédemment au sujet de l'équation de Mathieu afin d'apporter quelques précisions sur ces modes et notamment sur leur comportement aux limites de stabilité.



(a) Minimum de $\Im(\omega)$ dans le plan (Ω, ϵ_k)

(b) Evolution de $\Im(\omega)$ en fonction de Ω (pour $\epsilon_k = 0.4$)

Figure A.9: Cartes de stabilité du système S_2 non amorti pour $j_{max} = 2$

En s'inspirant de l'étude du pendule paramétrique de la figure A.1, reprenons le cas S_2 du rotor fissuré du chapitre 2 et observons le comportement des modes paramétriques (et donc de la solution) aux limites de stabilité. La carte de stabilité de l'oscillateur S_2 non amorti est redonnée sur la figure A.9. On choisit un couple de paramètres (Ω_*, ϵ_k) afin de se situer à la limite du domaine d'instabilité principal dû à la confusion de fréquences du mode paramétrique en X . Rappelons qu'à cette vitesse de rotation

importante, les modes paramétriques ne couplent plus les déplacements en X et Y et deviennent ainsi unidirectionnels (figure A.10). Comme dans le cas de l'équation de Mathieu, il apparaît un phénomène de battement du mode en X caractéristique d'une future confusion de fréquences (figure A.10.a). La région d'instabilité considérée étant principale, l'harmonique fondamental $\omega = \frac{\Omega}{2}$ est prépondérant (figure A.10.c). Comme dans le cas de Mathieu, les instabilités secondaires font intervenir les autres harmoniques du mode (à savoir $\omega = \frac{j\Omega}{2}$ avec $j > 1$ pour l'oscillateur S_2).

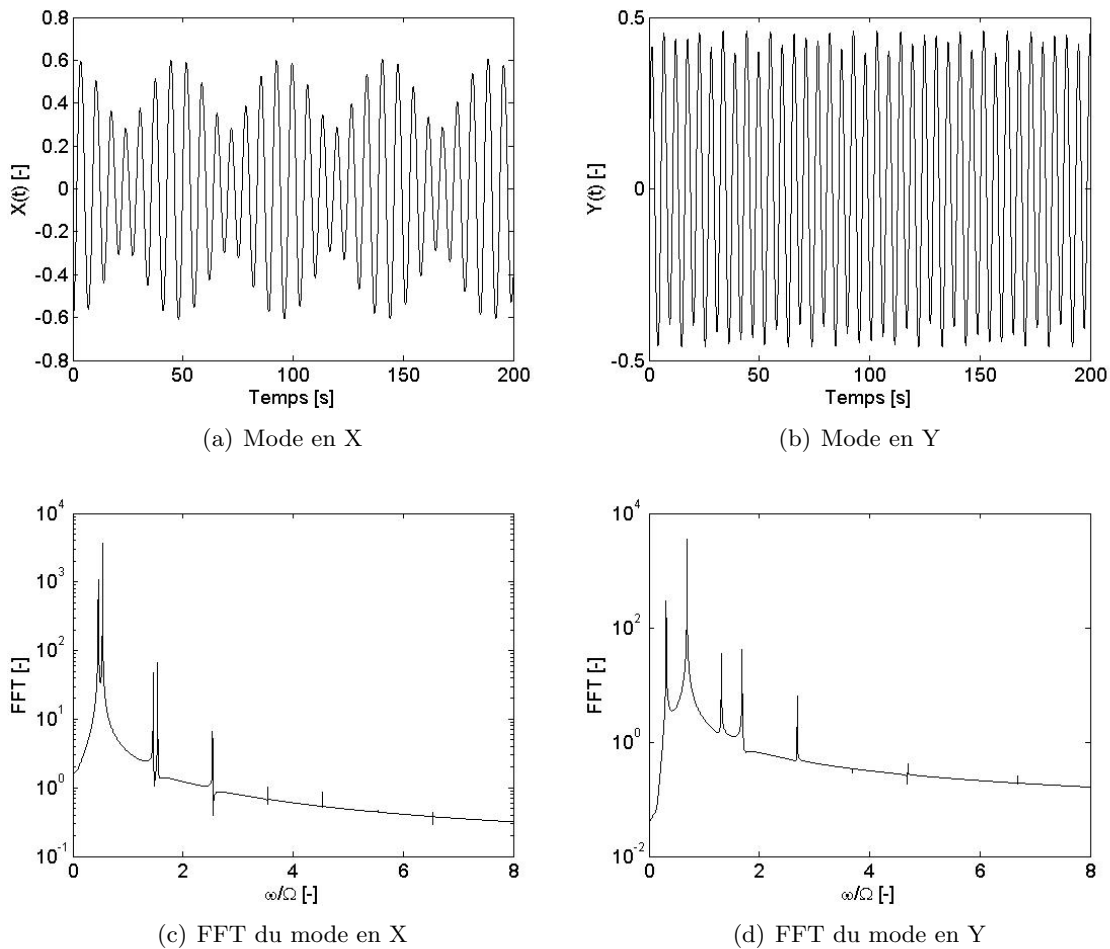


Figure A.10: Confusion des fréquences du mode en X pour S_2 ($\Omega_* = 1.7$)

L'oscillateur tournant étant modélisé par deux degrés de liberté, la solution de l'équation de mouvement de type Hill n'est pas aussi triviale que celle du cas considéré par Mathieu. En effet, en s'approchant de la confusion de fréquences du mode en X , le mode en Y possède deux fréquences fondamentales bien distinctes (figures A.10.b et A.10.d). L'oscillation paramétrique aux limites de stabilité exprimée sur la base de ces modes se caractérise donc par un contenu fréquentiel riche et ne possède finalement pas de fréquence fondamentale unique. De la même façon, le mode en X possède deux fréquences fondamentales distinctes lorsque il y a confusion des fréquences du mode en Y . Le comportement aux limites de stabilité de l'oscillation paramétrique du système S_2 par confusion de fréquences des modes en X ou en Y est donc plus élaboré que celui de l'équation de Mathieu.

Intéressons nous pour finir à l'autre instabilité paramétrique, absente du cas traité par Mathieu, qui provient du couplage entre les modes paramétriques en X et Y (figures A.11 et A.12). Toujours grâce à la carte de stabilité de la figure A.9, on choisit un couple de paramètres (Ω_*, ϵ_k) de l'oscillateur S_2 non amorti de façon à atteindre les limites de la région d'instabilité principale (qui apparaît, selon le critère de Hsu du chapitre 2, pour $\Omega = \omega_{0y} - \omega_{0x}$). Dans ce cas, les modes paramétriques complexes en X (figure A.11.a) et Y (figure A.11.b) sont tout à fait stables. Leur spectre de fréquences est "simple" et tend, aux limites de stabilité, vers les harmoniques $j\Omega$ (figures A.11.c et A.11.d).

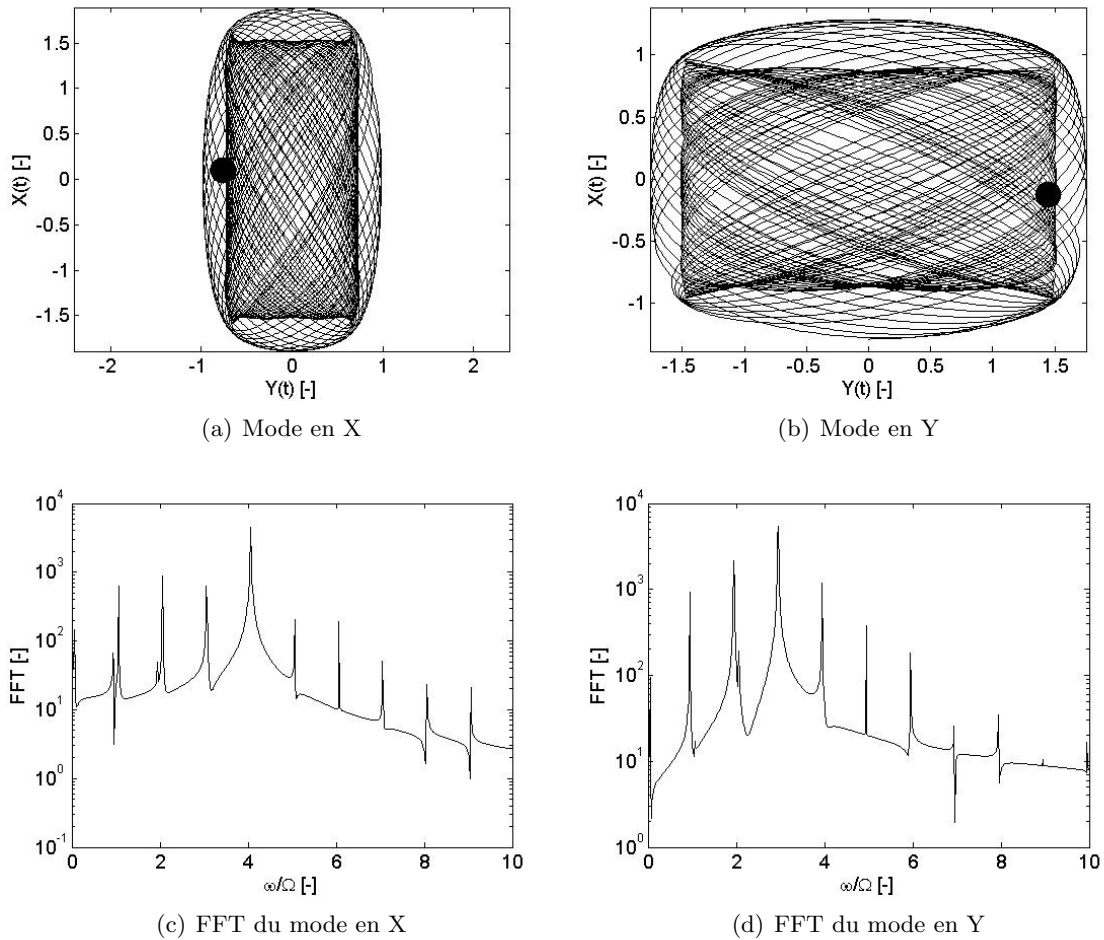


Figure A.11: Confusion des fréquences des modes en X et Y pour S_2 ($\Omega_* = 0.3$)

En calculant l'oscillation paramétrique associée qui s'exprime sur la base de ces modes (cette oscillation, calculée par intégration temporelle directe de l'équation de mouvement, est représentée sur la figure A.12), on s'approche d'une confusion des fréquences des deux modes transverses. Contrairement à l'instabilité paramétrique abordée précédemment où le phénomène de battement concernait l'un ou l'autre des modes, c'est la solution de l'équation de Hill qui observe ce phénomène (le battement s'applique dans les deux directions du mouvement). A chaque région d'instabilité correspond la confusion de fréquences d'un numéro d'harmonique prépondérant ; la région d'instabilité principale est associée à l'harmonique fondamental $\omega \approx \Omega$.

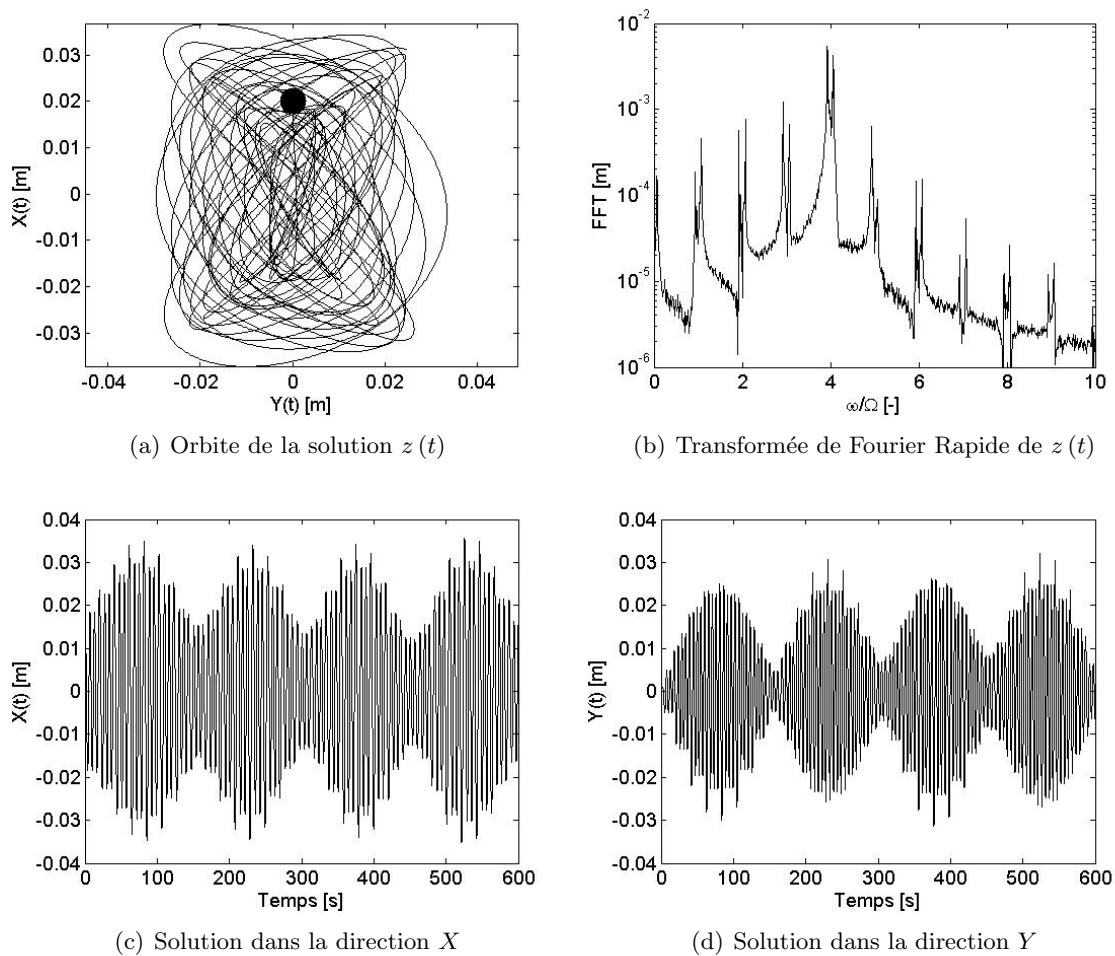


Figure A.12: Confusion de fréquences de $z(t)$ pour $\Omega_* = 0.3$ et $x(0) = 0.02$ m

Remarques :

- Etant donné le couplage entre les déplacements transverses des oscillateurs paramétriques tournants du chapitre 2, les oscillations du système S_2 sont plus complexes que les solutions de l'équation de Mathieu (multiplicité des régions d'instabilité, contenu fréquentiel des solutions,...). Cependant, les propriétés intrinsèques et fondamentales des modes paramétriques sont conservées ; à savoir notamment la confusion de leurs harmoniques pour certains paramètres, la dépendance de leur spectre de fréquences vis-à-vis de ces paramètres et leur linéarité.
- Le contenu fréquentiel de l'oscillation paramétrique du système tournant S_2 est plus "pur" à la limite des domaines d'instabilité par couplage entre les modes transverses que par confusion de fréquences de l'un des modes. A l'image de l'équation de Mathieu, le phénomène de battement de la solution est annonciateur de la confusion de fréquences par couplage des modes transverses. Cette propriété remarquable peut nous être utile dans la détection de fissures des rotors horizontaux en rotation. Selon la vitesse de rotation considérée et en analysant le battement du signal vibratoire observé (en admettant toutefois que ce phénomène soit observable in situ), on peut théoriquement accéder à la forme de la fonction raideur $k_{r2}(t)$.

Annexe B

Couplage rotor-stator exprimé dans le domaine fréquentiel

On donne dans cette dernière annexe des précisions concernant la modélisation tridimensionnelle du couplage rotor-stator dans le logiciel Cast3m. En effet, contrairement au cas simplifié d'un point matériel (chapitre 2), la modélisation d'une structure modélisée par éléments finis tient compte de champs de déplacements plus complexes. Ainsi, la période d'une onde vibratoire de la structure en rotation exprimée dans le repère fixe dépend du mode de Fourier sur laquelle elle se projète. En tenant compte de cette propriété, on peut alors prendre en compte l'influence d'un défaut de forme sur les degrés de liberté généralisés de la machine tournante à travers la liaison rotor-stator. Dans cette thèse, seuls les déplacements transverses projetés sur les modes de Fourier $n = 1$ sont pris en compte (cette hypothèse est suffisante dans la plupart des cas industriels faisant intervenir un couplage réel entre le rotor et le stator).

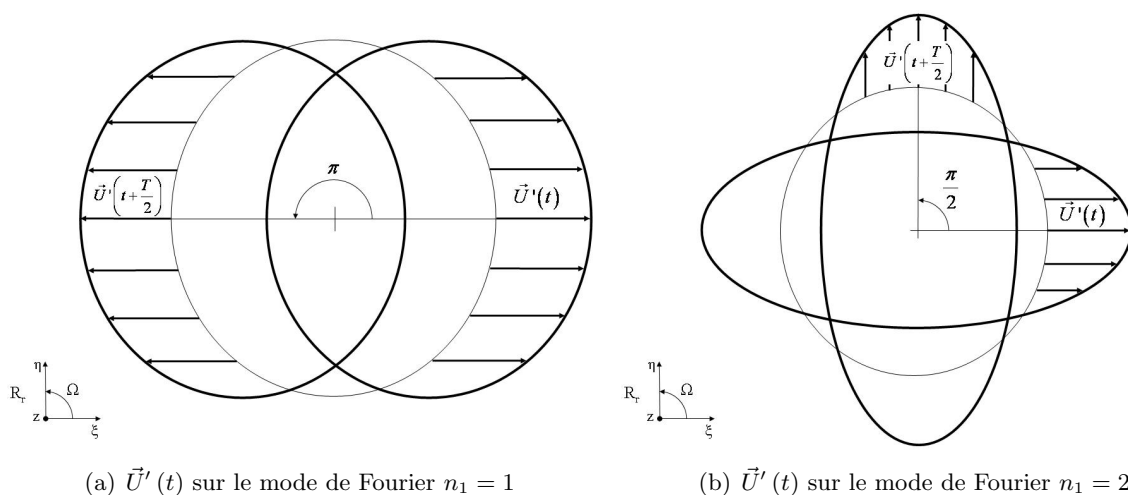


Figure B.1: $\vec{U}'(t)$ en fonction du mode de Fourier considéré pour une demi-période dans \mathbf{R}_n

1 Equivalence entre repère fixe et tournant

La finalité de la modélisation tridimensionnelle décrite dans le chapitre 3 est de prédire efficacement le comportement vibratoire d'ensemble d'une machine tournante. Les champs de déplacements statoriques et rotoriques n'étant pas définis dans le même référentiel, une étape de changement de repère est nécessaire pour travailler dans le repère d'étude Galiléen.

Dans ce rapport, c'est l'étude du comportement transverse, prépondérant dans la vibration des machines tournantes, qui nous intéresse. Une fois cette hypothèse faite, on peut toujours exprimer le champ de déplacements du rotor dans le repère tournant \mathbf{R}_r au moyen de la série de Fourier

$$\left\{ \vec{U}' \right\}_{\mathbf{R}_r} = \vec{U}'_s(r, z) \cos(n_1 \theta') + \vec{U}'_a(r, z) \sin(n_1 \theta') \quad (\text{B.1})$$

où θ' est la position angulaire dans le repère tournant et n_1 est le coefficient de Fourier sur lequel se projète \vec{U}' . La figure B.1 représente les champs de déplacements rotoriques sur les modes de Fourier $n_1 = 1$ et $n_1 = 2$.

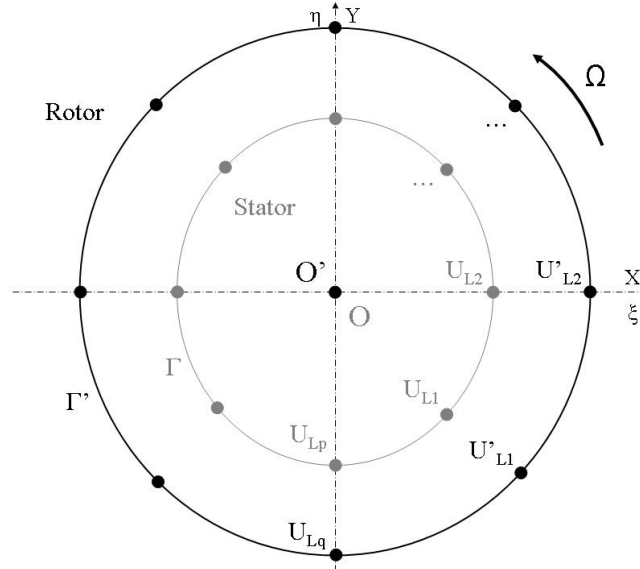


Figure B.2: Représentation schématique des degrés de liberté de liaison physiques

Intéressons nous à présent l'évolution dynamique de ces champs de déplacements. En considérant pour l'instant le système sans défaut, on peut poser a priori la solution sous la forme ondulatoire

$$\left\{ \vec{U}'(t) \right\}_{\mathbf{R}_r} = \vec{U}'_s(r, z) \cos(n_1 \theta' - \omega' t) + \vec{U}'_a(r, z) \sin(n_1 \theta' - \omega' t) \quad (\text{B.2})$$

où ω' est la fréquence fondamentale de l'onde vibratoire transverse du rotor exprimée dans \mathbf{R}_r . Etant donnée l'hypothèse de rotation constante Ω valable tout au long de ce document, on peut écrire la relation entre la position angulaire du rotor exprimée dans le rotor tournant θ' et celle exprimée dans le repère fixe θ

$$\theta = \theta' + \Omega t. \quad (\text{B.3})$$

L'onde vibratoire transverse du rotor s'exprime alors dans le repère d'étude \mathbf{R}_n au moyen de la série de Fourier

$$\left\{ \vec{U}'(t) \right\}_{\mathbf{R}_n} = \vec{U}'_s(r, z) \cos(n_1\theta - (n_1\Omega + \omega')t) + \vec{U}'_a(r, z) \sin(n_1\theta - (n_1\Omega + \omega')t). \quad (\text{B.4})$$

En écrivant l'onde vibratoire rotorique dans le repère d'étude \mathbf{R}_n , on établit la relation d'équivalence entre la fréquence fondamentale ω et ω' exprimée respectivement dans le repère fixe et le repère tournant

$$\omega = \omega' + n_1\Omega. \quad (\text{B.5})$$

Sous l'effet de la rotation, les composantes spatiales et temporelles sont indissociables. La figure B.1 illustre l'influence de la répartition spatiale du champ de déplacements rotorique sur son évolution au cours du temps dans le repère d'étude. La relation (B.5) nous permet de déterminer le comportement vibratoire d'ensemble de la machine tournante dans le repère Galiléen (voir chapitre 3).

Afin de faciliter nos calculs, on se restreint dans ce rapport à l'étude du comportement d'ensemble des modes de Fourier $n_1 = 1$ (qui suffisent à étudier la plupart des cas industriels classiques). Afin de modéliser par la suite des défauts de forme, la modélisation éléments finis tridimensionnelle est adoptée. L'étude de modes particuliers nécessite alors une troncature manuelle (en analysant les déformées). Afin de transmettre le couplage rotor-stator à l'ensemble du mode, les degrés de liberté de liaison physiques sont projetés sur le mode de Fourier considéré. Cette projection s'effectue sur les coordonnées cartésiennes des noeuds considérés (figure B.2).

2 Influence d'un défaut de forme sur le couplage rotor-stator

La seconde étape dans la modélisation tridimensionnelle du comportement vibratoire d'ensemble des machines tournantes par la méthode éléments finis du chapitre 3 est la prise en compte d'un éventuel défaut de forme.

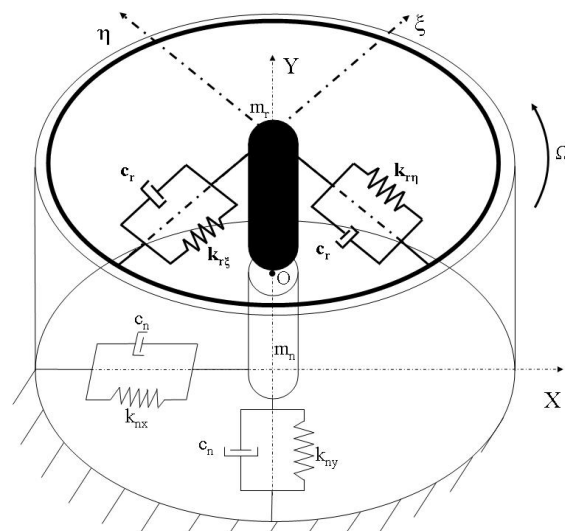


Figure B.3: Représentation schématique du couplage rotor-stator dans l'espace modal

Suite aux remarques de la partie précédente, on restreint notre étude aux champs de déplacements transverses sur le mode de Fourier $n_1 = 1$. La figure B.3 représente la modélisation simplifiée de notre

machine tournante dans la base modale. La partie rotorique est alors représentée par les raideurs tournantes $k_{r\xi}$ et $k_{r\eta}$ respectivement dans les directions transverses ξ et η et la masse généralisée m_r . La partie statorique est modélisée par les raideurs fixes k_{nx} et k_{ny} respectivement dans les directions transverses x et y et la masse généralisée m_n . Les déplacements généralisés de la masse tournante m_r sont exprimés dans le repère \mathbf{R}_r et s'écrivent

$$\{q'(t)\} = \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Les déplacements généralisés $q(t)$ de la masse m_n sont exprimés dans le repère fixe sous la forme

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Etant donné que le rotor tourne à une vitesse de rotation constante Ω et que l'on considère les masses m_r et m_n liées par une liaison parfaite au point O (mêmes déplacements des 2 masses), on peut écrire la condition de liaison en O entre les déplacements généralisés $q'(t)$ et $q(t)$

$$\{q'(t)\} = \mathbb{R}(\Omega t) \{q(t)\}. \quad (\text{B.8})$$

Les déplacements $q'(t)$ et $q(t)$ exprimés dans le même repère étant égaux à chaque instant t , la figure B.3 prend en compte simultanément le changement de repère nécessaire à la détermination du comportement vibratoire du système dans le repère d'étude et le couplage rotor-stator (dans le chapitre 3, le changement de repère des déplacements du noeud O' et la liaison entre les noeuds O et O' dans le repère \mathbf{R}_n peuvent être des étapes différentes).

Le noeud O étant sur l'axe de rotation (dans le code éléments finis, c'est par la projection des degrés de liberté de liaison physique de la figure B.2 qu'on exprime le couplage rotor-stator aux noeuds de l'axe de rotation), la relation entre les déplacements généralisés $q'(t)$ et $q(t)$ se fait au moyen d'une simple matrice de rotation

$$\begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Sous l'influence d'un défaut de forme, la raideur d'un système tournant n'est plus constante dans le repère fixe. En adaptant les remarques faites dans la partie précédente, on sait que la périodicité de la raideur tournante exprimée dans le repère fixe dépendra de forme de la fonction raideur dans le repère \mathbf{R}_n (et donc directement de la forme du défaut). Ainsi, dans le cas du rotor rectangulaire, la fonction raideur est elliptique [Lalanne and Ferraris, 1988] et peut donc se projeter sur le mode de Fourier $n_2 = 2$: la raideur exprimée dans le repère fixe est alors périodique de période $T_1 = \frac{\pi}{\Omega}$. Dans le cas général, la périodicité de la fonction raideur devient $T = \frac{2\pi}{n_2\Omega}$ où n_2 est le coefficient de Fourier sur lequel se projète le défaut de forme.

Grâce à la théorie de Floquet (chapitre 3), on peut écrire les déplacements généralisés du point O dans le repère tournant \mathbf{R}_r sous la forme ondulatoire

$$\{q'(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} \xi_R^j \\ \eta_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega' + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} \xi_I^j \\ \eta_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega' + 2j\Omega)t, \quad (\text{B.10})$$

et dans le repère Galiléen \mathbf{R}_n

$$\{q(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_R^j \\ y_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + 2j\Omega)t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_I^j \\ y_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + 2j\Omega)t. \quad (\text{B.11})$$

ω' est alors la fréquence fondamentale du champ de déplacements exprimée dans le repère tournant \mathbf{R}_r . ω est la fréquence fondamentale du champ de déplacements exprimée dans le repère fixe \mathbf{R}_r .

En remplaçant les déplacements généralisés $q'(t)$ et $q(t)$ dans la relation temporelle (B.9) par leurs formes ondulatoires (B.10) et (B.11), on obtient

$$\{q'(t)\} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \left(\begin{Bmatrix} x_R^j \\ y_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + 2j\Omega)t + \begin{Bmatrix} x_I^j \\ y_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + 2j\Omega)t \right) \right) \quad (\text{B.12})$$

En se souvenant d'une part des formules trigonométriques $2 \sin X \sin Y = \cos(X - Y) - \cos(X + Y)$, $2 \cos X \cos Y = \cos(X + Y) + \cos(X - Y)$ et $2 \sin X \cos Y = \sin(X + Y) + \sin(X - Y)$, et d'autre part de la relation d'équivalence entre les deux repères $\omega' = \omega - \Omega$; l'équation (B.12) devient dans le repère Galiléen

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \left(\begin{Bmatrix} \xi_R^j \\ \eta_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + (2j - 1)\Omega)t + \begin{Bmatrix} \xi_I^j \\ \eta_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + (2j - 1)\Omega)t \right) = \\ & \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \left(\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_R^j - y_I^j \\ y_R^j + x_I^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + (2j + 1)\Omega)t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_R^j + y_I^j \\ y_R^j - x_I^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + (2j - 1)\Omega)t \right) + \\ & \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \left(\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_I^j + y_R^j \\ y_I^j - x_R^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + (2j + 1)\Omega)t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_I^j - y_R^j \\ y_I^j + x_R^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + (2j - 1)\Omega)t \right). \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

L'égalité (B.13) peut être vérifiée sur chaque j . Il apparaît alors une infinité d'égalités, dans le domaine fréquentiel, entre les contributions sur les harmoniques des déplacements $q(t)$ et $q'(t)$

$$\{U^j\} = \begin{Bmatrix} x_R^j \\ y_R^j \\ x_I^j \\ y_I^j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{U'^j\} = \begin{Bmatrix} \xi_R^j \\ \eta_R^j \\ \xi_I^j \\ \eta_I^j \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

En pratique, ce couplage entre les différents harmoniques est nécessairement tronqué à l'ordre j_{max} (voir chapitre 3), la relation (B.13) devient alors approximative dans le domaine fréquentiel (on sait cependant que l'ordre de troncature fréquentiel j_{max} converge). En tronquant l'égalité de liaison (B.13) à l'ordre $j_{max} = 1$, on obtient l'ensemble d'équations linéaires $\mathbf{L}^{(1)} \cdot \vec{U}^{(1)} = \{0\}$ avec

$$\mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & \mathbb{R}_R & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 0 & \mathbb{R}_R & \mathbb{I} & \mathbb{R}_D & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} - \\ U'^{-1} \\ U^{-1} \\ U'^0 \\ U^0 \\ U'^1 \\ U^1 \\ - \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbb{R}_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Dans le cas d'un défaut de forme, la présence d'harmoniques secondaires en 2Ω dans le comportement vibratoire du système tournant provient du couplage rotor-stator. Dans le domaine fréquentiel, une fois ce couplage introduit dans l'équation d'équilibre du système $S \cup S'$ (maillage éléments finis initial) sur la base modale considérée (dont la dimension tient compte du nombre d'harmoniques nécessaire à la solution), le champ de déplacements est solution de l'équation de Hill de l'ensemble (voir chapitre 3).

Remarque :

- Sous l'effet de la rotation du système, la forme de la fonction raideur tournante joue un rôle sur sa périodicité dans le repère fixe (figure B.1). Ainsi, en considérant toujours qu'elle se projète sur le mode de Fourier n_2 , on a écrit le champ de déplacements sous la forme ondulatoire

$$\{q(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_R^j \\ y_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + n_2 j \Omega) t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_I^j \\ y_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + n_2 j \Omega) t. \quad (\text{B.17})$$

La formulation (B.17) suppose de connaître a priori la forme du défaut étudié. Pour étudier les défauts de forme dans le cas général, on peut utiliser les oscillations poly-harmoniques

$$\{q(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_R^j \\ y_R^j \end{Bmatrix} \cos(\omega + j \Omega) t + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \begin{Bmatrix} x_I^j \\ y_I^j \end{Bmatrix} \sin(\omega + j \Omega) t \quad (\text{B.18})$$

qui contiennent tous les autres cas de figure (à savoir n'importe quel mode de Fourier n_2). Cependant, en généralisant notre méthode, nous perdons en efficacité : la convergence fréquentielle sera plus lente si on utilise la forme (B.18) comme solution de l'équation de mouvement de S_1 plutôt que la forme (B.17). Cette dernière est donc une formulation enrichie qui nécessite une connaissance plus approfondie du problème, elle suppose de connaître la solution attendue (on retrouve le même principe dans le cas de l'enrichissement d'une solution en pointe de fissure par exemple).

Bibliographie

- [Andrieux and Varé, 2002] Andrieux, S. and Varé, C. (2002). A 3D cracked beam model with unilateral contact. Application to rotors. *European Journal of Mechanics A.Solids*, 21 :793–810.
- [Andrieux and Varé, 2005] Andrieux, S. and Varé, C. (2005). Modeling of a cracked beam section under bending. In *18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Beijing, China. SMiRT 18.
- [Antunes et al., 1996a] Antunes, J., Axisa, F., and Grunenwald, T. (1996a). Dynamics of rotors immersed in eccentric annular flow. Part I : Theory. *Journal of Fluids and Structures*, 10 :893–918.
- [Antunes et al., 1996b] Antunes, J., Axisa, F., and Grunenwald, T. (1996b). Dynamics of rotors immersed in eccentric annular flow. Part II : Experiments. *Journal of Fluids and Structures*, 10 :893–918.
- [Antunes et al., 1992] Antunes, J., Axisa, F., and Hareux, F. (1992). Flexural vibrations of rotors immersed in dense fluids. Part II : Experiments. *Journal of Fluids and Structures*, 6 :23–38.
- [Arem, 2006] Arem, S. E. (2006). *Vibrations non-linéaires des structures fissurées : Application aux rotors de turbines*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Argyris and Mlejnek, 1991] Argyris, J. H. and Mlejnek, H.-P. (1991). *Dynamics of structures*. North-Holland.
- [Arsac, 1961] Arsac, J. (1961). *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, chapter 2. Dunod.
- [Arscott, 1964] Arscott, F. M. (1964). *Periodic differential equations*. Pergamon.
- [Axisa, 2001a] Axisa, F. (2001a). *Modélisation des systèmes mécaniques*, volume 1, chapter 5. Hermès.
- [Axisa, 2001b] Axisa, F. (2001b). *Modélisation des systèmes mécaniques*, volume 4, chapter 2. Hermès.
- [Axisa and Antunes, 1992] Axisa, F. and Antunes, J. (1992). Flexural vibrations of rotors immersed in dense fluids. Part I : Theory. *Journal of Fluids and Structures*, 6 :3–21.
- [Batoz and Dhatt, 1990] Batoz, J.-L. and Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1. Hermès.
- [Bendat and Piersol, 1993] Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1993). *Engineering applications of correlation and spectral analysis*, pages 1–25. John Wiley & Sons.
- [Benech, 1995] Benech, N. (1995). Calcul de modes complexes dans Castem 2000. Technical Report DMT 95/354, Commissariat à L’Energie Atomique.
- [Berlioz et al., 2000] Berlioz, A., Dufour, R., and Sinha, S. C. (2000). Bifurcation in a Nonlinear Autoparametric System Using Experimental and Numerical Investigations. *Nonlinear Dynamics*, 23 :175–187.

- [Berlioz et al., 1996] Berlioz, A., Hagopian, J. D., and Dufour, R. (1996). Dynamic Behavior of a Drill-String : Experimental Investigation of Lateral Instabilities. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118 :292–298.
- [Bolotin, 1964] Bolotin, V. V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day.
- [Brosens and Crandall, 1961] Brosens, P. J. and Crandall, S. H. (1961). Whirling of unsymmetrical rotors. *Journal of Applied Mechanics*, 31 :355–362.
- [Brun et al., 2008] Brun, M., Combescure, A., Baillis, C., Limam, A., and Buzaud, E. (2008). Simulations of the penetration of limestone targets using two-dimensional multimodal Fourier analysis. *International Journal of Impact Engineering*, 35 :251–268.
- [Campbell, 1964] Campbell, R. (1964). *Théorie générale de l'équation de Mathieu*. Masson et Cie.
- [Cheikh, 1995] Cheikh, L. (1995). *Flambage Dynamique des coques minces*. PhD thesis, Université de Grenoble II.
- [Chondros et al., 2001] Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., and Yao, J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, 239(1) :57–67.
- [Clough and Penzien, 1993] Clough, R. W. and Penzien, J. (1993). *Dynamic of structures*, pages 15–160. McGraw-Hill.
- [Combescure, 1995] Combescure, A. (1995). *Etude de la stabilité non linéaire géométrique et non linéaire matériau des coques minces. Application aux coques de révolution avec imperfections soumises à des chargements complexes*. PhD thesis, INSA de Lyon. Habilitation à Diriger des Recherches.
- [Combescure, 2003] Combescure, D. (2003). Modélisation des arbres tournants dans CAST3M, Calculs avec des éléments de poutre dans le repère fixe. Technical Report SEMT/DYN/RT/03-007, Commissariat à L'Energie Atomique.
- [Combescure and Lazarus, 2008] Combescure, D. and Lazarus, A. (2008). Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines : Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. *Journal of Sound and Vibration*. available online.
- [Craig and Bampton, 1968] Craig, J. and Bampton, M. C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6 :1313–1319.
- [Crandall and Brosens, 1961] Crandall, S. H. and Brosens, P. J. (1961). On the stability of rotation of a rotor with rotationally unsymmetric inertia and stiffness properties. *Journal of Applied Mechanics*, 31 :567–570.
- [de Langre, 2001] de Langre, E. (2001). *Fluides et Solides*, pages 53–82. Editions de l'école Polytechnique.
- [Dimarogonas, 1996] Dimarogonas, A. D. (1996). Vibration of cracked structures : a state of art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5) :831–857.
- [Dimentberg, 1961] Dimentberg, F. M. (1961). *Flexural vibrations of rotating shafts*. Butterworths.
- [Dufour and Berlioz, 1998] Dufour, R. and Berlioz, A. (1998). Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120.
- [Floquet, 1879] Floquet, G. (1879). Sur la théorie des équations différentielles. *Annales scientifiques de l'ENS*, 8 :3–132.
- [Foote et al., 1943] Foote, W. R., Poritsky, H., and Slade, J. J. (1943). Critical speeds of a rotor with unequal shaft flexibilities, mounted in bearings of unequal flexibilities. *Journal of Applied Mechanics*, 65 :77–84.

- [Frêne, 1990] Frêne, J. (1990). *Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées*. Eyrolles.
- [Gasch, 1993] Gasch, R. (1993). A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. *Journal of Sound and Vibration*, 160(2) :313–332.
- [Gasch, 2008] Gasch, R. (2008). Dynamic behaviour of the Laval rotor with a transverse crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :790–804.
- [Genta, 1988] Genta, G. (1988). Whirling of unsymmetrical rotors : a finite element approach based on complex co-ordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1) :27–53.
- [Genta, 1995] Genta, G. (1995). *Vibration of structures and machines*. Springer-Verlag.
- [Genta, 2005] Genta, G. (2005). *Dynamics of rotating systems*. Springer.
- [Gibert, 1988] Gibert, R.-J. (1988). *Vibrations des structures*, chapter 1. Eyrolles.
- [Gladwell and Stammers, 1966] Gladwell, G. M. L. and Stammers, C. W. (1966). On the stability of an unsymmetrical rigid rotor supported in unsymmetrical bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 3(3) :221–232.
- [Gmür, 1997] Gmür, T. (1997). *Dynamique des structures : Analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [Gérardin and Rixen, 1992] Gérardin, M. and Rixen, D. (1992). *Théorie des vibrations, Application à la dynamique des structures*. Masson.
- [Grunenwald, 1994] Grunenwald, T. (1994). *Comportement vibratoire d'arbres de machines tournantes dans un espace annulaire de fluide de confinement modéré*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [Han, 2005] Han, D.-J. (2005). *Modal analysis of periodically time-varying rotor systems using Floquet theory and modulated coordinate transformation : applications to crack detection and modal balancing*. PhD thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology.
- [Han, 2007] Han, D. J. (2007). Vibration analysis of periodically time-varying rotor system with transverse crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 :2857–2879.
- [Hansen et al., 2001] Hansen, M., Raman, A., and Jr, C. D. M. (2001). Estimation of nonconservative aerodynamic pressure leading to flutter of spinning disks. *Journal of Fluids and Structures*, 15 :39–57.
- [Heo and Chung, 2004] Heo, J. W. and Chung, J. (2004). Vibration analysis of a flexible rotating disk with angular misalignment. *Journal of Sound and vibration*, 274 :821–841.
- [Hill, 1886] Hill, G. W. (1886). On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1) :1–36.
- [Hsu, 1963] Hsu, C. S. (1963). On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, pages 367–372.
- [Hughes, 1987] Hughes, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic*. Prentice-Hall.
- [Lalanne et al., 1986] Lalanne, M., Berthier, P., and der Hagopian, J. (1986). *Mécanique des vibrations linéaires*. Masson.
- [Lalanne and Ferraris, 1988] Lalanne, M. and Ferraris, G. (1988). *Rotordynamics Prediction in Engineering, 2nd Edition*. J. Wiley.
- [Lazarus, 2005] Lazarus, A. (2005). Influence des défauts de fabrication sur le comportement dynamique d'une machine tournante. Master's thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Laboratoire de Mécanique et Technologie.

- [Lazarus, 2006] Lazarus, A. (2006). Stabilité et équilibres d'un système tournant simple avec raiders non symétriques. Technical Report SEMT/DYN/RT/06-019/A, Commissariat à L'Energie Atomique.
- [Lazarus and Combescure, 2008] Lazarus, A. and Combescure, D. (2008). Influence of imperfections on vibrations in rotating machinery. In *Ninth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, volume 1, pages 289–301, Exeter, UK. IMechE.
- [Lazarus et al., 2007] Lazarus, A., Combescure, D., and Nguyen, Q. S. (2007). Stabilité et équilibres d'un système tournant non axisymétrique : Application aux rotors fissurés. In *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France. CSMA.
- [Lee et al., 2006] Lee, C.-W., Han, D.-J., and Hong, S.-W. (2006). Modal Analysis of Periodically Time-Varying Linear Rotor Systems using Floquet Theory. In *Conference on Rotor Dynamics*, Vienna, Austria. 7th IFToMM.
- [Lee et al., 2007] Lee, C.-W., Han, D.-J., Suh, J.-H., and Hong, S.-W. (2007). Modal Analysis of Periodically Time-Varying Linear Rotor Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 303 :553–574.
- [Lemaitre and Chaboche, 2000] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (2000). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Matras and Flowers, 2002] Matras, A. and Flowers, G. T. (2002). Influence of internal damping on rotordynamic stability of flexible hub flywheel energy storage systems. In *9th International Conference on Sound and Vibration*, Orlando, Florida.
- [Max and Lacoume, 1996] Max, J. and Lacoume, J.-L. (1996). *Méthodes et techniques de traitement du signal at applications aux mesures physiques*, volume 1, pages 9–68. Masson.
- [Nandi, 2004] Nandi, A. (2004). Reduction of finite element equations for a rotor model on non-isotropic spring support in a rotating frame. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40 :935–952.
- [Nandi and Neogy, 2005] Nandi, A. and Neogy, S. (2005). An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :1343–1364.
- [Neal, 1971] Neal, R. H. M. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1 :581–601.
- [Nguyen, 1995] Nguyen, Q. S. (1995). *Stabilité des structures élastiques*. Springer-Verlag.
- [Nguyen, 2000] Nguyen, Q. S. (2000). *Stabilité et mécanique non linéaire*, chapter 6. Hermès.
- [Oncescu et al., 2001] Oncescu, F., Lakis, A. A., and Ostiguy, G. (2001). Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 245 :303–328.
- [Patel and Darpe, 2008] Patel, T. H. and Darpe, A. K. (2008). Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 311 :953–972.
- [Piteau and Valin, 1995a] Piteau, P. and Valin, T. (1995a). Etude de l'écoulement instationnaire pour un rotor excentré dans un confinement modéré de fluide. Comparaison essai/calcul. Technical Report DMT 95/358, Commissariat à L'Energie Atomique.
- [Piteau and Valin, 1995b] Piteau, P. and Valin, T. (1995b). Etude de l'écoulement instationnaire pour un rotor excentré dans un espace annulaire de fluide. Comparaison essai/calcul. Technical Report DMT 95/607, Commissariat à L'Energie Atomique.
- [Poincaré, 1886] Poincaré, H. (1886). Sur les déterminants d'ordre infini. *Bulletin de la S. M. F.*, 14 :77–90.

- [Politopoulos, 2000] Politopoulos, I. (2000). Flambage dynamique des cuves RNR. Etat de l'art. Technical Report SEMT/EMSI/RT/00-021/A, Commissariat à L'Energie Atomique.
- [Richards, 1983] Richards, J. A. (1983). *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. Springer-Verlag.
- [Rocard, 1971] Rocard, Y. (1971). *Dynamique générale des vibrations*. Masson & Cie.
- [Roques, 2007] Roques, S. (2007). *Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes.
- [Rousseau and Varé, 1998] Rousseau, G. and Varé, C. (1998). *Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique*. Electricité de France. R4.06.02-B.
- [Stoisser and Audebert, 2008] Stoisser, C. M. and Audebert, S. (2008). A comprehensive theoretical, numerical and experimental approach for crack detection in power plant rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :818–844.
- [Suh et al., 2005] Suh, J.-H., Hong, S.-W., and Lee, C.-W. (2005). Modal analysis of asymmetric rotor system with isotropic stator using modulated coordinates. *Journal of Sound and vibration*, 284 :651–671.
- [Trompette, 1992] Trompette, P. (1992). *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis statique et dynamique*. Masson.
- [Tseng et al., 2005] Tseng, C.-W., Shen, J.-Y., Kim, H., and Shen, I. Y. (2005). A Unified Approach to Analyze Vibration of Axisymmetric Rotating Structures with Flexible Stationary Parts. *Journal of Vibration and Acoustics*, 127 :125–139.
- [Villa et al., 2008] Villa, C., Sinou, J.-J., and Thouverez, F. (2008). Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :804–821.
- [Weaver et al., 1990] Weaver, W., Timoshenko, S. P., and Young, D. H. (1990). *Vibration problems in engineering*, chapter 1. John Wiley & Sons.