Algorithmes et méthodes

- Rappel de Maths
- Non linéaire matériau
- Grands déplacements
- Pilotage
- Flambage

Théorème du point fixe

- Application f de E dans E – E Compact
- f contractante ⇔ $|f(x)-f(y)| < |x-y|$
- Il existe un point fixe : $x = f(x)$
- $x_{n+1}= f(x_n)$ $x = \lim x_i$

Variante point fixe

- Condition $|f(x)-f(y)|$ ☼ $|x-y|$
- E convexe
- Il existe un point fixe
- On ne l'obtient pas par la suite $x_{i+1} = f(x_i)$
- Exemple : rotation

Condition de Lipschitz

- ℯ𝒯 k $k < 1$ $|f(u) - f(v)|$ ☼ $k\,|u - v|$
- Il existe un point fixe x
- $|x - x_p| < k^p\,|x - x_1|$
- Convergence plus rapide pour k proche de 0

Méthode de Newton

- $F(x) = 0$ F dérivable
- $f(x) = x - g(x)\,F(x)$
- $x_{n+1} = f\,(x_n)$
- $f(u) - f(v) = (u - v)\,f'$
- $f' = 1 - gF' - g'F \sim 1 - gF'$
- Convergence si $|f'| < 1$ $0 < |gF'| < 2$
- Rapide si $|f'| \sim 0 \Leftrightarrow$ $g = \frac{1}{F'}$

Newton (suite)

- Calcul de g ??
- F’ varie
- Quand (Newton modifié)
- Comment : analytique ou numérique

Non linéarité matériau

- Structure S, conditions aux limites Cl, comportement Comp, état initial U_0 au repos, chargement F_{ext}
- On cherche l'état final tel que :
- $F_{ext} - B\,\sigma = 0$ Équilibre
- $\sigma = Comp\,(\varepsilon)$

Contraintes initiales

- Déplacement U
- ➔ Déformations ε
- ➔ Contraintes σ (avec le comportement)
- ➔ Forces nodales équivalentes : $F = B\ \sigma$
- ➔ Actualisation forces extérieures et CL
- ➔ Résidu $R = F - F_{ext}$
- ➔ Incrément déplacement $\Delta U = K^{-1} R$
- On itère

Contraintes initiales (convergence)

$$\left|\frac{U_{n+1} - U_e}{U_n - U_e}\right| < 1$$

- $U_{n+1} = U_n + K^{-1}(F_{ext} - C(U_n))$
- $F_{ext} = C(U_e)$
- $U_{n+1} = U_n + K^{-1}\, C'(U_e - U_n)$
- $U_{n+1} - U_e = (I - K^{-1}C')\,(U_n - U_e)$

Convergence (suite)

- $-1 < K^{-1} C' - 1 < 1$
- $0 < K^{-1} C' < 2$
- Problème : C' change pendant les itérations (raideur tangente) à cause du changement de la zone plastique
- Si K > C' convergence monotone
- Si K < C' convergence alternée
- Si $K^{-1}C'$ petit convergence lente

Convergence

- En cas de convergence alternée, on risque d'arriver à la limite du comportement
- Risque C'☼ 0
- ➔ prendre K > C'
- Dans Castem K = raideur élastique par défaut

Line Search

- Module tangent << Module élastique
- ➔ convergence lente E_t/E_e petit
- $U_{n+1}=U_n+s(n)\Delta U$ s paramètre de recherche
- Minimiser R :
- $G(s)= \Delta U \,.\, R(s)$
- Minimiser G

Accélération de convergence dans Castem

- Recherche sur sous espace

(variante multidimensionnelle du Line Search)

- Les itérations définissent des couples (U_i, R_i) vérifiant l’équilibre : $F_{ext} - F_{int} = R_i$
- Supposons $e\mathcal{T}$ opérateur tangent T
- $R_i - R_j = T\,(U_i - U_j)$

Accélération de convergence - 2

- $U = U_n + \Sigma\lambda_i(U_i - U_n)$
- $R = R_n + \Sigma\lambda_i(R_i - R_n)$
- Minimisation de R^2 (autres normes possibles)
- $R\ \Upsilon R/\Upsilon\lambda_k = 0$
- $(R_n + \Sigma\lambda_i(R_i - R_n))\ R_k=0$
- Résolution système linéaire ➔ λ_i
- Itérer avec le nouveau U

Accélération de convergence - 3

- Dans Castem accélération tous les 2 pas avec 4 itérés. Compromis stabilité vitesse.
- Correction direction de l'incrément
- Nécessaire car la matrice tangente est une projection de la matrice élastique (donc changement de direction)
- En fait on accélère les forces (conditions unilatérales)
- Calcul une projection de T sur le sous-espace engendré par les itérés

Accélération de convergence - 4

- Ressemble au CG (autre choix de norme)
  - Direction de descente orthogonale aux précédentes
- BFGS : estimation T avec tous les itérés
- Problème : T évolue avec les itérations
- Il vaut mieux oublier les itérations anciennes

Décomposition en pas

- La taille d’un incrément est limitée
  - Erreur sur le comportement (linéarisation, intégration sur le pas, termes négligés)
  - Erreur sur le calcul des déformations :
    - $d\ \varepsilon = dl/l$
    - $\Delta\ \varepsilon = \log(1+\Delta l/l)$
    - Développement au premier ou second ordre :
      $$\Delta\ \varepsilon = \Delta l/l - ½\ (\Delta l/l)^2$$
  - Rayon de convergence (variation de C’)

Décomposition - 2

- Chargement F
- Décomposition en F_i tels que :
  - F_{i+1}-F_i = α F
  - $\Delta\ \varepsilon$ petit au cours du pas
- C’ varie peu
- Remarque : Pour erreur sur comportement, déformations, on peut sous découper le pas :
  - $\Delta\varepsilon = \Sigma\ d\varepsilon$
  - Pas de vérification de l’équilibre dans les sous pas
  - Problème rayon de convergence (variation de C’)

Corde tendue

- Corde, longueur $2L_0$, tension T_0 initiale
- Équilibre : $2(T_0+dT)\alpha = P$
- $dT = ES\ \varepsilon$
- $\varepsilon = \alpha^2/2$
- $P = \alpha\ (2T_0+ES\ \alpha^2)$
- $F= \alpha L_0$
- ➔ $F = L_0/2T_0)\ P$

Grands déplacements

- Option GRANDS DÉPLACEMENTS dans Castem.
- Écriture équilibre sur la configuration déformée
- Prise en compte de la variation de la géométrie
- Calcul de $B\sigma$ sur le géométrie à la fin du pas
- Calcul de K sur la géométrie début du pas
- Transport des contraintes initiales sur la géométrie à la fin du pas

Transport des contraintes initiales

- Loi de comportement Lagrangienne
- Contraintes = grandeurs lagrangiennes
- Etat final : $\sigma_f = \sigma_i + \Delta\, \sigma$
- $\Delta\, \sigma$: loi de comportement
- $F_f = B_f\, \sigma_i + B_f\, \Delta\, \sigma$
- $F_i = B_i\, \sigma_i$
- $F_f = F_i + Ksig(\sigma_i)\Delta u + K\, \Delta u$
- Ksig : entraînement du repère local

Transport des contraintes

- Dans Castem
  - Massifs : contraintes dans le repère général. Transport avec l’opérateur PICA
  - Coques : contraintes dans le repère local. Pas besoin de transport
  - Opérateur KSIG pour calcul matrice NL géométrique

Termes du second ordre

- Option GRANDES ROTATIONS dans Castem
- Prise en compte des termes du 2ème ordre pour calcul déformations
- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j) + \frac{1}{2} \partial u_k/\partial x_i \, \partial u_k/\partial x_j$
- Possibilité calcul matrice non linéarité géométrique (option KSIG)

Critère de convergence

- Équilibre : R=0 (critère absolu)
  - Critère global
  - Numérique ➔ critère relatif
  - Valeur de référence ?
    - Forces extérieures ou réactions (depl imposé)
    - Pb si calcul thermique structure libre
    - Forces internes par rapport forces 1er pas
    - Retour à l'état initial
  - Problème moments versus forces
  - Insuffisant si grande variation taille élément

Critères de convergence -2

- Stabilité des variables (critère de Cauchy)
  - Critère local
    - Déformations, contraintes
    - Variables internes
    - CL ou chargement variable
    - Vérification du comportement
- Nécessité des 2 types de critères : global et local

Valeurs usuelles de critères

- Remarque :
  - Convergence ⇔ on peut fixer la valeur du critère aussi faible qu'on veut
  - Limité par la précision du comportement
  - Limité par le coùt de calcul
- Dans Castem : 1E-4 par défaut
- Remarque :
  - Accélération de convergence ⇔dérivation numérique ➔ précision supérieur du comportement, c-à-d 1E-8

Passage au pas suivant

- A la fin du pas de charge, déséquilibre R
- Reporté sur le pas suivant:
- $\Delta F = F_{n+1} - B\sigma \quad B\sigma = F_n - R$
- Pas de cumul des déséquilibres
- Initialisation U pas suivant avec résultat pas actuel
  - ➔Diminution du nombre d'itérations

Opérateur d'itération

- Dans Castem raideur élastique début du pas
  - Factorisé une fois
  - Défini positif
  - Comportement = projection sur un critère
  - $K_c = Pr\ K_e$
  - Option KSIG : + raideur NL géométrique
- Problème de conditionnement avec la raideur tangente comportement (ex plastique parfait)
- Opérateur réel : opérateur tangent estimé dans les accélérations de convergence

Pilotage

- Exemple du retournement de fond
- Courbe charge déplacement non monotone
- Équilibre instable le long de la branche descendante

Nouveau problème

- ΔF incrément de chargement λ coefficient multiplicateur
- E_i État initial, E état final et Crit un critère
- Crit par ex déplacement d'un point
  - Dans Castem, incrément de déformation
- Trouver λ et E tel que
  - Crit(E)=C
  - $\lambda \Delta F + F_1 = B\sigma$

Algorithme

- Incrément de déplacement ΔU
- ➔ Déformations ε
- ➔ Critère C
- ➔ Coefficient multiplicateur sur U pour vérifier C
- ➔ Contraintes σ (avec le comportement)
- ➔ Forces nodales équivalentes : $F = B\ \sigma$
- ➔ Coefficient λ tel que $R=(F-F_1)-\lambda\Delta F$ minimum
- ➔ Résidu R
- ➔ Incrément déplacement $\Delta U = K^{-1}\ R$
- On itère

Pilotage - conclusion

- Convergence quand R=0
- ➔ λ coefficient multiplicateur du chargement
- Initialisation pas suivant avec même déplacement et même chargement
- Choix norme minimisation R : énergie
- R ΔU
- Une difficulté avec critère déformations (signe)

Implémentation dans Castem

- Critère par défaut incrément de déformation
- Surchargable : procédure AUTOPILO
- Calcul λ tous les 2 pas (stabilité ?)
- Réduction automatique du critère de pilotage si non convergence, augmentation si convergence
- But : atteindre un état prédéfini

Calcul automatique de pas de charge

- Rigoureux : pilotage en déformation ou ajustement du pas en fonction de l'incrément de déformation
- Heuristique : ajustement de l'incrément de chargement suivant en fonction du nombre d'itérations du pas courant.

Flambage

- Problème : calcul de la charge de flambage d'une structure.
- Structure S, Chargement F
- Déterminer le coefficient multiplicateur de chargement λ tel que la matrice tangente $K_T(\lambda)$ ait une valeur propre nulle.

Méthode

- État initial :
  - Raideur tangente initiale K_i:
    - Géométrie initiale
    - Comportement tangent
    - Pression suiveuse
    - Avec la non linéarité géométrique Ksig(σ)
    - …

Méthode - 2

- Calcul avec le chargement ΔF
  - $\Delta\sigma$
  - $Ksig(\Delta\sigma)$
- Raideur tangente finale :
  - K_i+Ksig
- Recherche λ tel que $K_i + \lambda Ksig$ ait un noyau

Puissance inverse

- $X'_{n+1}=K^{-1}\,Ksig\,X_n$
- $X_{n+1}=X'/|X'|$
- Convergence vers un vecteur propre de $K^{-1}Ksig$ associé à la plus grande valeur propre (décomposition sur base vecteur propre)
- $K^{-1}\,Ksig\,X = v\,X$
- $vKX = Ksig\,X \Rightarrow$
- $(K - 1/v\,Ksig)(X)=0$
- $\lambda = -1/v$

$$v = \frac{XKsigX}{XKX}$$

$$\lambda = -\frac{XKX}{XKsigX}$$

Flambage - conclusion

- λ est le coefficient multiplicateur de l'incrément de chargement qui conduit au flambage (valeur propre nulle)
- En pratique, on a aussi des difficultés de convergence du schéma non linéaire en arrivant au voisinage de la charge critique si on est en grands déplacements
- Intérêt de la connaissance du mode propre et de la stabilité d'un état.

Matrices particulières

- Matrices de comportement tangent
- Matrices de non linéarité géométrique (transport des contraintes initiales)
- Matrice des pressions suiveuses

Matrice comportement tangent

- Dans les cas simple, calcul explicite :
  - Module de Hook tangent (opérateur HOTA et KTAN)
  - La ou σ voisin de la limite élastique
- Sinon calcul numérique :
  - Construction explicite de D ou K
  - Perturbation de ε ou u sur chaque composante, application du comportement ➔ σ ou F
  - Nécessaire savoir si charge ou décharge

Matrice des pressions suiveuses

- F = ⓪ pNdS sur la configuration finale
- F_i = ⓪ pNdS sur la configuration initiale
- NdS se calcule avec les fonctions de formes à partir des ddl
- On suppose le déplacement d'un ddl (conf test)
- On déduit NdS dans l'élément (config initiale)
- On déduit F par le principe des travaux virtuels :
  ❸U_j ❶F_jU_j = ⓪ puNdS (config initiale)
- On obtient la matrice (non symétrique) : $F - F_i$

Matrice Non linéaire géométrique

- Travail des contraintes dans une transformation u

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}$$

$$dW = \int_{\Omega} \sigma d\varepsilon = (F_0 + F)dq \qquad \sigma = \sigma_0 + D(\varepsilon_L + \varepsilon_{NL})$$

$$dW = \int (\sigma_0 + D(\varepsilon_L + \varepsilon_{NL}))(d\varepsilon_L + d\varepsilon_{NL}) = (F_0 + F)dq$$

$$dW \approx \int \sigma_0 d\varepsilon_L + \int D\varepsilon_L d\varepsilon_L + \int \sigma_0 d\varepsilon_{NL}$$

$$dqF_0 \qquad dqKq \qquad dqK_{sig}q$$

$$\varepsilon_{ij_{NL}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad d\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

Non linéaire géométrique

$$dqK_{sig}q = \int \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial du}{\partial x}$$

$$u = \sum N_i q_i \qquad du = Ndq$$

$$\frac{\partial du}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}dq \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}q$$

$$dqK_{sig}q = dq\left(\int_{\Omega} \sigma_0 \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial y}\right)q$$